بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش کاربردی

روش آشفتگی هوموتوپی برای حل معادلات با مشتقات جزئی و مقایسه ی آن با بعضی روش های عددی

از

سمیه تمدنی

استاد راهنما: دکتر جعفر بی آزار

۱۳۸۹

تقدیم به

پدرومادرمهربانم

و

همسرعزیزم

فهرست مطالب

فهرست جدول ها

فهرست شکل ها

چکیده

روش آشفتگی هوموتوپی برای حل معادلات با مشتقات جزئی و مقایسه ی آن با بعضی روش های عددی

سمیه تمدنی

در این پایان نامه روش آشفتگی هوموتوپی را برای حل معادلات با مشتقات جزئی مورد استفاده قرار می گیرد و نتایج به دست آمده از این روش با برخی روش های عددی مانند روش مشخصه و روش تفاضلات متناهی صریح مقایسه می شود. این مقایسه برتری روش آشفتگی هوموتوپی نسبت به سایر روش های عددی را نشان می دهد.

کلید واژه : روش آشفتگی هوموتوپی ، معادلات با مشتقات جزئی، روش های عددی

Abstract

Homotopy perturbation method for partial differential equations and comparing with some numerical method.

Somayeh Tamadoni

In this dissertation applies homotopy perturbation method for solving partial differential equation and results of using this method comparing with some numerical methods such as characteristics method and finite difference methods.

Key word : Homotopy perturbation method , partial differential equations.

Numerical method .

فصل اول

تعاریف ومقدمات اولیه

۱-۱ مقدمه

۳۰۰ سال است که آنالیز تواناترین شاخه ریاضیات بوده و مبحث معادلات دیفرانسیل بخشی عمده آن است. بدیهی است که هیچ چیز به جز تغییر، دایمی نیست و هدف اولیه معادلات دیفرانسیل آن است که وسیله ای برای مطالعه تغییرات جهان مادی باشد در نتیجه بسیاری از قوانین عمومی در طبیعت (فیزیک، شیمی،زیست شناسی،و نجوم) طبیعی ترین بیان خود را به صورت معادلات دیفرانسیل می یابند.کاربردهای معادلات دیفرانسیل همچنین در خود ریاضیات ، خصوصا در هندسه و در مهندسی ، اقتصاد و بسیاری از زمینه های دیگر علوم کار بسته فراوان اند. دلیل این کارایی گسترده معادلات دیفرانسیل به آسانی قابل درک است. بنابراین حل این دسته از معادلات از اهمیت به سزائی برخودار است.

۱-۲ معادلات دیفرانسیل معمولی و جزیی

هر رابطه بین یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل را معادله دیفرانسیل می نامند.

معادله دیفرانسیل معمولی[1] یا عادی معادله ای است که تنها یک متغیر مستقل در آن وجود داشته باشد، بنابر این تمام مشتقات موجود در آن مشتقات معمولی هستند مانند

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2) y = 0.$$

که در آن y متغیر وابسته و x متغیر مستقل است. p نیز یک ثابت است.

اما معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی[2] ، معادله ای است که مشتمل بر بیش از یک متغیر مستقل باشد، بنابر این مشتقات موجود در آن ، مشتقات جزئی هستند. به عنوان مثال هر گاه $u = f(x, y, z, t)$ تابعی از زمان t، ومکان x ،y ،و z باشد. معادلات زیرتعدادی معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم را ارائه می کند.

[1] Ordinary Differential Equation
[2] Partial Differential Equation

معادله لاپلاس [۱]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\circ,$$

معادله انتقال حرارت [۲]

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t},$$

معادله موج [۳]

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

هر کدام از این معادلات در فیزیک نظری اهمیت زیادی دارد. معادلات دیفرانسیل جزئی عموما در مسائل مشتمل بر میدانهای الکتریکی، دینامیک سیالات، پخش، و حرکت موجی پیش می آید.

به طور کلی می توان این طور بیان کرد، مثلا برای یک تابع مجهول u وابسته به دو متغیر مستقل x, y، معادله دیفرانسیل جزئی متناهی به شکل زیر است.

$$F(x, y, u, u_x, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \ldots)=\circ. \qquad (۱-۱)$$

که در آن

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x},\ u_y=\frac{\partial u}{\partial x},\ u_{xx}=\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲},\ u_{yy}=\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲},\ u_{xy}=\frac{\partial^۲ u}{\partial x\,\partial y},\cdots$$

۱-۲-۱ تعریف

بالاترین مرتبه مشتق در معادله (۱-۱)، را مرتبه معادله دیفرانسیل جزئی می گویند. همچنین درجه بالاترین مشتق موجود در معادله(۱-۱)، درجه آن معادله به حساب می آید. به عنوان مثال معادلات لاپلاس، حرارت و موج در بالا از مرتبه دو و درجه یک هستندو یا معادله تعریف شده در زیر معادله ای از مرتبه سه و درجه ۱ است.

