دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکز

دانشکده علوم پایه (گروه فیزیک)

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد (M.Sc)

گرایش: بنیادی

عنوان:

محاسبه درهم‌تنیدگی در سیستم زنجیره‌های اسپینی یک بعدی

استاد راهنما :

دکتر محمدرضا ابوالحسنی

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا تنهایی

پژوهشگر:

نگار نیکدل یوسفی

شهریورماه ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم که قلبم با تپش قلبشان می تپد

و

خواهرم که وجودش گرما بخش زندگی من است

و تمامی کسانی که به شادی و آرامش این دنیا می افزایند.

تشکر و قدررانی

با سپاس فراوان به درگاه ایزد منان که فروغ آموختن را در دلم نهاد و از استاد ارجمندم آقای دکتر ابوالحسنی بدلیل تمامی تلاشها و زحماتی که در طول دوره متحمل شده‌اند قدردانی می‌کنم و از آقای دکترتنهایی به خاطر مشاوره های مفیدشان تشکر می‌کنم. همچنین ازآقای دکترمحمدرضا سلطانی که بخشی از مطالعات خود را با همکاری ایشان انجام داده‌ام خالصانه قدردانی می‌نمایم و از آقایان دکتر سعید مهدوی فر مدیرگروه دانشگاه گیلان وجواد واحدی و خانم مرضیه آسوده که بحث‌های ارزنده ای در کنار ایشان داشته‌ام تشکر می‌کنم.

در انتها صمیمانه‌ترین قدردانی خود را به پدر و مادر مهربانم که با صبر و حوصله‌ی فراوان مشوق من در طی این دوره بوده‌اند تقدیم می‌کنم.

تعهد نامه اصالت پایان نامه کارشناسی ارشد

اینجانب ....نگارنیکدل یوسفی... دانش آموخته مقطع کارشناسی ارشد ناپیوسته به شماره دانشجویی۸۸۰۶۵۱۲۶۶۰۰ در رشته فیزیک بنیادی که در تاریخ .....۹۱.۶.۲..... از پایان نامه خود تحت عنوان : .....محاسبه .درهم تنیدگی در سیستم زنجیره های اسپینی یک بعدی با کسب نمره .....۱۸..... و درجه .....عالی..... دفاع نموده ام بدینوسیله متعهد می شوم :

۱- این پایان نامه حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از پایان نامه ، کتاب ، مقاله و ...) استفاده نموده ام ، مطابق ضوابط و رویه های موجود ، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست ذکر و درج کرده ام .

۲- این پایان نامه قبلاً برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح ، پایین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاهها و موسسات آموزش عالی ارائه نشده است .

۳- چنانچه بعد از فراغت از تحصیل ، قصد استفاده و هرگونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب ، ثبت اختراع و ... از این پایان نامه داشته باشم ، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوطه را اخذ نمایم .

۴- چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود ، عواقب ناشی از آن را بپذیرم و واحد دانشگاهی مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام هیچگونه ادعایی نخواهم داشت .

نام و نام خانوادگی : نگار نیکدل یوسفی

تاریخ و امضاء : ۹۱.۶.۲

بسمه تعالی

درتاریخ : ۹۱.۶.۲

دانشجوی کارشناسی ارشد آقای / خانم نگارنیکدل یوسفی از پایان نامه خود دفاع نموده وبا نمره بحروف و با درجه مورد تصویب قرار گرفت .

امضاء استاد راهنما

بسمه تعالی

دانشکده علوم پایه

فرم اطلاعات پایان نامه های کارشناسی ارشد

****

(این چکیده به منظور چاپ در پژوهش نامه دانشگاه تهیه شده است)

نام واحد دانشگاهی : تهران مرکزی کد واحد : ۱۰۱	**کد شناسایی پایان نامه :**
نام ونام وخانوادگی دانشجو: نگارنیکدل یوسفی **شماره دانشجویی: ۸۸۰۶۵۱۲۶۶۰۰**	**سال و نیمسال اخذ پایان نامه : ۲-۹۰** **رشته تحصیلی : فیزیک بنیادی**
عنوان پایان نامه کارشناسی ارشد : محاسبه درهم تنیدگی در سیستم زنجیره های اسپینی یک بعدی	
نام و نام خانوادگی استاد راهنما : دکتر محمدرضا ابوالحسنی **نام و نام خانوادگی استاد مشاور: دکتر محمد رضا تنهایی**	
تعداد واحد پایان نامه: ۶ **تاریخ صدور کد شناسایی :** **تاریخ دفاع از پایان نامه :۹۱.۰۶.۲** **تاریخ ارائه مقاله :**	**نمره پایان نامه دانشجو(از ۱۸ نمره)** **به عدد: به حروف:** **نمره مقاله دانشجو(از ۲ نمره)** **به عدد: به حروف:**

