دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

میانگین پذیری ضعیف تقریبی جبرهای سگال مجرد

توسط

سامره بابایی

استاد راهنما

دکتر فریدون حبیبیان دهکردی

استاد مشاور

دکتر محمود بیدخام

دی ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

قدردانی

سپاس بیکران به درگاه لایزال الهی که مهربان ترین یاور است.

حق بزرگی که استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر حبیبیان بر گردن من دارند، عظیم تر از آن است که با الفاظ و کلمات قابل گفتن باشد. ولی این کمترین کاری است که از من بر می آید؛ پس با تمام وجود سپاسگزاری نموده و به نشان ادب، دستان پرمهرشان را می بوسم.

بر خود لازم می بینم از استاد مشاور جناب آقای دکتر بیدخام به پاس زحمات ارزشمندشان تشکر وقدردانی نمایم.

همچنین از اساتید محترم داور جناب آقای دکتر سامع و جناب آقای دکتر اسحاقی تشکر و قدردانی می‌نمایم.

با سپاس فراوان ازپدر ومادر عزیزم ، پدر ومادربزرگوار همسرم، خواهرم سمیرا و برادرم ناصر و تمامی کسانی که در این دوران همراه و یاور من بودند. سربلندی و موفقیت ایشان را از خداوند منان خواستارم.

سامره بابایی

تقدیم به :

پسر عزیزم سینا

که وجودش شادی بخش وصفایش مایه آرامش من و همسرم که سهم بزرگی در پیشرفتم داشته است .

تـقـدیـم بـه خـانـواده خـودم و هـمـسـرم کـه هـمـواره مـشـوق مـن در کـسـب عـلـم و دانـش بودند.

چکیده

در این پایان نامه میانگین پذیری ضعیف تقریبی جبرهای سگال مجرد و کاربرد های آن برای گروه های فشرده ارائه خواهد شد و نشان داده می شود که مساله باز بیان شده توسط قهرمانی ولائو در این زمینه جواب منفی دارد . همچنین رابطه بین $m-$ میانگین پذیری ضعیف تقریبی و $n-$ میانگین پذیری ضعیف تقریبی برای $m,n \in \mathbb{N}$ متمایز بررسی می گردد ، سپس $(2n+1)-$ میانگین پذیری ضعیف تقریبی ازگسترش مدولی جبر های باناخ شرح داده شده و در نهایت به بیان یک مثال از جبر باناخی که $1-$ میانگین پذیر ضعیف تقریبی است اما $3-$ میانگین پذیر ضعیف تقریبی نیست ، پرداخته می شود .

واژگان کلیدی : میانگین پذیری ، جبر سگال ، $n-$ میانگین پذیری ضعیف تقریبی ، گسترش مدولی جبرهای باناخ .

مقدمه

آنالیز هارمونیک به بررسی گروه های فشرده موضعی مانند G و جبرهای باناخ مختلف متناظر با آن ها مانند جبر گروهی $L^1(G)$ می پردازد. به موضوع میانگین پذیری جبرهای باناخ از سال ۱۹۷۰ به بعد توجه بسیاری شده است. اگر G یک گروه فشرده موضعی باشد قضیه مشهوری موسوم به جانسون [۱] بیان می کند که جبر پیچشی $L^1(G)$ میانگین پذیر است اگر و تنها اگر G یک گروه میانگین پذیر باشد.

در سال ۲۰۰۵ میانگین پذیری ضعیف تقریبی جبر های سگال توسط قهرمانی ولائو[۲] ارائه شد . آنها همچنین این مساله باز را مطرح کردند که« آیا جبرسگال متقارن روی یک گروه میانگین پذیر ، میانگین پذیر تقریبی است ؟ » . در این پایان نامه نشان می دهیم که اگر G یک گروه آبلی ، فشرده ونامتناهی باشد ، آنگاه جبر های سگال متقارن $A(G)$ و $L^2(G)$ میانگین پذیر تقریبی نیستند که این یک پاسخ منفی به مساله باز ارائه شده در فوق است . همچنین نشان داده می شود ، اگر G یک گروه فشرده باشد ، آنگاه برای زیر جبر سگال مجرد $L^\infty(G)$ از $L^1(G)$ میانگین پذیری ضعیف تقریبی و میانگین پذیری ضعیف با متناهی بودن G معادلند که این موضوع نیز تناقضی با تذکر ۴.۳ ارائه شده توسط قهرمانی ولائو در [۹] است . در واقع اگر G یک گروه فشرده نامتناهی باشد ، آنگاه $L^\infty(G)$ یک زیر جبر سگال مجرد از جبر باناخ میانگین پذیر $L^1(G)$ است که میانگین پذیر ضعیف تقریبی نیست .

