دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی – آنالیز عددی

موضوع:

حل تقریبی تحلیلی معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری خطی و غیر خطی

نگارش:

معصومه سرو جهانی

استاد راهنما:

دکتر عظیم امین عطائی

مهر ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

اظهار نامه دانشجو

موضوع پایان‌نامه: حل تقریبی تحلیلی برای معادلات دیفرانسیل کسری

استاد راهنما: دکتر عظیم امین عطائی

نام دانشجو: معصومه سرو جهانی

شماره دانشجویی:

اینجانب معصومه سرو جهانی دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان‌نامه توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تأیید می‌باشد و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است.

همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه آئین‌نامه مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضاء دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

۱–حق چاپ و تکثیر این پایان‌نامه متعلق به نویسنده آن می‌باشد. هرگونه کپی برداری به صورت کل پایان نامه یا بخشی از آن تنها با موافقت نویسنده یا کتابخانه دانشکده علوم پایه دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی مجاز می‌باشد.

۲–کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی می‌باشد و بدون اجازه کتبی دانشگاه به شخص ثالث قابل واگذاری نیست.

همچنین استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

تشکر و قدردانی

با حمد و سپاس بیکران به درگاه پروردگار کریم که این لطف را شامل اینجانب نمود تا در تحصیل دانش، هر چند اندک گام بردارم.

در اینجا فرصت را مغتنم شمرده و از کلیه معلمین و اساتید خود در دوران تحصیل به خصوص از استاد ارجمندم، جناب آقای دکتر عظیم امین‌عطائی برای زحمات بی‌دریغشان سپاسگزارم. همچنین از پدر و مادر عزیزم که مشوق اصلی من در تمامی مراحل تحصیل بوده‌اند، تشکر می‌نمایم.

چکیده

محاسبات کسری در چند سال اخیر بازتاب خوبی در علوم و مهندسی داشته است و کارهای قابل ملاحظه‌ای در زمینه کاربردها و حل عددی معادلات شامل مشتق کسری انجام شده است. از جمله این معادلات، معادلات دیفرانسیل جزئی از مرتبه کسری می باشد که در شاخه‌های مکانیک، زیست شناسی، فیزیک و غیره دارای کاربردهای زیادی می‌باشد.

روش های متفاوتی برای حل FDE ها معرفی شده از جمله روش تبدیل لاپلاس عمومی، روش تکراری، روش تبدیل فوریه و غیره می‌باشد.

در این پایان نامه ما گروهی از FDEهای غیر خطی و خطی را بر پایه مشتق کسری کاپوتو[1] بررسی خواهیم کرد و به کمک روش تجزیه آدومیان[2] جواب تقریبی و تحلیلی برای این نوع معادلات ارائه خواهیم داد.

این جواب برای معادلات خطی دقیق و برای معادلات غیر خطی تقریبی از جواب دقیق را برای معادله مد نظر بدست می‌دهد. در نهایت چند مثال برای معادلات خطی و غیر خطی با استفاده از همین روش حل شده است.

کلمات کلیدی: روش تجزیه – معادلات دیفرانسیل از مرتبه مشتق کسری (FDE)[3] – مشتق کسری کاپوتو – چندجمله‌ای‌های آدومیان – روش تجزیه آدومیان – مشتق کسری ریمان – لیوویل[4] – فضای تابعی C_2، $C_2^{(m)}$، $C_{-1}^{(m)}$، C_{-1}^1 و C_{-1} – اپراتور (عملگر) انتگرال ریمان – لیوویل از مرتبه μ(J^μ) – تابع گاما Γ.

[1] $Caputo$

[2] $Adomian$

[3] معادلات دیفرانسیل از مرتبه مشتق کسری

[4] $Reimann - Liouvile$

مقدمه

در پایان نامه حاضر از روش تجزیه آدومیان برای حل معادلات دیفرانسیل کسری استفاده شده است. در حل این معادلات با استفاده از روش تجزیه آدومیان جواب بصورت جملاتی از سری همگرا قابل محاسبه می‌باشد. این پایان نامه در ۵ فصل به شرح زیر تنظیم شده است.

در فصل اول به ارائه برخی مفاهیم اولیه و تعاریف مورد نیاز برای فصل های آتی می‌پردازیم.