در این پایان نامه به بررسی موضوع درهم تنیدگی در سیستم زنجیره های اسپینی هایزنبرگ می پردازیم. اخیراً موضوع درهم تنیدگی و یا همبستگی خالص کوانتومی به عنوان منبعی با ارزش برای انجام تمامی پروتکلهای اطلاعات و محاسبات کوانتومی مانند فراد برد کوانتومی، کدگذاری چگال، الگوریتم های جستجو و غیره مورد مطالعه وسیعی قرار گرفته است.برای سیستم های زنجیره ای هایزنبرگی ذرات با اسپین ۱/۲ فرمول بسته ای برای محاسبه میزان درهم تنیدگی به دست آمده است. در این پایان نامه ما نخست به معرفی مفهوم در همتنیدگی می پردازیم و معیار توافق را که برای سنجش ان معرفی شده و مقبولیت یافته است تعریف می کنیم سپس محاسبات خود را در مدل های زنجیره ای اسپینی هایزنبرگ دو و سه کیوبیتی معطوف کرده ایم . در ابتدا زنجیره اسپینی هایزنبرگ متشکل از دو کیوبیت را با برهمکنش ژیالوشینسکی- موریا *(DM)* در در نظر گرفته و در هم تنیدگی گرمایی بین هر دو جفت اسپینی را در مدل های آیزینگ، *XXX* و *XXZ* بدست اورده ایم و نشان داده ایم که درهمتنیدگی به دما و شدت برهمکنش *DM* وضرایب جفت شدگی بین اسپین ها بستگی دارد و در مقدار مشخصی از دمای پایین و شدت برهمکنش *DM* به ماکزیمم مقدار خود می رسد . سپس به بررسی و محاسبه درهم تنیدگی مدل های ذکرشده سه کیوبیتی با برهمکنشِ *DM* پرداخته ایم. در ادامه ماتریس چگالی کاهش یافته متقارن($\rho_{۱۳}$) و پادمتقارن($\rho_{۱۲}$) را بین هر دو جفت اسپینی محاسبه نموده و رفتار درهم تنیدگی را بر حسب تغییرات دما و شدت برهمکنش *DM* مورد بررسی قرار داده ایم.در انتها معیار دیسکورد کوانتومی را به عنوان یکی از سنجه های همبستگی کوانتومی معرفی کرده و مقدار آن را برای سیستم زنجیره های اسپینی هایزنبرگ مدل های آیزینگ،*XXX* و*XXZ* دو کیوبیتی باشدت برهم کنش *DM*که فرم ماتریس چگالی ان ها حالت *X_State*داشته محاسبه کرده ایم و تغییرات دیسکورد کوانتومی را بر حسب شدت برهمکنش ***DM*** **و دما بررسی کرده ایم ونشان داده ایم که در دما وشدت برهمکنش *DM* مشخصی مقدار دیسکورد کوانتومی به بیشینه مقدار خود می رسد.**

واژه های کلیدی: درهم تنیدگی، زنجیره هایزنبرگ،توافق، کیوبیت، دیسکورد کوانتومی

امضاء استاد راهنما: امضاء مدیر گروه: امضاء ریاست دانشکده:

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

چکیده ۱
پیشگفتار ۲

فصل اول: مفاهیم اولیه

مفاهیم اولیه ۴
۱-۱) کیوبیت ۴
۱-۲) عملگر چگالی ۹
۱-۲-۱) عملگر چگالی کاهش یافته ۱۲
۱-۳) تجزیه یک ماتریس چگالی به آنسامبل‌های مختلف ۱۴
مقدمه ۱۷
۱-۴) جنبه های کاربردی درهم تنیدگی ۱۸
۱-۵) معنای درهم تنیدگی ۱۹
۱-۶) سنجه های درهم تنیدگی ۲۳
۱-۶-۱) آنتروپی شانون ۲۴
۱-۶-۲) آنتروپی فون نویمان ۲۶
۱-۷) اندازه درهم تنیدگی ۲۷
۱-۷-۱) آنسامبل خالص ۲۷
۱-۸) حالتهای آمیخته ۲۷
۱-۸-۱) درهم تنیدگی تشکیل ۳۰
۱-۸-۲) نحوه محاسبه درهم تنیدگی تشکیل ۳۳
۱-۹) معیارهای جداپذیری ۳۶
۱-۹-۱) تجزیه اشمیت عدد اشمیت ۳۶
۱-۹-۲) معیار جداپذیری پرز ۳۷
۱-۱۰) نگاتیویته ۳۹
۱-۱۱) همبستگی های کوانتومی ۴۱