در سال ۲۰۰۸ چویی[۳] ، قهرمانی و ژانگ[۴] در [۲] نتیجه جالبی بدست آوردند که جواب مساله ارائه شده توسط جانسون در[۱۵] بود ، یعنی برای هر گروه فشرده موضعی G جبر گروهی $L^1(G)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $n-$ میانگین پذیر ضعیف است .

این پایان نامه برگرفته از مقاله های سامع‌از مرجع [۲۰] ونجفی ویزدان پناه ازمرجع [۱۶] است .

فصل های این پایان نامه به شرح زیر ارائه گردیده‌است :

در فصل اول ، مفاهیم ونماد های اولیه‌مطرح وسعی شده است که تنها مواردی که در فصول بعدی نیاز است مورد بررسی و مطالعه قرار گیرد . از آوردن برهان ها در حد امکان خودداری شده وفرض براین است که خواننده اطلاعات کافی در این زمینه را دارد .

---

۱ $B.\ E.\ Johnson$

۲ $F.\ Ghahramani\ and\ A.\ T-M.\ Lau$

۳ $Y.\ Choi$

۴ $Y.\ Zhang$

در فصل دوم ، به میانگین پذیری ضعیف تقریبی جبر های سگال مجرد می پردازیم . اکثرمطالب این فصل برگرفته از[۳],[۹],[۱۰],[۱۳],[۱۴],[۱۸] و [۲۰] است .

در فصل سوم ، کاربرد مطالب فصل دوم در جبر های پیچشی روی گروه های فشرده مورد بحث قرار می گیرد که مطالب این فصل برگرفته از[۵],[۹],[۱۰],[۱۱],[۱۴] و [۲۰] است .

در فصل چهارم ، $n-$ میانگین پذیری ضعیف تقریبی جبر های باناخ را مورد بررسی قرار خواهیم داد، که شامل سه بخش می باشد. در بخش اول تعاریف و قضایای مربوط به $n-$ میانگین پذیری ضعیف تقریبی جبر های باناخ را بیان و اثبات می کنیم. در بخش دوم $(۲n+۱)-$ میانگین پذیری ضعیف تقریبی روی $A \oplus X$ را مورد بررسی قرار می دهیم. در نهایت ، به بیان یک مثال نقض می‌پردازیم . بیشتر مطالب این فصل برگرفته از[۱],[۴],[۱۵],[۱۶],[۲۱] است .

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل با تعاریف و قضایای مورد نیاز آشنا خواهیم شد. این فصل شامل سه بخش می باشد که در بخش اول جبرهای باناخ و مدول ها و در بخش دوم مشتق ها ومیانگین پذیری جبر های باناخ و مطالب مربوط به آن ها معرفی گردیده اند . در بخش سوم نمایش های یکانی از گروه های فشرده بیان شده اند.

۱.۱ جبرها و مدول های باناخ

تعریف ۱.۱.۱ یک جبر مختلط ، یک فضای برداری A همراه با یک ضرب روی A با خواص زیراست :

الف) برای هر $x, y, z \in A$ ، $(x+y)z = xz + yz$, $x(yz) = (xy)z$, $x(y+z) = xy + xz$.

ب) برای هر $x, y \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha(xy) = (\alpha x)y$.

تعریف ۲.۱.۱ جبر A روی میدان $\mathbb{C}$ رایک جبر نرمدار گوییم ، هرگاه A به عنوان یک فضای برداری نرمدار با نرم $||.||$ در شرط زیر صدق کند :

$$||xy|| \leq ||x|| \; ||y|| \qquad (x, y \in A) \;\; .$$

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید X یک فضای برداری و τ یک توپولوژی روی X باشد. X را یک فضای برداری توپولوژیکی $(T.V.S)$ گوییم، هر گاه

الف) تک نقطه ای ها بسته باشند.