معادله بنجامین-بنا-ماهونی [۴]

$$u_t+u_x+u\,u_x-u_{xxt}=\circ.$$

[1] Laplace Equation
[2] Heat Equation
[3] Wave Equation
[4] Benjamin-Bona-Mahony Equation

۱-۲-۲ تعریف

صورت کلی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جرئی مرتبه دوم همگن به شکل زیراست.

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}=\circ.$$

هرگاه درجه هرجمله درآن، نسبت به تابع و مشتقات آن،یک باشدآنگاه معادله خطی می باشد.

یا

هرگاه ضرایب تابع و هریک از مشتقات آن مقادیر ثابت و یا توابعی از x و y باشند آنگاه معادله دیفرانسیل از نوع خطی می باشد. مثلاً

$$A(x,y)u_{xx}+B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}=\circ.$$

معادله دیفرانسیل خطی است.

اگرضرایب علاوه بر x و y ،به u و $\frac{\partial u}{\partial x}$، $\frac{\partial u}{\partial y}$،بستگی داشته باشد معادله راشبه خطی گویند و درصورتی که ضرایب به $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$، $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ ویا $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ بستگی داشته باشدمعادله غیرخطی است.

۱-۲-۳ تعریف

اگر هر جمله معادله دیفرانسیل جزئی شامل متغیر وابسته یا یکی از مشتقات آن باشد آنگاه آن معادله همگن است در غیر این صورت نا همگن محسوب می شود.

معادله کلین-گوردن[۱] $۱)\ u_{tt}-u_{xx}+u^{۲}=x^{۲}\cos^{۲}t-x\cos t.$

معادله دیم[۲] $2)\ u_{t}=u^{۳}u_{xxx}.$

معادله اول از مرتبه دوم، درجه اول و غیر خطی و ناهمگن است و معادله دوم از مرتبه سوم، درجه اول و غیر خطی و همگن می باشد.

[1] klein-Gordon Equation
[2] Dym Equation

۱-۳ شرایط اولیه و مرزی برای معادله ی دیفرانسیل جزئی

شرایط اولیه و مرزی، شرایطی هستند که به ما در پیدا کردن جواب معادله دیفرانسیل جزئی کمک می کنند، این شرایط معمولا در تمام یا قسمتی از ناحیه ای که ما جواب را درآن جستجو می کنیم، بیان خواهد شد.واضح است که شرایط مرزی تابع مجهول، یا مشتق های آن را در نواحی مرزی تعیین شده توصیف می کند و شرایط اولیه، تابع مجهول را در سراسر ناحیه مفروض در زمان آغازی معین می کند.

به عنوان مثال این معادله را در نظر می گیریم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \circ, \qquad \circ \le x \le L, \quad t \ge \circ.$$

شرایط اولیه این معادله به صورت زیر است

$$u(x,\circ) = \frac{\sin(۲x)}{۴}, \qquad \circ \le x \le L.$$

و شرایط مرزی عبارت است از

$$\begin{cases} u(\circ, t) = \circ, \\ u(L, t) = b, \qquad\qquad t > \circ, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\circ, t) = \dfrac{\sinh(2t)}{2}. \end{cases}$$

۱-۴ دسته بندی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم با دو متغیر مستقل

این نوع معادلات را در حالت کلی به صورت زیر می نویسند

$$a\,\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + b\,\frac{\partial^۲ u}{\partial x\,\partial y} + c\,\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = w\,. \qquad (۲-۱)$$

که در آن w و c و b و a توابعی بر حسب x، y، u، $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ هستند. [۲,۱]

فرض می کنیم

$$\frac{\partial u}{\partial x}=p,\frac{\partial u}{\partial y}=q,\frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}}=r,\frac{\partial^{2} u}{\partial x\partial y}=s,\frac{\partial^{2} u}{\partial y^{2}}=t.$$

آنگاه معادله (۱-۲) به صورت زیر در می آید

$$a\,r+b\,s+c\,t=w. \tag{۳-۱}$$

اینک برای معادله (۱-۳) منحنی مشخصه و معادله دیفرانسیل مشخصه را تعریف می کنیم.

