دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی گرایش آنالیز

جبرهای سگال عملگری در جبرهای فوریه

استاد راهنما:

دکتر علی رجالی

پژوهشگر:

محسن عزیزی قهفرخی

آبان ماه ۱۳۹۱

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه اصفهان است.

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز آقای محسن عزیزی

تحت عنوان:

جبرهای سگال عملگری در جبرهای فوریه

در تاریخ ۹۱/۶/۲۷ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه خوب به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر علی رجالی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۲- استاد داور داخل گروه	دکتر فاطمه ابطحی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۳- استاد داور خارج گروه	دکتر سیما سلطانی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

چکیده

در فصل دوم جبرسگال عملگری، دوگان $S^1A(G)$، نگاشتهای میانگین گیری و تحدید و در پایان میانگین پذیری (ضعیف) $S^1A(G)$ مطالعه می شود.

رابطه بین فضای مشتقات و ضربگرها و توصیف آنها در فصل دوم بررسی شده است.

فصل پایانی شامل مباحثی پیرامون وجود تقریب های همانی برای ایده آلهای $L^1(G)$ (یا در حالت کلی هر جبرسگال) روی یک گروه فشرده G است.

کلمات کلیدی: جبر سگال، میانگین پذیری، مشتق، تقریب همانی، میانگین پذیری ضعیف

فهرست مطالب

عنوان ....صفحه

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱ اگر R یک حلقه باشد. یک $R-$ مدول (چپ)، گروهی آبلی جمعی مانند A همراه با تابعی مانند $r : R \times A \to A$ است، به طوری که برای هر $r, s \in R$ و $a, b \in A$

۱) $r(a+b) = ra + rb$،

۲) $(r+s)a = ra + sa$،

۳) $r(sa) = (rs)a$

هرگاه R دارای واحد ۱_R بوده و برای هر $a \in A$، داشته باشیم $۱_R a = a$، آن گاه A را یک $R-$ مدول یکانی گویند.

یک $R-$ مدول راست به طور مشابه تعریف می شود.

A یک $R-$ دومدول ($R-$ مدول دوطرفه) است، اگر هم یک $R-$ مدول چپ وهم یک $R-$ مدول راست باشد همچنین برای هر $a \in A, r \in R$ داشته باشیم $ar = ra$.

تعریف ۲.۱ رابطه ای مانند $\leq$ را یک ترتیب جزئی بر یک مجموعه A گویند، هرگاه در شرایط زیر صادق باشد:

۱) برای هر α، $\alpha \leq \alpha$،

۲) اگر $\alpha \leq \beta$، $\beta \leq \alpha$، آن‌گاه $\alpha = \beta$،

۳) اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \gamma$، آن‌گاه $\alpha \leq \gamma$

تعریف ۳.۱ یک مجموعه جهت‌دار مانند J مجموعه ایست با یک ترتیب جزئی، مانند $\leq$ به طوری که برای هر زوج α, β از اعضای J، عضوی مانند γ از J موجود باشد با این خاصیت که $\alpha, \beta \leq \gamma$.

تعریف ۴.۱ یک توپولوژی در مجموعه X، گردایه ای مانند Γ از زیر مجموعه‌های X است که درشرایط زیر صدق می کند:

۱) ϕ و X به Γ متعلق اند،

۲) اجتماع هرزیرگردایه Γ متعلق به Γ است،

۳) اشتراک هر زیر گردایه متناهی Γ متعلق به Γ است.

مجموعه X را که برای آن توپولوژیی مانند Γ مشخص شده است، فضای توپولوژیک می نامند.

تعریف ۵.۱ هرگاه $U \in \Gamma$، آن‌گاه زیرمجموعه U از فضای توپولوژیک (X, Γ) را یک مجموعه باز گویند.
همچنین مجموعه‌ای بسته است که متمم آن باز باشد.

نکته ۶.۱ یک مجموعه باز شامل یک نقطه را یک همسایگی آن نقطه گویند.

تعریف ۷.۱ در فضای توپولوژیک (X, Γ) اگر تمام زیرمجموعه‌های X عضو Γ باشند، آن‌گاه گویند، X توپولوژی گسسته دارد.