ب) اعمال فضای برداری پیوسته باشد.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید X یک $T.V.S$، X^* دوگان X و برای هر $x \in X$، $\hat{x} : X^* \longrightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه $\hat{x}(\Lambda) = \Lambda(x)$ تعریف شده باشد. بدیهی است که $\hat{x}$ خطی است. فرض کنید

$$\widehat{X} = \{\hat{x} \quad ; \quad x \in X\}.$$

اگر $\Lambda_۲ \neq \Lambda_۱$ پس $x \in X$ ای هست که $\Lambda_۱(x) \neq \Lambda_۲(x)$ یعنی $\hat{x}(\Lambda_۱) \neq \hat{x}(\Lambda_۲)$. پس $\widehat{X}$ نقاط X^* را جدا می کند.

حال کوچکترین توپولوژی روی X^* که همه اعضای $\widehat{X}$ روی آن پیوسته است را توپولوژی ضعیف ستاره یا به اختصار w^*- توپولوژی روی X^* گوییم و با $\sigma(X^*, X)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۵.۱.۱ فضای باناخ X را انعکاسی گوییم ، هرگاه نگاشت $X \to X^{**} \ : \ x \mapsto \hat{x}$ برو باشد .

تعریف ۶.۱.۱ نگاشت $x \to x^*$ یک برگشت روی جبر A است هرگاه برای هر $x, y \in A$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ ،

۱) $(x+y)^* = x^* + y^*$ ؛

۲) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$ ؛

۳) $(xy)^* = y^* x^*$ ،

۴) $x^{**} = x$.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ با یک برگشت باشد و برای هر $x \in A$ ، $||xx^*|| = ||x||^۲$. درآن صورت A را یک C^*-جبر گوییم .

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنید $(A,\|.\|)$ یک جبر نرمدار با برگشت $*$ باشد . A یک $*-$ جبر نرمدار است ، هرگاه

$$\|x\| = \|x^*\| \qquad (x \in A) \quad .$$

تذکر ۹.۱.۱ واضح است که هر C^*- جبر یک $*-$ جبرنرمداراست .

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنید $(A,*)$ و $(B,+)$ دو $*-$ جبر باشند . یکریختی $\Phi : A \to B$ را یک $*-$ یکریختی گوییم ، هرگاه

$$\forall a \in A \; ; \quad \Phi(a^*) = (\Phi(a))^+ \quad .$$

تعریف ۱۱.۱.۱ تابعک F روی $*-$ جبر A را مثبت گوییم ، هرگاه $F(xx^*) \geq 0$ برای هر $x \in A$.

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنید X, Y دو فضای باناخ و $f : X \to Y$ یک همریختی یک به یک و پوشا باشد . f را یکریختی طولپا گوییم ، هرگاه برای هر $x \in X$ ، $||f(x)|| = ||x||$.

قضیه ۱۳.۱.۱ (گلداشتاین)

اگر X نرم دار باشد، آن گاه X در X^{**} با w^*- توپولوژی چگال است.

برهان: به قضیه $(A.۳.۲۹(i))$ از مرجع [۳] رجوع کنید.

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنید گروه G به عنوان یک فضا توپولوژیک باشد . اگر

الف) نگاشت $G \times G \to G \;:\; (x,y) \mapsto xy$ پیوسته باشد ،

ب) نگاشت $G \to G \;:\; x \mapsto x^{-1}$ پیوسته باشد ،

آنگاه G رایک گروه توپولوژیک نامند .

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنید X یک فضای هاسدورف و فشرده موضعی باشد. فضای تمام توابع مختلط مقدار از X به $\mathbb{C}$ را با $\mathbb{C}^X$ و فضای تمام توابع مختلط مقدار پیوسته و کراندار روی X را با $C_b(X)$ نمایش می دهیم.

نگاشت $||.||$ باضابطه $||f|| = sup\{|f(x)|; x \in X\}$ یک نرم روی $C_b(X)$ است وبه آسانی دیده می شود که $C_b(X)$ با این نرم یک فضای باناخ است .