فصل دوم: درهم‌تنیدگی گرمایی درسیستم زنجیره‌های اسپینی هایزنبرگ

مقدمه ۴۳
۲-۱) برهم‌کنش تبادلی ۴۶
۲-۲) مغناطیس در مواد شبه یک‌بعدی ۴۹
۲-۳) مدل XXZ ۵۰
۲-۴) درهم‌تنیدگی در زنجیره‌های اسپینی هایزنبرگ ۵۱
۲-۵) درهم‌تنیدگی گرمایی ۵۲
۲-۶) مثالی از یک سیستم دو کیوبیتی ۵۵
۲-۷) برهم‌کنش ژیالوشنیسکی – موریا DM ۵۸
۲-۸) زنجیره اسپینی هایزنبرگ با شدت برهم‌کنش DM ۶۰

فصل سوم:محاسبه درهمتنیدگی گرمایی در سیستم زنجیره های اسپینی هایزنبرگ

۳-۱) محاسبه درهم‌تنیدگی مدل آیزینگ یک بعدی با شدت برهم‌کنش DM ۶۳
۳-۱-۱) مدل آیزینگ ۲- کیوبیتی با شدت برهم‌کنش DM ۶۳
۳-۱-۲) مدل آیزینگ ۳ – کیوبیتی با شدت برهم‌کنش DM ۶۶
۳-۲) محاسبه درهم‌تنیدگی مدلXXX یک بعدی با شدت برهم‌کنش برهم‌کنش DM ۷۰
۳-۲-۱) مدل XXX ۲- کیوبیتی با شدت برهم‌کنش DM ۷۰
۳-۲-۲) مدل XXX ۳- کیوبیتی با شدت برهم‌کنش DM ۷۳
۳-۳) محاسبه درهم‌تنیدگی مدل XXZ یک بعدی با شدت برهم‌کنش DM ۷۷
۳-۳-۱) مدل XXZ ۲- کیوبیتی با شدت برهم‌کنش DM ۷۷
۳-۳-۲) مدل XXZ ۳- کیوبیتی با شدت برهم‌کنش DM ۸۰

فصل چهارم: دیسکورد کوانتومی (*QD*)

مقدمه ۸۴
۴-۱) تعریف ۸۵
۴-۲) اندازه‌گیری *QD* حالت‌های *X-State* ۸۶
۴-۳) محاسبه *QD* در سیستم زنجیره‌های اسپینی های با شدت برهم‌کنش *DM* ۹۱
۴-۳-۱) محاسبه *QD* مدل آیزینگ ۲- کیوبیتی با شدت برهم‌کنش *DM* ۹۱
۴-۳-۲) محاسبه *QD* مدل *XXX* ۲- کیوبیتی با شدت برهم‌کنش *DM* ۹۴
۴-۳-۳) محاسبه *QD* مدل *XXZ* ۲- کیوبیتی با شدت برهم‌کنش *DM* ۹۶

فصل پنجم: بحث و نتیجه‌گیری

بحث و نتیجه‌گیری ۹۸

پیوست ۱ ..... ۱۰۰
پیوست ۲ ..... ۱۰۵
منابع ۱۱۰
چکیده انگلیسی(Abstract) ۱۱۳

فهرست نمودارها

عنوان **صفحه**

۳-۱) نمودار درهم‌تنیدگی گرمایی مدل آیزینگ دو کیوبیتی برحسب دما و شدت برهم‌کنش D_z دربرهم‌کنش فرومغناطیس و پاد فرومغناطیس ۶۵

۳-۲) نمودار درهم‌تنیدگی گرمایی مدل آیزینگ سه کیوبیتی برحسب درما و شدت برهم‌کنش D_z برای $C_{۱۲}$ حالت پاد متقارن و $C_{۱۳}$ حالت متقارن ۷۰

۳-۳) نمودار درهم‌تنیدگی گرمایی مدل XXX دو کیوبیتی برحسب دما و شدت برهم‌کنش D_z در برهم‌کنش فرومغناطیس و پاد فرومغناطیس..... ۷۳

۳-۴) نمودار درهم‌تنیدگی گرمایی مدل XXX سه کیوبیتی برحسب دما و شدت برهم‌کنش D_z برای $C_{۱۲}$ حالت پاد متقارن و $C_{۱۳}$ حالت متقارن ۷۷

۳-۵) نمودار درهم‌تنیدگی گرمایی مدل XXZ دو کیوبیتی برحسب دما و شدت برهم‌کنش D_z در برهم‌کنش فرومغناطیس و پاد فرومغناطیس..... ۸۰

۳-۶) نمودار درهم‌تنیدگی گرمایی مدل XXZ سه کیوبیتی برحسب دما و شدت برهم‌کنش D_z برای $C_{۱۲}$ حالت پاد متقارن و $C_{۱۳}$ حالت متقارن ۸۳

۴-۱) نمودار QD مدل آیزینگ دوکیوبیتی برحسب دما و $D_z = ۰.۵, ۰.۷, ۱$ ۹۳
۴-۲) مقدار کوانتوم دیسکورد نهایی مدل آیزینگ بر حسب مینیمم $QD_۱, QD_2$ ۹۳