تعریف ۸.۱ فرض کنید X یک مجموعه باشد، یک پایه‌ی توپولوژیکی در X گردایه ایست از زیرمجموعه‌های X (موسوم به اعضای پایه) مانند $\mathfrak{B}$ هرگاه:

۱) برای هر $x \in X$، $B \in \mathfrak{B}$ وجوددارد، به‌طوری‌که $x \in B$،

۲) برای هر $x \in B_1 \cap B_2$، $B_3 \in \mathfrak{B}$ وجود دارد، به‌طوری‌که $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

اگر $\mathfrak{B}$ پایه توپولوژیکی در X باشد، آن‌گاه ، توپولوژی تولید شده بوسیله $\mathfrak{B}$ چنین تعریف می‌شود:

زیر مجموعه U در X را باز گوییم، هرگاه برای هر $x \in U$، $B \in \mathfrak{B}$ وجود داشته‌باشد، به‌طوری‌که $x \in B \subset U$.

تعریف ۹.۱ فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. یک تور در X تابعی مانند f از یک مجموعه جهت‌دار مانند J بتوی X می‌باشد. اگر $\alpha \in J$، به‌طور معمول، $f(\alpha)$ را با x_α نشان می دهند. تور f را با نماد $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ نمایش می دهند.

تور (x_α) را همگرا به نقطه x از X گویند(وچنین می نویسیم$x_\alpha \to x$) هرگاه به ازای هر همسایگی U از x، $\alpha \in J$ موجود باشد به‌طوری‌که اگر $\alpha \leq \beta$، آن‌گاه $x_\beta \in U$.

اگر $J = Z_+$ ، آن‌گاه مفهوم تور بر دنباله منطبق است. زیر مجموعه K از J را همپایان در J گویند، اگر برای هر $\alpha \in K$ یک $\beta \in J$ موجود باشد به‌طوری‌که $\alpha \leq \beta$.

تعریف ۱۰.۱ فرض کنید $f : J \to X$ توری در X باشد و $x_\alpha = f(\alpha)$. اگر K مجموعه‌ای جهت‌دار باشد و $g : K \to J$ تابعی باشد که

۱) اگر $i \leq j$، آن‌گاه $g(i) \leq g(j)$،

۲) $g(K)$ در J همپایان باشد.

آن‌گاه تابع $fog : K \to X$ را یک زیر تور (x_α) گویند.

تعریف ۱۱.۱ فرض کنید X,Y دو فضای توپولوژیک باشند. تابع $f : X \to Y$ را پیوسته گویند، هرگاه برای هر زیر مجموعه باز Y مانند V مجموعه $f^{-1}(V)$ در X باز باشد، به قسمی که $f^{-1}(V) = \{x \in X \ni f(x) \in V\}$.

تعریف ۱۲.۱ فرض کنید $f_n : X \to Y$ دنباله‌ای از فضای متریک X به فضای متری Y و d متریکی برای Y باشد. دنباله (f_n) رابه طور یکنواخت همگرا به تابع $f : X \to Y$ گویند، درصورتی که برای هر $\varepsilon > 0$ مفروض، عددصحیح N موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $n \geq N$ و هر $x \in X$، $d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$.

تعریف ۱۳.۱ هرگاه p,q اعداد حقیقی مثبتی باشندکه $p+q=pq$ یا به‌طور معادل $1/p + 1/q = 1$ ، آن‌گاه p,q را نماهای مزدوج می نامند.

تعریف ۱۴.۱ فضای برداری مختلط X را یک فضای خطی نرمدار گویند، اگر برای هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم x چنان مربوط باشد که

۱) برای هر $x,y \in X$، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$،

۲) برای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$،

۳) $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$،

۴) (نامساوی مثلثی) اگر $x,y,z \in X$ ، $\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$.

اگر همه شرایط به جز (۳)برقرار باشد به $\|.\|$ یک نیم نرم گفته می شود.

تعریف ۱۵.۱ یک فضای متریک، مجموعه ایست مانند X که در آن یک تابع فاصله (یامتر) مانند d با ویژگی‌های زیر تعریف شده است:

۱) برای هر x, y در X، $0 \leq d(x,y) \leq \infty$،

۲) $d(x,y) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y$،

۳) برای هر x, y در X، $d(x,y) = d(y,x)$،

۴) برای هر x, y, z در X، $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

نکته ۱.۱۶ هر فضای نرمدار را با تعریف $d(x,y) := \|x - y\|$، می‌توان به یک فضای متریک تبدیل کرد.

تعریف ۱.۱۷ هر فضای باناخ، یک فضای خطی نرمدار است که بامتر تعریف شده بوسیله نرمش کامل باشد.