$f \in C_b(X)$ را در بی نهایت صفر گوییم ، هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ ، مجموعه فشرده K ای باشد که $|f(x)| < \epsilon$ برای هر $x \in X \setminus K$. مجموعه تمام $f \in C_b(X)$ که در بی نهایت صفر هستند را با $C_0(X)$ نمایش می دهیم .

تعریف ۱۶.۱.۱ فرض کنید $f \in C_b(X)$ تابعی دلخواه باشد. مجموعه $K = \overline{\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}}$ را تکیه گاه (محمل) تابع f نامیده و با $suppf$ نمایش می دهیم.

زیر فضایی از $C_b(X)$ که شامل تمام توابع با تکیه گاه فشرده را با $C_{00}(X)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱۷.۱.۱ فرض کنید G یک گروه فشرده موضعی با یک اندازه هار چپ باشد. $f \in C_b(G)$ را پیوسته یکنواخت چپ (پیوسته یکنواخت راست) گوییم ، هرگاه نگاشت $G \to C_b(G)\ :\ x \mapsto {}_xf$ $\quad (G \to C_b(G)\ :\ x \mapsto f_x)$ پیوسته باشد که در آن $_xf\ (y) = f(xy) \quad , \quad f_x\ (y) = f(yx)$ برای هر $x, y \in G$. مجموعه تمام توابع پیوسته یکنواخت چپ روی G را با $LUC(G)$ و مجموعه تمام توابع پیوسته یکنواخت راست روی G رابا $RUC(G)$ نمایش می دهیم .

$f \in C_b(G)$ پیوسته یکنواخت است ، هرگاه f پیوسته یکنواخت چپ و پیوسته یکنواخت راست باشد . مجموعه تمام توابع پیوسته یکنواخت را با $UC(G)$ نمایش می دهیم . به عبارتی

$$UC(G) = LUC(G) \cap RUC(G) \ .$$

نمادگذاری ۱۸.۱.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ و B و C زیر مجموعه های غیر تهی از A باشند . در آن صورت

$$B \cdot C = \{bc : b \in B\ ,\ c \in C\},$$

$$BC = linB \cdot C = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i c_i \ \ ; \ \ \alpha_i \in \mathbb{C}, b_i \in B, c_i \in C, n \in \mathbb{N}\},$$

$$B^2 = BB \ .$$

تعریف ۱۹.۱.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. اولین ضرب آرنز بر A^{**} در سه مرحله تعریف می شود . برای $a,b \in A$ و $f \in A^*$ و $F,G \in A^{**}$ ، عناصر fa, Ff در A^* و $F \circ G$ در A^{**} به ترتیب به صورت زیر تعریف می شود

$$\langle fa, b\rangle = \langle f, ab\rangle,$$
$$\langle Ff, a\rangle = \langle F, fa\rangle,$$
$$\langle F \circ G, f\rangle = \langle F, Gf\rangle.$$

تعریف ۲۰.۱.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. دومین ضرب آرنز بر A^{**} نیز در سه مرحله تعریف می شود . برای $a,b \in A$ و $f \in A^*$ و $F,G \in A^{**}$ ، عناصر af, fF در A^* و $F \diamond G$ در A^{**} به ترتیب به صورت زیر تعریف می شود

$$\langle af, b\rangle = \langle f, b\ a\rangle,$$
$$\langle fF, a\rangle = \langle F, af\rangle,$$
$$\langle F \diamond G, f\rangle = \langle G, fF\rangle.$$

تعریف ۲۱.۱.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. A آرنز منظم نامیده می شود ، هرگاه اولین و دومین ضرب آرنز روی A^{**} با هم برابر باشد . یعنی $\diamond = \circ$.

قضیه ۲۲.۱.۱ A^{**} با ضرب آرنز اول (دوم) یک جبر باناخ است .

برهان . به فصل اول بخش ۹ (p.50) از [۱] رجوع کنید . ■

تعریف ۲۳.۱.۱ فرض کنید A یک جبر و X یک فضای برداری باشد . X یک $A-$ مدول چپ است ، هرگاه نگاشت $A \times X \longrightarrow X \ : (a,x) \mapsto a.x$ موجود باشد که در خواص زیر صدق کند :

الف) نسبت به هر دو متغیر خطی باشد.