در فصل دوم به ارائه توضیح مختصری در مورد تاریخچه پیدایش محاسبات کسری و انواع خاصی از مشتق و انتگرال کسری می‌پردازیم. فصل سوم به ارائه توصیف روش تجزیه آدومیان و آنالیز همگرایی آن می‌پردازد. در فصل چهارم کاربرد این روش را برای معادلات خطی و همچنین غیر خطی در مثال هایی ارائه می‌دهد و در فصل پنجم به ارائه روش تجزیه آدومیان اصلاح شده برای مسائل دیفرانسیل مرتبه دوم با شرایط مرزی نیومن می‌پردازیم.

به نام یگانه‌ی هستی

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم اولیه و تعاریف

۱.۱ فضاهای توپولوژیک

۱.۱.۱ فضای باناخ

تعریف ۱.۱.۱ مجموعه X همراه با عمل جمع برداری تعریف شده از $X \times X$ به X به صورت $(x,y) \to x+y$ و عمل ضرب اسکالر تعریف شده از $F \times X$ به X به صورت $(\alpha,x) \to \alpha x$ که در شرایط زیر صدق کند را فضای خطی یا فضای برداری روی میدان F گویند.

برای هر $x,y,z \in X$ و $\alpha,\beta \in F$ داریم:

۱) $(x+y)+z = x+(y+z)$

۲) $x+y = y+x$

۳) بردار صفر در X وجود دارد که $x+0=x$

۴)برای هر $x \in X$ عنصر $-x \in X$ وجود دارد به نام معکوس جمعی از X که $x+(-x)=0$

۵) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

۶) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

۷) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

۸) $1.x = x$

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید N یک فضای خطی حقیقی یا مختلط باشد نرم روی N تابعی است بصورت $||.|| : N \to R$ که برای هر $x, y \in N$ و $\alpha \in C(orR)$ داریم:

۱) $||x|| \geq 0 \quad , \quad ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

۲) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

۳) $||\alpha x|| = |\alpha| \, ||x||$

فضای خطی با نرم $||.||$ تعریف شده روی آن را فضای خطی نرم‌دار گویند.

تعریف ۳.۱.۱ فضای خطی نرم‌دار N را کامل گوییم اگر هر دنباله کوشی در N همگرا به عنصری در N باشد یعنی اگر $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in N$ و $||x_m - x_n|| \to 0$ چنانچه $m, n \to \infty$ که $m > n$ آنگاه $x \in N$ وجود دارد که $||x_n - x|| \to 0$ هرگاه $n \to \infty$.

با توجه به تعریف فوق یک فضای خطی نرم‌دار کامل را فضای باناخ می‌گوییم.

به عنوان مثال فضای همه توابع پیوسته بر روی بازه $[a, b]$ که با $C[a, b]$ نمایش داده می‌شود نسبت به نرم ماکسیمم زیر یک فضای باناخ می‌باشد.

$$||f-g||_{\infty} = \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|$$

۲.۱.۱ فضای هیلبرت

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید X فضای خطی بر میدان مختلط $\mathbb{C}$ باشد. ضرب داخلی روی X تابعی است از $X \times X$ به $\mathbb{C}$ که در شرایط زیر صدق می‌کند.

برای هر $x, y, z \in X$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ داریم:

۱) $(\alpha x + \beta y\,, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$

۲) $\overline{(x, y)} = (y, x)$

۳) $(x, x) \geq 0, \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

فضای ضرب داخلی مختلط روی X یک فضای خطی بر $C(R)$ با ضرب داخلی تعریف شده روی آن می‌باشد.

تعریف ۵.۱.۱ فضای ضرب داخلی را کامل گوییم هر گاه هر دنباله کوشی در آن فضا با متریک ایجاد شده توسط ضرب داخلی به عنصری در آن فضا همگرا باشد.

با توجه به تعاریف فوق فضای ضرب داخلی کامل را فضای هیلبرت گوییم.

به عنوان مثال $L^2[a, b]$ یک فضای هیلبرت است که در آن ضرب داخلی بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$(u, v) = \int_a^b w(x)|u(x)v(x)|\, dx$$

در تعریف فوق $w(x) > 0$ تابع وزن نامیده می‌شود.