تعریف ۱.۱۸ فضای برداری مختلط H را یک فضای ضرب داخلی گویند، هرگاه به هر زوج مرتب از بردارهای x, y در H یک عدد مختلط مانند $< x, y >$ (به نام حاصلضرب داخلی x, y) چنان مربوط شده باشد که قواعد زیر برقرار باشند:

۱) $\overline{< x, y >} = < y, x >$ (علامت بار نشانگر مزدوج مختلط است.)،

۲) برای هر x, y, z در H، $< x + y, z > = < x, z > + < y, z >$،

۳) برای هر x, y در H واسکالر α داریم $< \alpha x, y > = \alpha < x, y >$،

۴) برای هر $x \in H$ داشته باشیم $< x, x > \geq 0$،

۵) $< x, x > = 0$ اگر و تنهااگر $x = 0$.

نکته ۱.۱۹ یک فضای ضرب داخلی را با تعریف $\|x\| := \sqrt{< x, x >}$ می‌توان به یک فضای نرمدار و لذا متریک تبدیل کرد.

تعریف ۲۰.۱ هرگاه فضای ضرب داخلی H با متر حاصل از آن کامل باشد، آن را یک فضای هیلبرت می‌نامند.

تعریف ۲۱.۱ چنانچه S یک مجموعه دلخواه باشد، یک دنباله در S تابعی است در مجموعه اعداد طبیعی که بردش در S باشد .درحالت خاص، یک دنباله در $\mathbb{R}^p$ تابعی است که دامنه اش اعداد طبیعی و برد آن $\mathbb{R}^p$ باشد. اگر $X = (x_n)$ دنباله‌ای در $\mathbb{R}^p$ باشد، عنصر از $\mathbb{R}^p$ حد X است اگر و فقط اگر برای هر $\varepsilon > 0$ عددی طبیعی مانند $K(\varepsilon)$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $n \geq K(\varepsilon)$ داشته باشیم $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

تعریف ۲۲.۱ دنباله $X = (x_n)$ را یک دنباله کوشی در $\mathbb{R}^p$ گویند، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ عددی طبیعی مانند $M(\varepsilon)$ موجود باشد به طوری که برای هر $m, n \geq M(\varepsilon)$ داشته باشیم $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

تعریف ۲۳.۱ فضای متریک X راکامل گویند، هرگاه هر دنباله کوشی در این فضا همگرا به یک عنصر فضا باشد.

تعریف ۲۴.۱ مجموعه $E \subset X$ رافشرده گوییم، هرگاه هر پوشش باز E شامل زیر پوششی متناهی باشد. به طور صریح، هرگاه $\{V_\alpha\}$ گردایه ای از مجموعه‌های باز باشد که اجتماعشان شامل E است، آن‌گاه یک زیر گردایه متناهی $\{V_\alpha\}$ وجود داشته باشد که شامل E باشد. بویژه اگر خود X فشرده باشد، آن‌گاه X را یک فضای فشرده گویند.

تعریف ۲۵.۱ در یک فضای توپولوژیک X برای $E \subset X$ بست E، $(\overline{E})$ را کوچکترین مجموعه بسته در X شامل E تعریف می‌کنند.

X را فشرده موضعی گویند، هرگاه هر نقطه‌اش یک همسایگی با بست فشرده داشته باشد.

نکته ۲۶.۱ هر فضای فشرده،فشرده موضعی است.

تعریف ۲۷.۱ گردایه Γ از زیر مجموعه‌های مجموعه X را یک سیگماجبر در X می‌نامند، اگر Γ دارای ویژگی‌های زیر باشد:

۱) $X \in \Gamma$،

۲) هرگاه $A \in \Gamma$، آن‌گاه A^c نیز عضو Γ باشد،

۳) هرگاه $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $A_n \in \Gamma$ ، آن‌گاه $A \in G$.

تعریف ۲۸.۱ هرگاه Γ یک سیگماجبر در X باشد، آن‌گاه X را یک فضای اندازه پذیر واعضای Γ را مجموعه های اندازه پذیر در X می‌نامند.
فرض کنید X یک فضای اندازه پذیر وY یک فضای توپولوژیک وf نگاشتی از X به توی Y باشد، دراین‌صورت اگر به ازای هر مجموعه باز V درY، $f^{-1}(V)$ یک مجموعه اندازه‌پذیر در X باشد، آن‌گاه گویند f اندازه پذیر است .

تعریف ۲۹.۱ هرگاه X یک فضای توپولوژیک باشد، کوچکترین سیگما جبر در X که هر مجموعه باز در X (عناصر توپولوژی) متعلق به آن باشد را، مجموعه‌های بورل X می‌نامند.
هرگاه Y و X فضاهای توپولوژیک باشند دراینصورت اگر تصویر وارون هر باز در Y یک مجموعه بورل باشد، آن‌گاه گویند $f: X \to Y$ یک تابع اندازه‌پذیر بورل است.