ب) $\forall a,b \in A, \forall x \in X, \quad a.(b.x) = ab.x$.

به طور مشابه $A-$ مدول راست نیز تعریف می شود.

تعریف ۲۴.۱.۱ X یک $A-$ دو مدول است هرگاه هم یک $A-$ مدول راست و هم یک $A-$ مدول چپ بوده و نیز

$$\forall a,b \in A, x \in X \quad a.(x.b) = (a.x).b \quad .$$

تعریف ۲۵.۱.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک فضای باناخ باشد . X را یک $A-$ مدول چپ باناخ گوییم، هر گاه $k > 0$ موجود باشد به طوری که

$$\forall a \in A, x \in X \quad ||a.x|| \leq k||a||||x|| \ ;$$

یعنی نگاشت $A \times X \longrightarrow X \ : (a,x) \mapsto a.x$ تواماً پیوسته باشد . به طور مشابه $A-$ مدول راست باناخ و $A-$ دو مدول باناخ نیز تعریف می شوند.

مثال ۲۶.۱.۱ فرض کنید A یک جبرباناخ باشد . در آن صورت می توان A را باضرب های خودش به عنوان یک $A-$ مدول در نظر گرفت . همچنین با تعریف

$$\langle \lambda a, b\rangle = \langle \lambda, ab\rangle \ ,$$

$$\langle a\lambda, b\rangle = \langle \lambda, ba\rangle$$

که در آن $a,b \in A$ و $\lambda \in A^*$ می توان A^* را به عنوان یک $A-$ مدول باناخ در نظر گرفت . به طور مشابه $A^{(n)}$ یعنی n امین دوگان A یک $A-$ مدول باناخ است .

تعریف ۲۷.۱.۱ فرض کنید X یک $A-$ مدول باناخ باشد . $Y \subset X$ را یک زیر مدول X گوییم ، هرگاه اگر $y \in Y$ و $a \in A$ ، آنگاه $ay, ya \in Y$.

تعریف ۲۸.۱.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک $A-$ دو مدول باناخ باشد . تور (e_α) در A یک واحد تقریبی چپ برای X است ، هرگاه $\lim_\alpha e_\alpha \cdot x = x \quad ; \quad \forall x \in X$.
تور (e_α) در A را یک واحد تقریبی چپ کرانداربرای X گوییم ، هرگاه $K > 0$ ای باشد که برای هر α ؛ $||e_\alpha|| \leq K$. به طور مشابه واحد تقریبی راست و واحد تقریبی راست کراندار روی X نیز تعریف می شوند . یک واحد تقریبی کراندار برای X ، هم یک واحد تقریبی راست کرانداربرای X و هم یک واحد تقریبی چپ کرانداربرای X است .

تعریف ۲۹.۱.۱ فرض کنید A یک جبر و E و F ، A — مدول های چپ باشند. نگاشت $T : E \to F$ را یک همریختی $A-$ مدولی چپ نامیم ، هرگاه $T(a \cdot x) = a \cdot T(x) \quad (a \in A \ , \ x \in E)$. به طور مشابه همریختی $A-$ مدولی راست و همریختی $A-$ دو مدولی نیز تعریف می شوند .

تعریف ۳۰.۱.۱ فرض کنید A یک جبر باشد . یک ایده آل چپ از A ، یک زیر فضای خطی J از A است به طوری که $AJ \subset J$.

یک عنصر u از A یک یکه مدولی راست برای یک زیر فضای خطی E از A است ،اگر $A(1-u) \subset E$.

ایده آل چپ J از A سره است ، هرگاه $J \neq A$.

یک ایده آل چپ مدولی ، یک ایده آل چپ است که یک یکه مدولی راست داشته باشد .

ایده آل سره‌ای که مشمول درهیچ ایده آل چپ سره دیگری نیست را ایده آل ماکسیمال گوییم .

یک ایده آل چپ مدولی ماکسیمال یک ایده آل چپ سره است که مدولی بوده و مشمول در هیچ ایده آل سره دیگری نیست . به طور مشابه ایده آل راست ویکه مدولی چپ تعریف می شوند .