۳.۱.۱ فضاهای توابع پیوسته و مشتق پذیر پیوسته

۱) فضای توابع m بار مشتق پذیر پیوسته

فضای همه توابع m بار مشتق پذیر پیوسته روی بازه حقیقی $[0,\infty)$ که $m \in N_0 = \{0,1,2,...\}$ می‌باشد، را با $C^m[0,\infty)$ و نرم زیر نمایش می‌دهیم که $(m \in N_0)$

$$||f||_{c^m} = \sum_{k=0}^{m} \max_{x\in[0,\infty)} |f^{(k)}(x)|$$

۲)فضای $C[0,\infty)$

فضای همه توابع پیوسته f روی بازه حقیقی $[0,\infty)$ را با نماد $C[0,\infty)$ و نرم زیر تعریف می‌کنیم.

$$||f||_c = \max_{x\in[0,\infty)} |f(x)|$$

۳) فضای $C_\mu[0,\infty)$

تابع حقیقی مقدار $f(x)$ به فضای $c_\mu[0,\infty)$ تعلق دارد اگر عدد حقیقی $p(>\mu)$ وجود داشته باشد بطوریکه $x^p f(x) \in C[0,\infty)$ باشد که $\mu \geq -1$ می‌باشد.

۴) فضای $C_\mu^m[0,\infty)$

برای $m \in N$ فضای $C_\mu^m[0,\infty)$ را فضای باناخ توابع $f(x)$ که مشتق پذیر روی $[0,\infty)$ تا مرتبه $m-1$ می‌باشد، تعریف می‌کنیم و مشتق $f^{(m)}(x)$ از مرتبه m به $C_\mu[0,\infty)$ تعلق دارد. به عبارت دیگر $f^{(m)}(x) \in C_\mu[0,\infty)$.

۲.۱ معرفی برخی مفاهیم مقدماتی

۱.۲.۱ تابعی

هر نگاشت از مجموعه‌ای از توابع به $\mathbb{R}$ را تابعی گوییم.

تابعی نوعی تابع می‌باشد که متغیر مستقل آن خود یک تابع است. به عنوان مثال نگاشت J از فضای $C[a,b]$ به R با رابطه زیر یک تابعی می‌باشد.

$$J(y) = \int_a^b f(x,y,y')\,dx,$$

که در آن $x \in [a,b]$ و $y(x) \in C[a,b]$.

۲.۲.۱ تئوری تغییراتی

این تئوری در محاسبه ماکسیمم یا مینیمم تابع ها به کار می‌رود و بصورت زیر بیان می‌شود.

بدست آوردن تابعی که تحت آن تابع مورد نظر ماکسیمم یا مینیمم می‌شود.

۳.۲.۱ تابع گاما و بتا

الف) تابع گاما

تابع گاما را که با نماد Γ نمایش داده می‌شود به ازای عدد حقیقی α بصورت زیر تعریف می‌نماییم.

$$\Gamma(\alpha)=\int_{0}^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt,$$

و دارای خواص زیر می باشد:

۱) $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$

۲) $\Gamma(\alpha+n)=\Gamma(\alpha)\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)$

۳) $\Gamma(mz)=\frac{2^{mz-1}}{(2\pi)^{(m-1)/2}}\prod_{k=0}^{m-1}\Gamma(z+\frac{k}{m}),\ (z\in C),(m\in N-\{1\})$

۴) $\Gamma(n+1/2)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\pi^{1/2},\quad (2n-1)!!=1\times 3...\times(2n-1),\ n\in N$

۵) $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{sin(\pi z)},\quad 0<z<1$

٦) $\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)...(z+n-1)},\quad n\in N,\quad z>-n,\quad z\notin Z_0^-:=\{0,-1,-2,....\}$

ب)تابع بتا

یکی از توابعی که در محاسبات کسری از آن استفاده زیادی می‌شود تابع بتا می‌باشد که بصورت

زیر تعریف می‌شود.

$$\beta(p,q)=\int_0^1 (1-t)^{p-1}t^{q-1}\,dt, \quad p,q>0.$$

برخی از خواص این تابع بصورت زیر می‌باشد.