نکته ۳۰.۱ سیگماجبر مذکور همان اشتراک تمام سیگماجبرهای X و شامل توپولوژی است.

تعریف ۳۱.۱ یک اندازه مثبت، تابعی مانند μ است که بر سیگماجبری مانند Γ تعریف شده است، بردش در $[0,\infty]$ است و جمعی شمارش پذیر است، به این معنا که هرگاه $\{A_i\}$ گردایه‌ای شمارا و از هم جدا از عناصر Γ باشند، آن‌گاه $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \Sigma_{i=1}^{\infty}\mu\{A_i\}$.
هر فضای اندازه، یک فضای اندازه پذیر است که یک اندازه مثبت تعریف شده برسیگماجبر مجموعه‌های اندازه پذیر خود داشته باشد.

تعریف ۳۲.۱ فرض کنیم P خاصیتی باشد که یک نقطه مانند x می تواند داشته باشد. اگر (X,Γ,μ) یک فضای اندازه باشد و $E\subset X$، گویند، خاصیت P تقریبا همه جا $(\mu-a.e)$ بر E برقرار است، هرگاه $\mu(N)=0$، که N مجموعه عناصری ازمجموعه Eاست که خاصیت P را ندارند.

تعریف ۳۳.۱ اگر $0<p<\infty$ و G یک گروه و λ یک اندازه هار چپ باشد آن‌گاه تعریف می کنند:

$$L^p(G):=\{f:G\to\mathbb{C}\quad : \text{اندازه پذیر است}\ -\lambda،f, \|f\|_p=(\int\limits_G |f|^p d\lambda)^{1/p}<\infty\}$$

$$.L^\infty(G):=\{f:G\to\mathbb{C}\quad :\|f\|_\infty=inf\{\alpha:f(x)\leq\alpha\quad(\lambda-a.e)\}<\infty\}$$

تعریف ۳۴.۱ تابع مختلط مقدار f بر فضای هاسدورف و فشرده موضعی X،
در بی نهایت، صفراست، هرگاه برای هر $\varepsilon>0$ مجموعه فشرده $K\subset X$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که برای هر $x\in K$، $|f(x)|\leq\varepsilon$.
رده اینگونه توابع را با $C_0(X)$ نشان می دهند.

تعریف ۳۵.۱ هرگاه $f \in L^1(\mathbb{R}, m)$ (m اندازه لبگ بر $\mathbb{R}$ است)، آن‌گاه نگاشت $f \to \hat{f}$ را تبدیل فوریه f گویند، که در آن $\hat{f}$ به صورت زیر است:

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-inx}dm(x) \quad (t \in \mathbb{R})$$

تعریف ۳۶.۱ هر جبرمختلط یک فضای برداری مانند A روی میدان مختلط است به‌طوری‌که در آن یک ضرب شرکت‌پذیر و پخش‌پذیر تعریف شده است، یعنی برای هر $x, y, z \in A$ ،

$$x(yz) = (xy)z \quad , (x+y)z = xz + yz \quad , x(y+z) = xy + xz \qquad (۱)$$

و با ضرب اسکالر چنان مربوط شده باشد به‌طوری‌که برای هر $x, y \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$،

$$\alpha(xy) = x(\alpha y) = (\alpha x)y \qquad (۲)$$

هرگاه یک نرم در A موجود باشد که A را به یک فضای خطی نرمدار تبدیل کرده و در نامساوی ضربی

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \quad (x, y \in A) \qquad (۳)$$

صدق کند، آن‌گاه A یک جبر مختلط نرمدار است .

اگر علاوه بر این، A یک فضای متری کامل نسبت به این نرم باشد، یعنی A یک فضای باناخ باشد، آن‌گاه A را یک جبر باناخ می‌نامند.

تعریف ۳۷.۱ اگر X یک فضای نرمدار خطی باشد، دوگان فضای X را بصورت زیر تعریف می‌کنند:

$X^* = \{f : X \to \mathbb{C} :$ خطی وپیوسته‌است. $f\}$

X^*، همراه با جمع و ضرب اسکالر تابعک‌های خطی، مجددا یک فضای نرمدار خطی (باناخ) است.

تعریف ۳۸.۱ فرض کنید $(G,.)$ یک گروه و (G,Γ) یک فضای توپولوژیک و شرایط زیر نیز برقرار باشد:

۱) نگاشت حاصلضرب $(x,y) \mapsto x.y$ از $G \times G$ به G پیوسته باشد. ($G \times G$ توپولوژی حاصلضربی دارد.)،

۲) نگاشت وارون $x \mapsto x^{-1}$ از G به G پیوسته باشد،

آن‌گاه G را یک **گروه توپولوژیک** گویند.