۱-۴-۱ تعریف

منحنی مشخصه منحنی هائی هستند که روی آنها بالاترین مرتبه مشتق که در اینجا مشتق های مرتبه دوم rو sو t هستند به صورت یکتا معین نیستند.

۱-۴-۲ تعریف

معادله دیفرانسیل مشخصه معادله ای است که منحنی مشخصه جواب های آن هستند. دیفرانسیل تابع u،نسبت به x و y به صورت زیر است.

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

دیفرانسیل های p,q عبارتند از

$$dp=\frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}}dx+\frac{\partial^{2} u}{\partial x\partial y}dy,\Rightarrow\quad dp=rdx+sdy, \tag{۴-۱}$$

$$dq=\frac{\partial^{2} u}{\partial x\partial y}dx+\frac{\partial^{2} u}{\partial y^{2}}dy,\Rightarrow\quad dq=sdx+tdy. \tag{۵-۱}$$

حال سه معادله (۱-۳)، (۱-۴)،و (۱-۵)را می توان به صورت یک دستگاه نوشت.

$$\begin{cases} ar + bs + ct = w, \\ (dx)r + (dy)s = dp, \\ (dx)s + (dy)t = dq. \end{cases}$$

r، t،و s مجهول های این دستگاه هستند. برای وجود جواب یکتا، باید دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ dx & dy & \circ \\ \circ & dx & dy \end{vmatrix} \neq \circ. \qquad (۶-۱)$$

طبق تعریف، منحنی های مشخصه، منحنی هایی هستندکه درآنهااین دستگاه جواب ندارد.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ dx & dy & \circ \\ \circ & dx & dy \end{vmatrix} = \circ. \qquad (۷-۱)$$

از (۱-۷) معادله دیفرانسیل زیر به دست می آید.

$$a(dy)^2 - b(dx\,dy) + c(dx)^2 = \circ. \qquad (۸-۱)$$

با تقسیم طرفین رابطه (۱-۸) بر $(dx)^۲$داریم

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - b\left(\frac{dy}{dx}\right) + c = \circ. \qquad (۹-۱)$$

معادله نهایی معادله مشخصه (۱-۲) است که ریشه های آن شیب های منحنی های مشخصه هستند از طرفی منحنی های مشخصه جوابی برای معادله فوق هستند.

معادله(۱-۹)،یک معادله درجه دوم بر حسب $\frac{dy}{dx}$است و برای آن می توان سه حالت زیر را در نظر گرفت.

الف) اگر $\Delta = b^2 - 4ac > \circ$، آن گاه معادله دارای دو ریشه حقیقی و متمایز است و دو منحنی مشخصه متمایز حقیقی دارد و معادله هذلولوی نامیده می شود.

ب) اگر $\Delta = b^2 - 4ac = \circ$، آن گاه معادله یک منحنی مشخصه حقیقی دارد و معادله سهموی نامیده می شود.

ج) اگر $\Delta = b^2 - 4ac < \circ$، آن گاه معادله دو ریشه مختلط متمایز دارد و دارای دو منحنی مشخصه مختلط متمایز است یعنی در واقع منحنی مشخصه حقیقی ندارد این معادله از نوع بیضوی است.

۱-۴-۳ مثال $$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = ۴u .$$

$a = 1 \ , b = \circ, \ c = 1 \Rightarrow \quad \Delta = b^2 - 4ac = -4 < \circ.$ معادله از نوع بیضوی است

۱-۴-۴مثال $$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \circ .$$

معادله از نوع سهموی است $a = -\frac{1}{2} \ , b = \circ \ , c = \circ. \quad \Rightarrow \quad \Delta = b^2 - 4ac = \circ.$

۱-۴-۵ مثال $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \circ .$$

معادله از نوع هذلولوی $a = 1 \ , b = \circ \ , c = -4x^2 \Rightarrow \quad \Delta = b^2 - 4ac = 16x^2 > \circ.$

است

فصل دوم

روش آشفتگی هوموتوپی

۲-۱ : مقدمه

۲-۲ : معرفی روش آشفتگی هوموتوپی

۲-۳ : روش آشفتگي هوموتوپي براي حل معادلات با مشتقات جزئی

۲-۴ : حل چند معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی توسط روش آشفتگی هوموتوپی

۲-۱ مقدمه

ایده اصلی روش آشفتگی هوموتوپی توسط خی[1]در سال ۱۹۹۸ ارائه شد. او ابتدا این روش را برای حل معادلات مربوطه به نواسانگرهای غیر خطی[2] گسسته[۳]، معادلات غیر خطی موج[3][۴] ،یک مساله مقدار مرزی خاص[۵]،و مسایل دیگری از این معادلات به کار برد. این روش حالت خاصی از روش آنالیز هوموتوپی است ، که جواب معادله به صورت یک سری توانی نامتناهی در نظر گرفته می شودکه معمولا به جواب واقعی معادله همگرا است. این روش مسائل خطی و غیر خطی را به مسائل ساده تر تبدیل می کند. به عنوان مثال برای معادله برگر[۶]،و معادلات انتگرال ولترای نوع دوم[۷]،و معادلات غیر خطی در انتقال حرارت[4]، و دیگر معادلات[۸-۱۰] ،به کار رفته است.