۴-۳) نمودار QD مدل XXX دوکیوبیتی برحسب دما و $D_z = ۰.۵, ۰.۷, ۱$ ۹۵
۴-۴) مقدار کوانتوم دیسکورد نهایی مدل XXX بر حسب مینیمم $QD_۱, QD_2$ ۹۵

۴-۵) نمودار QD مدل XXZ دوکیوبیتی برحسب دما و شدت برهم‌کنش $D_z = ۰.۵, ۰.۷, ۱$ به‌ازای ضرایب جفت‌شدگی $J = ۱, J_z = ۰.۲$ ۹۷
۴-۶) مقدار کوانتوم دیسکورد نهایی مدل XXZ بر حسب مینیمم $QD_۱, QD_2$ ۹۷

چکیده

در این پایان نامه به بررسی موضوع درهم تنیدگی در سیستم زنجیره های اسپینی هایزنبرگ می پردازیم. اخیراً موضوع درهم تنیدگی و یا همبستگی خالص کوانتومی به عنوان منبعی با ارزش برای انجام تمامی پروتکلهای اطلاعات و محاسبات کوانتومی مانند فرا بردکوانتومی، کدگذاری چگال، الگوریتم های جستجو و غیره مورد مطالعه وسیعی قرار گرفته است.

برای سیستم های زنجیره ای هایزنبرگی ذرات با اسپین- $\frac{1}{2}$ فرمول بسته ای برای محاسبه میزان درهم تنیدگی به دست آمده است. در این پایان نامه ما نخست به معرفی مفهوم درهم تنیدگی می پردازیم و معیار توافق را که برای سنجش آن معرفی شده و مقبولیت یافته است تعریف می کنیم. سپس محاسبات خود را در مدل های زنجیره ای اسپینی هایزنبرگ دو و سه کیوبیتی معطوف کرده ایم.

در ابتدا زنجیره اسپینی هایزنبرگ متشکل از دو کیوبیت را با برهم کنش ژیالوشینسکی – موریا (DM) درنظرگرفته و درهم تنیدگی گرمایی بین هر دو جفت اسپینی را در مدل های آیزینگ، XXX و XXZ بدست آورده ایم و نشان داده ایم که درهم تنیدگی به دما و شدت برهم کنش DM و ضرایب جفت شدگی بین اسپین ها بستگی دارد و در مقدار مشخصی از دمای پایین و شدت برهم کنش DM به ماکزیمم مقدار خود می رسد. سپس به بررسی و محاسبه درهم تنیدگی مدل های ذکر شده سه کیوبیتی با برهم کنش DM پرداختیم. در ادامه ماتریس چگالی کاهش یافته متقارن ($\rho_{۱۳}$)وپادمتقارن ($\rho_{۱۲}$)را بین هر دو جفت اسپینی محاسبه نموده و رفتار درهم تنیدگی را برحسب تغییرات دما و شدت برهم کنش DM مورد بررسی قرار داده ایم.

در انتها معیار دیسکورد کوانتومی را به عنوان یکی از سنجه های همبستگی کوانتومی معرفی کرده و مقدار آن را برای سیستم زنجیره های اسپینی هایزنبرگ مدل های آیزینگ،XXX و XXZ دو کیوبیتی باشدت برهم کنش DM ، که فرم ماتریس چگالی آنها حالت X_State داشته محاسبه کرده ایم و تغییرات دیسکورد کوانتومی را برحسب شدت برهم کنش DM و دما بررسی کرده ایم و نشان داده ایم که در دما و شدت برهم کنش DM مشخصی مقدار دیسکوردکوانتومی به بیشینه مقدار خود می رسد.

واژه های کلیدی: درهم تنیدگی، زنجیره هایزنبرگ، **توافق** ، کیوبیت، دیسکورد کوانتومی