۱) $\beta(p,q)=\beta(q,p)$

۲) $\beta(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

۳) $\beta(p,q)\sim\sqrt{2\pi}\frac{p^{p-1/2}q^{q-1/2}}{(p+q)^{p+q-1/2}}$

۴) $\beta(p,q+1)=\frac{q}{p+q}\beta(p,q)$

۵) $\beta(p,q)=\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt=2\int_0^{\pi/2}(sint)^{2p-1}(cost)^{2q-1}\,dt, \quad p,q>0$

۴.۲.۱ تابع انقباض

تعریف ۱.۲.۱ تابع $Q:X\to X$ (X یک فضای متریک است) را انقباض گوییم هر گاه $0\leq c<1$ موجود باشد بطوریکه داشته باشیم

$$d(Q(x),Q(y))\leq cd(x,y) \quad \forall x,y\in X.$$

فصل ۲

محاسبات کسری

۱.۲ مقدمه

تاریخچه محاسبات کسری به عنوان حساب معمولی به سه قرن پیش باز می‌گردد لیکن در میان جامعه مهندسی و علوم متداول نبوده است. برای به تصویر کشیدن کاربرد این موضوع و در دسترس قرار دادن آن برای جامعه مهندسی و علوم رایج، بعدی دیگر برای درک یا توصیف اصلی با شیوه‌ای بهتر اضافه می‌گردد. شاید حساب کسری چیزی است که طبیعت از عهده آن برآید و روش گفتگو با طبیعت باشد. لذا گفتگو با این زبان، موثر و کار آمد است. بحث و مطالعه در مورد این موضوع طی سه قرن گذشته در میان ریاضی دانان رایج بوده و تنها در چند سال اخیر این مطلب به چندین زمینه از علوم، مهندسی و اقتصاد راه یافته است. در هر حال، اخیراً تلاشی صورت گرفته تا مشتق کسری به صورت اپراتوری موضعی و خاص برای تئوری علم فرکتال تعریف گردد.

۱.۱.۲ پیدایش محاسبات کسری

سوال اصلی که باعث پیدایش محاسبات کسری شد این بود که آیا مفهوم مشتق مرتبه صحیح $\frac{d^n y}{dx^n}$ می‌تواند به مراتب کسری بسط داده شود؟ سوال بعدی آنست که آیا n می تواند هر عدد کسری، مختلط یا اصم باشد؟ چون سوال دوم به طور مثبت جواب داده شد اسم محاسبات کسری یک اسم غلط و بی مسمی شد و به اسم بهتر مشتق و انتگرال کسری تغییر یافت. لایب نیتز[۱] نماد $\frac{d^n y}{dx^n}$ را ارائه داد و شاید آن یک بازی ساده با نماها بود که سریعاً در تاریخ ۳۰ سپتامبر ۱۶۹۵ هوپیتال[۲] نامه‌ای به لایب نیتز نوشت و از او پرسید که اگر $n = 1/2$ باشد چه می‌شود؟ لایب نیتز پاسخ داد : جناب آقای هوپیتال همانطور که می‌توانید از روی آن مشاهده کنید حتی یک سری نامتناهی را می توان با کمیت هایی نظیر $d^{1/2}\overline{xy}$ یا $d^{1;2}\overline{xy}$ بیان کرد. اگر چه سری‌های نامتناهی و هندسی روابط مجزایی هستند. سری‌های نامتناهی از توانهای مثبت و منفی صحیح می‌توانند استفاده کنند و هنوز استفاده از توانهای کسری را نمی‌دانیم بعداً در نامه ای مشابه، لایب‌نیتز مبتنی بر پیشگویی های قبل نوشت که: لذا در ادامه داریم که $d^{1/2}x$ هم ارز است با $x\sqrt{dx : x}$. این یک تناقض آشکار است که روزی نتایج مفیدی از آن بدست خواهد آمد. در این کلمات بود که محاسبات کسری متولد شد. مطالعات انجام شده طی ۳۰۰ سال اخیر دست کم نیمی صحت خود را به اثبات رسانده است، و در قرن بیستم کاربردهای ویژه‌ای یافت شدند.

۲.۱.۲ محاسبات کسری تعمیمی از محاسبات مرتبه صحیح

n را یک عدد صحیح در نظر بگیرید. هنگامی که می‌گوییم x^n سریع در ذهن تجسم می کنید که x، n بار در خودش ضرب می شود. حال آنکه اگر n صحیح نباشد، نمی‌توانیم تصور کنیم وضعیت x را زمانی که به توان عدد غیر صحیح می‌رسد. به عنوان مثال، تصور کردن 2^π سخت است یعنی نمی‌دانیم

---

[۱] Liebniz

[۲] L.Hopital