تعریف ۳۹.۱ $\mathcal{B}$ را یک پایه همسایگی‌های e (عنصر همانی گروه توپولوژیک) گویند، هرگاه برای هر همسایگی V از e، یک عنصر مانند A از $\mathcal{B}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $A \subset V$.

تعریف ۴۰.۱ اگر G یک گروه باشد. تابع $f : G \to \mathbb{C}$ پیوسته یکنواخت چپ است، اگربرای هر $\varepsilon > 0$، $U = nb(e)$ (همسایگی e) وجود داشته باشد به‌طوری‌که $(xy^{-1} \in U) \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

رده تمام توابع پیوسته یکنواخت چپ را با $LUC(G)$ نمایش می دهند.

تعریف ۴۱.۱ یک تابعک خطی $\Lambda : Hom(L^\infty, R)$، یک میانگین است، اگر $\|\Lambda\| = 1$ و Λ مثبت باشد. به این معنی که اگر $f \geq 0$، آنگاه $\Lambda(f) \geq 0$.

میانگین Λ، پایای چپ است، اگربرای هر $f \in L^\infty(G)$ و $g \in G$ داشته باشیم:

$$\Lambda(g.f) = \Lambda(f)$$

بطوریکه: $g.f(x) := f(g^{-1}x)$.

گروه‌موضعا فشرده وهاسدورف G میانگین پذیر است اگر یک میانگین پایای چپ داشته باشد.

تعریف ۴۲.۱ اگر A یک جبر باناخ وE یک A دو مدول باناخ باشد.یک نگاشت خطی کراندار $D : A \to E$ یک مشتق است اگر

$$D(ab) = aD(b) + D(a)b \quad (a, b \in A)$$

تعریف ۴۳.۱ اگر A یک جبرباناخ باشد، گویند e_α یک تقریب همانی A است، اگر برای هر $a \in A$،

$e_\alpha a \to a$ و $ae_\alpha \to a$

این تقریب را کراندار گویند، هرگاه یک $M \geq 0$ موجود باشد به‌طوری‌که $\|e_\alpha\| \leq M$

اگرA یک جبرنرمدار وX یک Aمدول باناخ باشد، یک تقریب همانی کراندار در A برای X یک تور کراندار $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ در A است به طوری که برای هر $x \in X$ داشته باشیم:$e_\lambda x \to x$.

تعریف ۴۴.۱ گروه دوگان G را بصورت زیر تعریف می کنند:

$\widehat{G} = \{f : G \to \prod : \text{ضربی است } f\}$

که منظور از $\prod$ گروه دایره یکه و منظور از ضربی بودن، رابطه زیر است :

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad (x, y \in G)$$

تعریف ۴۵.۱ اگر I یک انتگرال هار چپ باشد و $\circ \neq f \in C^{+}_{\circ\circ}(G)$، تابع پیمانه ای[۱] $\Delta : G \to R$ به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\Delta(x) = \frac{I(f_{x^{-۱}})}{I(f)}$$

تعریف ۴۶.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. یک نگاشت از A به A به صورت $a \mapsto a^*$ را یک برگشت گویند، اگر ویژگی‌های زیر برای هر a در A برقرار باشد:

۱) $(a^*)^* = a$

۲) $(ab)^* = b^*a^*$

۳) $(\alpha a + b)^* = \bar{\alpha}a^* + b^*$

یک C^*-جبر، یک جبر باناخ مانند A همراه با یک برگشت است به‌طوری‌که برای هر a در A داشته باشیم $||a^*a|| = ||a^۲||$

تعریف ۴۷.۱ یک نگاشت آفین از K به K (که K یک زیر مجموعه محدب فشرده ناتهی از یک فضای محدب موضعی X است) یک نگاشت پیوسته $T : K \to K$ است طوری‌که برای هر $y_۱, y_۲, ..., y_n \in K$ و هر $\alpha_۱, \alpha_۲, ...\alpha_n$ طوری‌که $\Sigma_{i=۱}^{n} \alpha_i = ۱$ داشته باشیم $T(\Sigma_{i=۱}^{n}(\alpha_i x_i)) = \Sigma_{i=۱}^{n} \alpha_i T(x_i)$

تعریف ۴۸.۱ اگر X و Y فضاهای باناخ باشند، یک عملگر $T \in B(X,Y)$ فشرده ضعیف است، اگر بستار $T(ball(X))$ فشرده ضعیف باشد.

[۱] unimodular function