پیش گفتار

نظریه اطلاعات کوانتومی شاخه‌ای نوپا در مکانیک کوانتومی است که پیدایش آن به اوایل دهه ۱۹۹۰ برمی‌گردد و روند رو به رشد آن به سرعت در حال افزایش است. از این رو مطالعه درهم‌تنیدگی به‌عنوان شالوده‌ی این نظریه ازاهمیت خاصی برخوردار خواهد بود. درهم‌تنیدگی نوعی همبستگی قوی غیرموضعی است که ممکن است بین ذرات تشکیل دهنده‌ی یک سیستم کوانتومی در هردو مقیاس میکروسکوپی و ماکروسکوپی مشاهده شود. هرچند سیستم‌های کوانتومی محدود به سیستم‌های اسپینی با بعد پایین نشده و گستره‌ی وسیعی از سیستم‌ها را شامل می‌شوند، اما وجود همبستگی‌های قوی در اسپین‌های واقع در یک سیستم اسپینی بعد پایین از یک سو و به‌کارگیری آنها به‌عنوان مواد مناسبی در ذخیره‌ی اطلاعات کوانتومی از سویی دیگر انگیزه‌ی لازم به‌منظور مطالعه‌ی درهم‌تنیدگی در این سیستم‌ها را فراهم می‌کند. هدف این پایان‌نامه نیز در این راستا بوده و سعی شده است درهم‌تنیدگی یک زنجیره اسپین- $\frac{1}{2}$ هایزنبرگ به‌عنوان یک سیستم یک‌بعدی مورد مطالعه قرار گیرد. بدین منظور ما در فصل اول به معرفی مفهوم درهم‌تنیدگی پرداخته و معیاری را که برای سنجش آن معرفی شده و مقبولیت یافته است، تعریف می‌کنیم.

در این بین معیار توافق را برگزیده و محاسبات خود را در مدل‌های زنجیره‌ای اسپینی هایزنبرگ دو وسه کیوبیتی معطوف می‌کنیم.درفصل دوم به معرفی درهم‌تنیدگی گرمایی در زنجیره‌های اسپینی هایزنبرگ با شدت برهم کنش ژیالوشینسکی – موریا (DM) پرداختیم،وسپس در فصل سوم زنجیره‌ی اسپینی هایزنبرگ متشکل از دو کیوبیت را با شدت (DM) در دماهای پایین (۰.۱,۲) درنظر گرفته و درهم‌تنیدگی بین هر دو جفت اسپینی را در مدل‌های آیزینگ، XXX و XXZ بدست آورده‌ایم و

چگونگی رفتار درهم‌تنیدگی را برحسب تغییرات دما و شدت برهم‌کنش DM مورد بررسی قرار داده‌ایم و سپس به مطالعه درهم‌تنیدگی مدل‌های ذکر شده با سه کیوبیت درحضور شدت برهم‌کنش DM پرداخته‌ایم.در ادامه ماتریس چگالی کاهش یافته $\rho_{۱۳}$ حالت متقارن و $\rho_{۱۲}$ حالت پاد متقارن را بین هر دو جفت اسپینی محاسبه نموده‌ایم و رفتار درهم‌تنیدگی را برحسب تغییرات دما و شدت برهم‌کنش DM مورد بررسی قرار داده‌ایم. در فصل چهارم معیار دیسکورد کوانتومی را به‌عنوان یکی از سنجه‌های همبستگی کوانتومی معرفی کرده و مقدار آن را برای سیستم زنجیره‌های اسپینی هایزنبرگ مدل‌های آیزینگ، XXX و XXZ دو کیوبیتی با شدت برهم‌کنش DM ، که فرم ماتریس چگالی آن حالت X-$State$ داشته محاسبه کرده‌ایم و تغییرات دیسکورد کوانتومی را برحسب شدت برهم‌کنش DM و دما بررسی کرده‌ایم. جزئیات آنچه که در این پیشگفتار آمده در فصل‌های آینده با تفصیل بیشتر توضیح داده خواهد شد.

فصل اول: مفاهیم اولیه در تئوری محاسبات کوانتومی

۱-۱) کیوبیت[1]

بیت به‌عنوان مفهومی بنیادی در محاسبات و تئوری اطلاعات کلاسیکی شناخته شده است که حاوی اطلاعات دیجیتالی صفر و یک می‌باشد. با کد نمودن اطلاعات به زبان صفر و یک‌ها می‌توان زنجیره‌ای از صفر و یک جهت انتقال و پردازش اطلاعات بدست آورد. هر بیت کلاسیکی به‌جای اختیار کردن مقادیر صفر و یک می‌تواند پهنه‌ی بزرگتری از مقادیر را اختیار کند. به‌عنوان مثال اگر پردازش در مبنای سه صورت گیرد یک بیت می‌توان مقادیر صفر، یک و دو اختیار کند. یک بیت کوانتومی را کیوبیت می‌نامیم و در این قسمت خواص آن را مورد بررسی قرار داده و تفاوت آن رابا بیت‌های کلاسیکی مشخص می‌کنیم.