قضیه ۳۱.۱.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ ، J یک ایده آل چپ مدولی سره از A با یکه مدولی راست u باشد . در آن صورت

الف) $(x \in J) \quad ||u-x|| \geq 1$.

ب)بستار J یک ایده آل چپ مدولی سره از A است .

برهان . به قضیه ۳ از فصل اول بخش ۹ مرجع [۱] رجوع کنید . ■

نتیجه ۳۲.۱.۱ هر ایده آل چپ مدولی ماکسیمال از یک جبر باناخ ، بسته است .

برهان . به نتیجه ۴ از فصل اول بخش ۹ مرجع [۱] رجوع کنید . ■

قضیه ۳۳.۱.۱ (هان باناخ [۱])

اگر X محدب موضعی و M زیرفضایی از X باشد که $x \notin \overline{M}$ ، آنگاه $\Lambda \in X^*$ وجود دارد که $\Lambda(x) = 1 \quad , \quad \Lambda(M) = \{0\}$.

برهان . به قضیه ۵.۳ از فصل سوم مرجع [۱۹] رجوع کنید . ■

قضیه ۳۴.۱.۱ (تجزیه کوهن [۲])

فرض کنید A یک جبر باناخ بانرم $\|.\|$ و دارای یک واحد تقریبی چپ کراندار (با کران d) باشد . اگر L یک $A-$ مدول چپ باناخ با نرم $|||.|||$ باشد ، آنگاه $A \cdot L$ یک زیر فضای خطی بسته از L است و اگر $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله در $A \cdot L$ باشد که $\lim_{i\to\infty} z_i = 0$ و $\delta > 0$ ، آنگاه یک عنصر $a \in A$ ویک دنباله $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ از عناصر L موجود است به طوری که :

الف) برای $i = 1, 2, \ldots \quad z_i = ay_i$;

ب) $\|a\| \leqq d$;

ج) برای $i = 1, 2, \ldots \quad y_i \in \overline{(Az_i)}$;

د) برای $i = 1, 2, \ldots \quad |||y_i - z_i||| \leqq \delta$;

ه) $\lim_{i\to\infty} y_i = 0$.

برهان . به قضیه ۲۳.۳۲ از مرجع [۱۴] رجوع کنید . ■

قضیه ۳۵.۱.۱ فرض کنید $1 \leq p < \infty$ و f یک تابع در $L^p(G)$ باشد . برای هر $\epsilon > 0$ یک همسایگی U از e هست به طوریکه ،

الف) اگر $st^{-1} \in U \quad , \quad s,t \in G$ ، آنگاه $||{}_sf - {}_tf||_p < \epsilon$ ، یعنی نگاشت $G \to L^p(G) \ : \ x \mapsto {}_xf$ پیوسته یکنواخت راست است .

همچنین برای هر $t \in G$ دلخواه و هر $\epsilon > 0$ یک همسایگی V از e هست به طوریکه ،

ب) اگر $s \in tV$ ، آنگاه $||f_s - f_t||_p < \epsilon$ ، یعنی نگاشت $G \to L^p(G) \ : \ x \mapsto f_x$ پیوسته است .

---

[۱] Hahn-Banach

[۲] Cohn's Factorization Theorem

برهان . به قضیه ۴.۲۰ از مرجع [۱۳] رجوع کنید . ■

قضیه ۳۶.۱.۱ فرض کنید $1 < p < \infty$ و q مزدوج p باشد یعنی $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. اگر $f \in L^p(G)$ و $g^* \in L^q(G)$ ، آنگاه برای هر $x \in G$

$$\int_G f(xy)g(y^{-1})dy = f * g(x) \qquad (1)$$

موجود است ویک تابع در $C_0(G)$ است .

اگر $f \in L^1(G)$ و $g \in L^\infty(G)$ ، آنگاه برای هر $x \in G$ (۱) وجود دارد ویک تابع در $RUC(G)$ است .

اگر $f \in L^\infty(G)$ و $g^* \in L^1(G)$ ، آنگاه برای هر $x \in G$ (۱) وجود دارد ویک تابع در $LUC(G)$ است .