۲-۲ معرفی روش آشفتگی هوموتوپی

برای درک بهتر این روش معادله دیفرانسیل غیر خطی زیر را در نظر می گیریم.

$$A(u)-f(r)=\circ, \qquad \mathrm{r}\in\Omega, \tag{۲-۱}$$

با شرایط مرزی زیر

$$B\left(u,\frac{\partial u}{\partial n}\right)=\circ, \qquad \mathrm{r}\in\Gamma. \tag{۲-۲}$$

که در آن A یک عملگر دیفرانسیل عمومی و B از کلمه Boundary گرفته شده، یک عملگر مرزی است همچنین $\frac{\partial u}{\partial n}$، بردار عمود بر منحنی مرز و $f(r)$ ،یک تابع تحلیلی معلوم، و Γ مرز دامنه Ωاست.حال اگر A به دو قسمت L (خطی) و N (غیر خطی) تجزیه شود معادله (۲-۱)، به صورت زیر نوشته خواهد شد.

$$L(u)+N(u)-f(r)=\circ, \qquad \mathrm{r}\in\Omega, \tag{۲-۳}$$

توسط روش هوموتوپی یک هوموتوپی به صورت $v(r,p):\ \Omega\times[0,1]\to R$ می سازیم که در رابطه ی زیر صدق کند.

---

1 He
2 Nonlinear oscillator
3 Nonlinear wave equation
4 Nonlinear heat equation

$$H(v,p)=(1-p)\left(L(v)-L(u_\circ)\right)+p\left(A(v)-f(r)\right)=\circ, \tag{۲-۴}$$

یا

$$H(v,p)=L(v)-L(u_\circ)+pL(u_\circ)+p\left(N(v)-f(r)\right)=\circ. \tag{۲-۵}$$

در روابط بالا $p\in[0,1]$ ، و $u_\circ$ تقریب اولیه برای جواب معادله (۲-۱) است که در شرایط مرزی صدق می کند. در روش آشفتگی هوموتوپی یک پارامتر p در معادله جانشین می شود که از صفر تا یک تغییر می کند به این صورت که اگر $p=0$ آن گاه ما با یک معادله خطی رو به رو خواهیم بود و اگر $p=1$ همان معادله ی اصلی را خواهیم داشت. در واقع وقتی p از ۰ تا ۱ افزایش می یابد آن گاه $L(v)-L(u_\circ)=0$ را به $A(v)-f(r)=0$ تبدیل می کند، این ایده اصلی روش آشفتگی هوموتوپی است که به طور پیوسته یک مسئله مشکل را به یک مسئله ساده تبدیل می کند.

از معادلات (۲-۴) ،و (۲-۵) داریم.

$$H(v,\circ)=L(v)-L(u_\circ)=\circ, \tag{۲-۶}$$

و

$$H(v,1)=A(v)-f(r)=\circ. \tag{۲-۷}$$

فرض کنید که جواب معادله (۲-۱)، را به عنوان یک سری توانی نسبت به p بنویسیم.

$$v=v_\circ+pv_1+p^2v_2+p^3v_3+\ldots \tag{۲-۸}$$

این جواب را درمعادله آشفته (۲-۵)،قرارمی دهیم ضرایب جملات باتوانهای یکسان p ،درطرفین معادله رابرابرهم قرارمی دهیم،به یک دستگاه ازمعادلات می رسیم با حل این دستگاه ضرایب رابطه(۲-۸)،به دست می آید.در صورتی که رابطه (۲-۸)، به ازای $p=1$ ،همگرا باشد جواب معادله (۲-۱)، به صورت زیر خواهد بود.

$$u=\lim_{p\to 0}v=v_\circ+v_1+v_2+\ldots \tag{۲-۹}$$

۲-۳ روش آشفتگی هوموتوپی برای حل معادلات با مشتقات جزئی

معادله دیفرانسیل جزئی شبه خطی زیر را با تعاریف اولیه داده شده در نظر بگیرید.