کیوبیت واحد بنیادی در سنجش اطلاعات کوانتومی درنظریه‌ی اطلاعات کوانتومی است که معادل بیت در نظریه‌ی اطلاعات کلاسیکی محسوب می‌شود. برخلاف بیت کلاسیکی که فقط یک متغیر مشخص (صفر یا یک) با مقادیر واقعی را ذخیره می‌کند، کیوبیت می‌تواند توسط یک بردار واحد در فضای برداری دوبعدی مختلط اندازه‌گیری شود. یک کیوبیت مقدار صفر یا یک و یا ترکیبی خطی از این دو را همزمان اختیار می‌کند. توانایی اختیار کردن ترکیب خطی ۰ و ۱ در کیوبیت‌ها پایه‌ی توانایی محاسبات کوانتومی می‌باشد. درواقع تفاوت اصلی بین کیوبیت‌ها و بیت‌های کلاسیکی در توانایی اختیار کردن ترکیب خطی ۰ و ۱ است. در مکانیک کوانتومی اطلاعات را به‌صورت $|0\rangle$ و $|1\rangle$

[1] Qubit

نمایش می‌دهیم که درواقع به‌زبان جبر خطی متناظر با بردارهای $\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$ می‌باشد. در حالت کلی یک کیوبیت باعبارت کلی زیر توصیف می‌شود:

$$|\psi\rangle = a|۰\rangle + \beta|۱\rangle \qquad (۱-۱)$$

که اعداد α و β اعداد مختلط دلخواه هستند. از مکانیک کوانتومی مقدماتی می‌دانیم، اگر حالت کوانتومی بالا را اندازه‌گیری نماییم، نتیجه‌ی حاصل با احتمال $|\alpha|^۲$ حالت $|۰\rangle$و با احتمال $|\beta|^۲$ حالت $|۱\rangle$می‌باشد. باتوجه به بقای احتمال تنها شرط موجود در روی ضرایب α و β به این صورت است که:

$$|\alpha|^۲ + |\beta|^۲ = ۱$$

کیوبیت‌ها را می‌توان به‌صورت مفاهیم ریاضی و یا مفهومی که توسط سیستم‌های فیزیکی پیاده‌سازی می‌شوند مورد بررسی قرارداد بررسی کیوبیت‌ها به عنوان مفاهیم ریاضی ما را قادر می‌سازد که مستقل از ابزار فیزیکی پیاده‌سازی تئوری خود را ساخته و آن را مورد بررسی قرار دهیم.

کیوبیت‌ها در دنیای واقعی وآزمایشگاه توسط سیستم‌های فیزیکی مختلف پیاده‌سازی می‌شوند. می‌دانیم که سیستم اسپینی $S = \frac{۱}{۲}$ دارای فضای هیلبرت دوبعدی است و در اکثر مواقع به‌عنوان یک کیوبیت به‌کار می‌رود، به‌طوری که گاهی اوقات این دو به‌جای یکدیگر استفاده می‌شوند. اما اسپین- $\frac{۱}{۲}$ تنها سیستمی نیست که می‌تواند مفهوم کیوبیت را داشته باشد. برخی از سطوح انرژی یون‌های به دام افتاده در میدان‌های الکتریکی به عنوان صفر و یک‌های کوانتومی استفاده کرده‌اند. برخی دیگر در پلاریزاسیون فوتون‌ها به دنبال کیوبیت‌ها گشته‌اند اما هنوز برخی دیگر، از اسپین‌های کوانتومی درون مولکول‌های کلروفرم و اسپین‌های الکترون درون نانوکریستال‌ها که به عنوان نقطه‌های کوانتومی شناخته می‌شوند، استفاده می‌کنند. منشاء کیوبیت‌ها هرچه که باشد، همیشه مشکل یکسانی به میان می‌آید، انجام محاسبات هنگام حفظ کردن در هم تنیدگی دشوار است. در این پایان‌نامه، ما بر روی سیستم‌های اسپینی متمرکز شده و منظورمان از یک کیوبیت همان سیستم اسپینی دوحالته $S = \frac{۱}{۲}$ است.

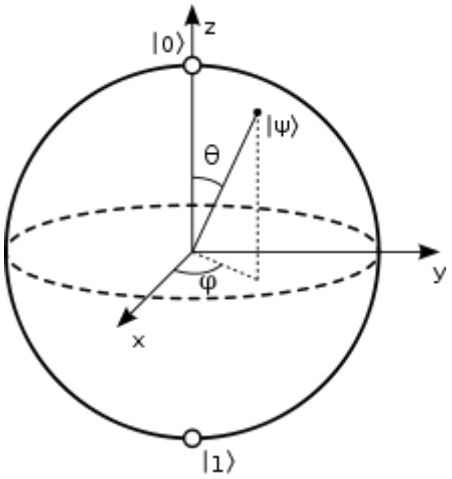
در حالت اتمی که کیوبیت‌ها بوسیله‌ی حالت الکترون‌ها توصیف می‌شوند، الکترون می‌تواند در حالت پایه و یا برانگیخته باشد که حالت پایه را با $|۰\rangle$و حالت برانگیخته آن را با $|۱\rangle$نشان می‌دهیم. با تابش نور توسط لیزر می‌توانیم الکترون را از حالت پایه $|۰\rangle$به حالت برانگیخته $|۱\rangle$منتقل نماییم و برعکس. مسأله هیجان انگیزتر آن است که اگر مدت تابش نور را کاهش دهیم، الکترونی که در ابتدا در حالت $|۰\rangle$ قرار دارد به حالت $|+\rangle = \frac{|۰\rangle+|۱\rangle}{\sqrt{۲}}$ می‌رود. یک تصویر مفید از کیوبیت‌ها از طریق بازنویسی حالت $|\psi\rangle$باتوجه به شرط $|\alpha|^۲ + |\beta|^۲ = ۱$ آن است که حالت یک کیوبیت دلخواه به صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma}\left(cos\frac{\theta}{۲}|۰\rangle + e^{i\phi}\, sin\frac{\theta}{۲}|۱\rangle\right) \qquad (۲\text{-}۱)$$