برهان . به قضیه ۱۶.۲۰ از مرجع [۱۳] رجوع کنید . ■

لم ۳۷.۱.۱ فرض کنید G یک گروه فشرده باشد . اگر هر تابع در $L^\infty(G)$ ، $\lambda-$ تقریباً همه جا با یک تابع پیوسته روی G برابر باشد ، آنگاه G متناهی است .

برهان . به قضیه ۳.۳۷ از مرجع [۱۴] رجوع کنید . ■

قضیه ۳۸.۱.۱ فرض کنید G یک گروه فشرده موضعی باشد . در آن صورت یک نگاشت پیوسته یکتای $\Delta_G : G \to (0,\infty)$ (نگاشت مدولار G) موجود است به طوری که

$$\Delta_G(gh) = \Delta_G(g)\Delta_G(h) \qquad (g,h \in G) \quad .$$

برهان . به قضیه ۱۰.۱ از ضمیمه A مرجع [۱۸] رجوع کنید . ■

تذکر ۳۹.۱.۱ اگر $\Delta_G \equiv 1$ ، گروه G را تک مدولی نامیم .

تعریف ۴۰.۱.۱ یک فضای برداری V روی اعداد حقیقی (مختلط) با متر $d : V \times V \to \mathbb{R}$ ، $F-$ فضاست ، هرگاه

الف) ضرب اسکالر در V با تحدید به d و متر استاندارد روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ پیوسته است .

ب) جمع در V با تحدید به d پیوسته است .

ج) متر انتقال پایاست ، یعنی برای هر $a, x, y \in V$ ، $d(x+a, y+a) = d(x, y)$.

د) فضای متریک (V, d) کامل است .

قضیه ۴۱.۱.۱ فرض کنید E یک $F-$ فضا، (u_n) یک دنباله در E ونیز (T_n) یک دنباله در $B(E)$ با $(n \in \mathbb{N})$ $\overline{T_n(E)} = E$ باشد . در آن صورت $x \in E$ وجود دارد به طوری که

$$x - \sum_{k=۱}^{n} (T_۱ ... T_k)(u_k) \in (T_۱ ... T_{n+۱})(E) \qquad (n \in \mathbb{N}) \quad .$$

برهان . به قضیه ۲۸.۳ ازضمیمه A مرجع [۳] رجوع کنید . ■

۲.۱ مشتق ها و میانگین پذیری جبرهای باناخ

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید A یک جبرباناخ و X یک $A-$ دو مدول باناخ باشد . نگاشت خطی و کراندار $D: A \longrightarrow X$ را یک مشتق گوییم، هرگاه

$$D(ab) = D(a).b + a.D(b) \quad (a, b \in A).$$

مجموعه تمام مشتق ها از A به X را با $Z^{1}(A, X)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید A یک جبرباناخ، X یک $A-$ دو مدول باناخ و $x \in X$ باشد . نگاشت $ad_x : A \to X$ با ضابطه $(a \in A) \quad ad_x(a) = a.x - x.a$ یک مشتق است. چنین مشتق هایی را درونی گوییم و مجموعه تمام مشتق های درونی از A به X را با $N^{1}(A, X)$ نشان می دهیم.

تعریف ۳.۲.۱ فضای خارج قسمتی $Z^{1}(A, X)$ روی $N^{1}(A, X)$ را با $H^{1}(A, X)$ نمایش داده و آن را اولین گروه کوهومولوژی هاشیلد[۳] با ضرایب در X می نامیم. به عبارتی

$$H^{1}(A, X) = \frac{Z^{1}(A, X)}{N^{1}(A, X)} \quad .$$

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک $A-$ دو مدول باناخ باشد . مشتق $D: A \longrightarrow X$ را تقریباً درونی گوییم ، هرگاه تور $(x_\alpha) \subseteq X$ موجود باشد به طوریکه برای هر $a \in A$ ؛ $D(a) = \lim_\alpha ad_{x_\alpha}(a)$.

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ باشد . A را میانگین پذیر گوییم ، هرگاه برای هر $A-$ دو مدول باناخ X داشته باشیم $H^{1}(A, X^*) = \{0\}$ (X^* فضای دوگان X است) . به عبارتی برای هر $A-$ دو مدول باناخ X، هر مشتق $D: A \longrightarrow X^*$ درونی باشد.

[۳] $Hacshild$