که θ و ϕ و γ اعداد حقیقی هستند. از مکانیک کوانتومی مقدماتی می‌دانیم که فاز γ هیچ اثر قابل مشاهده‌ای ندارد، لذا می‌توان از آن صرف‌نظر نماییم و حالت کوانتومی دلخواه را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$|\psi\rangle = cos\frac{\theta}{۲}|۰\rangle + e^{i\phi}\, sin\frac{\theta}{۲}|۱\rangle \qquad (۳\text{-}۱)$$

که $۰ \le \theta \le \pi$ و $۰ \le \phi \le ۲\pi$ درواقع زوایایی هستند که در یک کره‌ی ۳ بعدی با شعاع واحد قابل نمایش می‌باشد شکل(۱-۱). کره‌ی شکل (۱-۱) را کره بلاخ می‌نامیم که هر نقطه روی سطح آن توصیف کننده یک حالت منحصر به فرد کوانتومی است. استفاده از تصویر کره بلاخ معمولاً برای توصیف اعمال کوانتومی روی کیوبیت مفید است ولی نکته‌ی قابل توجه آن است که برای چند کیوبیت و یا بیت‌های کوانتومی با ابعاد بالاتر از دو، چنین تصویری قابل تعمیم نمی‌باشد.



شکل (۱-۱): هر نقطه، روی سطح کره‌ی بلاخ معادل یک حالت خاص و هر نقطه درون کره نمایش یک حالت مخلوط کوانتومی است.

باتوجه به این که روی سطح کره‌ی بلاخ بی‌نهایت نقطه وجود دارد لذا به‌نظر می‌رسد که یک کیوبیت برخلاف بیت‌های کلاسیکی که تنها دو مقدار صفر و یک را اختیار می‌کند قادر است بی نهایت مقدار گیرد و در نتیجه اطلاعات بسیار زیادی را ذخیره نماید که این درواقع مرتبط با مسأله اندازه‌گیری و بازیافت اطلاعات می‌باشد چرا که بدون اندازه‌گیری راهی برای استخراج اطلاعات از حالت کوانتومی وجود ندارد و از مکانیک کوانتوم می‌دانیم هرگاه یک کیوبیت را اندازه‌گیری نماییم تنها دو حالت $|۰\rangle$ و $|۱\rangle$ بدست می‌آید و پس از آن حالت کوانتومی اولیه در قالب یکی از این دو حالت فرو می‌پاشد. لذا برای تعیین دقیق بایدضرایب α و β را مشخص نمود.

برای حالتی که ۲ کیوبیت داریم همانند حالت کلاسیکی که حالت ۰۰، ۰۱، ۱۰، ۱۱ ممکن بود حالت‌های کوانتومی متناظر با $|۰۰\rangle$ ، $|۰۱\rangle$ ، $|۱۰\rangle$ و $|۱۱\rangle$ ممکن می‌باشد. یک جفت کیوبیت در حالت کلی ترکیب خطی از هر چهار حالت می‌باشد که به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$|\psi\rangle = a_{۰۰}|۰۰\rangle + a_{۰۱}|۰۱\rangle + a_{۱۰}|۱۰\rangle + a_{۱۱}|۱۱\rangle \qquad (۴-۱)$$

که هر یک از حالت‌های $(x = ۰۰, ۰۱, ۱۰, ۱۱)$ضرب تانسوری دو حالت تک کیوبیتی است. متناظر با حالت تک کیوبیت در این جا نیز درصورت اندازه گیری هر یک از حالت‌های $|x\rangle$ با احتمال $|a_x|^۲$ بدست می‌آیند و پس از آن حالت کوانتومی اولیه به حالت $|x\rangle$ فروپاشی می‌کند. در این جا نیز تنها شرط موجود روی ضرایب a_x بقای احتمال می‌باشد.

$$|a_{..}|^۲ + |a_{.۱}|^۲ + |a_{۱.}|^۲ + |a_{۱۱}|^۲ = ۱$$

می‌توانیم یکی از کیوبیت‌ها را اندازه‌گیری کنیم (مثلاً کیوبیت اول) که در این صورت حالت $|۰\rangle$ با احتمال $|a_{..}|^۲ + |a_{.۱}|^۲$ و حالت $|۱\rangle$با احتمال $|a_{۱.}|^۲ + |a_{۱۱}|^۲$ به‌دست می‌آیند. اگر کیوبیت اول در حالت $|۰\rangle$ بدست آید در این صورت حالت اولیه به حالت کوانتومی زیر فروپاشی می‌کند.

$$|\psi'\rangle = \frac{a_{..}|۰۰\rangle + a_{.۱}|۰۱\rangle}{\sqrt{|a_{..}|^۲ + |a_{.۱}|^۲}}$$

که عبارت $\sqrt{|a_{..}|^۲ + |a_{.۱}|^۲}$ ضریب نرمالیزاسیون حالت نهایی است. به‌عنوان مثالی از حالت‌های دو کیوبیتی به حالت‌های بل[۲] اشاره می‌کنیم که کاربرد فراوانی در الگوریتم‌های کوانتومی نظیر فرا برد کوانتومی و کدگذاری چگال دارند. این حالت‌ها عبارتند از:

$$\begin{aligned} |\phi_{\pm}\rangle &= \frac{|۰۰\rangle \pm |۱۱\rangle}{\sqrt{۲}} \\ |\psi_{\pm}\rangle &= \frac{|۰۱\rangle \pm |۱۰\rangle}{\sqrt{۲}} \end{aligned} \qquad (۵\text{-}۱)$$

در حالت کلی ترکیب سیستم با n کیوبیت با ترکیب خطی حالت‌های $|x_۱, x_۲, \cdots, x_n\rangle$، $x_i \in \{۰,۱\}$ توصیف می‌شود که مقدار آن ۲^n می‌باشد و هریک از این حالت‌های پایه به‌صورت ضرب تانسوری n حالت تک کیوبیتی است.

$$|x_۱, x_۲, \cdots, x_n\rangle = \bigotimes_{i=۱}^{N} |x_i\rangle$$

[۲] Bell State

۱-۲) عملگر چگالی[۳]

هرگاه یک سیستم فیزیکی به‌طور دقیق و مشخص با یک حالت کوانتومی $|\psi\rangle$ به‌طور کامل توصیف شود، حالت کوانتومی مربوطه را یک حالت خالص می‌گوییم. اگرآنسامبلی از سیستم‌های فیزیکی یکسان با حالت‌های کوانتومی مختلف داشته باشیم بطوری که $P_۱$ درصد از ذرات با حالت $|\psi_۱\rangle$ و $P_۲$ درصد از ذرات با حالت $|\psi_۲\rangle$ و همین‌طور تا P_n درصد از ذرات با حالت $|\psi_n\rangle$توصیف شوند. در این حالت اگر ذره‌ای‌از این آنسامبل را جدا کنیم حالت آن را نمی‌توان با یک حالت کوانتومی یکتا توصیف نمود. برای توصیف حالت کوانتومی این ذره از ماتریس چگالی استفاده می‌کنیم.

در مکانیک کوانتومی عملگر چگالی را در حالت کلی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم [۱۴]:

$$\rho = \sum_i p_i \left|\psi^{(i)}\right\rangle\left\langle\psi^{(i)}\right| \qquad (۶-۱)$$

به‌طوری که $|\psi^{(i)}\rangle$ها ویژه کت‌های کسری از اعضای آنسامبل باتابع احتمال کلاسیکی P_i هستند و ممکن است بر یکدیگر متعامد نباشند. همچنین داریم $\sum_{i=۱}^{n} P_i = ۱$ در حالتی که بیش از یکی از احتمال‌های P_i غیرصفر باشد حالت را مخلوط می‌نامیم.

خصوصیات کلی عملگر چگالی به‌صورت زیر می‌باشد:

۱) ماتریس چگالی هرمیتی می‌باشد $\rho^{+} = \rho$

۲) $\mathrm{tr}(\rho) = ۱$ یا بعبارتی در شرط بهنجارش صدق می‌کند.

۳) ماتریس چگالی همواره مثبت است $\langle\phi|\rho|\phi\rangle \geq ۰$ ، $\forall|\phi\rangle$

ماتریس چگالی را می‌توان در پایه ویژه بردارهای خودش نیز نوشت در این صورت ماتریس چگالی برابر است با:

$$\rho = \sum_{i=۱}^{N} \lambda_i \left|a^{(i)}\right\rangle\left\langle a^{(i)}\right|$$

$|a^{(i)}\rangle$ویژه بردارها و λ_i ویژه مقادیر ماتریس چگالی بوده و تعداد آنها برابر با بعد ماتریس چگالی، N، یا بعد فضای هیلبرت می‌باشد. توجه به این نکته جالب است که ماتریس چگالی شامل دو نوع

[۳] Density oprator