دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه آمار

پایان نامه‌ی دکتری رشته ی آمار

مطالعه‌ای بر قابلیت اعتماد سیستم های منسجم پویا

استاد راهنما :
دکتر مجید اسدی

پژوهشگر:
ساره گلی فروشانی

فروردین ماه ۱۳۹۱

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان‌نامه‌ی دکتری رشته‌ی آمار

خانم ساره گلی فروشانی

تحت عنوان

مطالعه ای بر قابلیت اعتماد سیستم های منسجم پویا

در تاریخ **۹۱/۱/۲۳** توسط هیأت داوران زیر بررسی با درجه **عالی** به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر مجید اسدی با مرتبه‌ی علمی استاد — امضاء

۲ – استاد داور داخل گروه دکتر محمد حسین علامت ساز با مرتبه‌ی علمی استاد — امضاء

۳- استاد داور داخل گروه دکتر ایرج کاظمی با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۴- استاد داور خارج از گروه دکتر عبدالحمید رضایی با مرتبه ی علمی دانشیار — امضاء

امضای مدیر گروه

چکیده

یکی از مباحث مهم در نظریه قابلیت اعتماد و تحلیل بقا مطالعه‌ی طول عمر سیستم‌های منسجم است. امروزه سیستم‌های منسجم در سطح وسیعی از شاخه‌های علوم و تکنولوژی مورد استفاده قرار می‌گیرند. از معروف‌ترین سیستم‌های منسجم می‌توان به سیستم‌های سری، موازی، k از n و k از n تعمیم یافته اشاره کرد که هر یک از این سیستم‌ها کاربرد های خاصی در بخش‌های مختلف قابلیت اعتماد دارند. سیستمی را منسجم گویند که هر مولفه آن روی کارایی سیستم موثر است و بهبود مولفه‌های آن منجر به کارامدی سیستم می‌شود.

امروزه در متون قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم از دیدگاه‌های مختلفی مورد بررسی قرار می‌گیرند. یکی از این دیدگاه‌ها مطالعه‌ی سیستم‌های منسجم تحت فرض‌های مختلف بر روی طول عمر مولفه‌های آن مانند مستقل و هم‌توزیع بودن، تبادل پذیری توزیع طول عمر مولفه‌ها است. دیدگاه دیگر، بررسی سیستم‌های منسجم بر اساس حالت‌های مختلف (به عنوان مثال کار کردن یا از کار افتادگی) مولفه‌های آن است. مثلاً گاهی با سیستم‌هایی مواجه می‌شویم که با وجود از کار افتادن برخی از مولفه‌ها، سیستم هنوز در حال کار کردن است. در این رساله به بررسی و مطالعه‌ی سیستم‌های منسجم از دو دیدگاه اشاره شده پرداخته می‌شود.

در نظریه قابلیت اعتماد شاخص‌های مختلفی جهت مطالعه طول عمر سیستم‌های منسجم و مقایسه آنها با یکدیگر مطرح شده‌اند که از مهمترین آنها می‌توان به توابع قابلیت اعتماد، نرخ شکست، نرخ شکست معکوس، میانگین طول عمر باقیمانده و تابع میانگین گذشته‌ی طول عمر اشاره کرد. بررسی خواص شاخص‌های بالا تحت شرایط متفاوت (مستقل و هم‌توزیع بودن، تبادل پذیری مولفه‌ها) از جذاب‌ترین مباحث مطالعاتی قابلیت اعتماد می‌باشد که در چند دهه اخیر مورد توجه بسیاری از آماردانان قرار گرفته است. مطالعه‌ی شاخص‌های مطرح شده بر روی سیستم‌های منسجم منجر به تعریف مفهوم بردار علامت شد که ابزار مفیدی برای مطالعه‌ی رفتار سیستم‌ها می‌باشد. در این پایان نامه به مطالعه‌ی رفتار و بررسی شاخص‌های مطرح شده تحت شرایط متفاوت اعمال شده بر سیستم‌های منسجم و بر پایه بردار علامت می‌پردازیم.

همچنین در این پایان نامه علاقمند به مطالعه‌ی طول عمر باقیمانده و مدت زمان سپری شده از طول عمر سیستم‌های منسجم و بررسی تاثیر رفتار سالخوردگی و تغییرات تصادفی مولفه‌های سیستم روی طول عمر سیستم منسجم می‌باشیم. این مطالعه می‌تواند روی یک سیستم با n مولفه یا دو سیستم با تعداد مولفه‌های متفاوت باشد. در این جا سالخوردگی طول عمر را بر اساس تابع نرخ شکست و تابع میانگین طول عمر باقیمانده و اندازه‌های وابسته به آنها تعریف می‌کنیم و مقایسه‌های خود را بر اساس این توابع، تحت شرایط مختلفی که ممکن است برای سیستم ایجاد شود انجام می‌دهیم. در فرایند انجام چنین مقایسه‌هایی به تعمیم نتایج موجود در متون آماری از جنبه‌های مختلف می پردازیم .

در فصل ۱، مفاهیم پایه، تعاریف و قضایایی که در طول پایان نامه از آن‌ها استفاده خواهیم کرد را بیان می کنیم .

در فصل ۲، به معرفی کلاسی از سیستم‌ها که به سیستم‌های منسجم معروفند پرداخته و به مرور برخی از نتایج بدست آمده در مورد چنین سیستم‌هایی تحت شرایط مختلف می‌پردازیم.

از آنجایی که بررسی رفتار تصادفی سیستم‌های منسجم یکی دیگر از مقوله های مورد توجه در بررسی این نوع از سیستم ها برای محققان و صنعتگران بوده است، در فصل ۳ به مطالعه و بررسی سیستم های منسجم از این نظر می‌پردازیم.

در فصل ۴ ، خواص طول عمر و مدت زمان از کارافتادگی یک سیستم منسجم شامل n مولفه را از جنبه های مختلف مورد مطالعه قرار می دهیم.
در فصل ۵ هم یکی از انواع سیستم‌های منسجم که به سیستم های k از n تعمیم یافته معروفند مورد بررسی قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی : بردار علامت ، نمایش آمیخته ، طول عمر باقیمانده ، زمان از کار افتادگی ، آماره های ترتیبی ، ترتیب تصادفی ، تبادل پذیری ، نرخ شکست ، نرخ شکست معکوس ، قابلیت اعتماد.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

عنوان **صفحه**

فهرست شکل‌ها

عنوان | **صفحه**

فهرست جدول‌ها

عنوان **صفحه**

مخفف ها

میانگین طول عمر باقیمانده .... MRL

میانگین گذشته‌ی طول عمر .... MPL

میانگین مدت از کار افتادگی .... MIT

نرخ شکست صعودی .... IFR

نرخ شکست نزولی .... DFR

علامت ها و نمادها

متغیر *تصادفی* طول عمر یک موجود زنده .... T

متغیر تصادفی باقیمانده ی طول عمر موجود زنده .... T_t

تابع قابلیت اعتماد متغیر تصادفی T .... $\bar{F}(t)$

تابع توزیع یک سیستم منسجم .... $F(t)$

تابع نرخ شکست متغیر تصادفی T .... $h(t)$

تابع نرخ شکست تجمعی متغیر تصادفی T .... $\Lambda\ (t)$

تابع نرخ شکست معکوس متغیر تصادفی T .... $r(t)$

تابع میانگین طول عمر باقیمانده ی متغیر تصادفی T .... $m(t)$

تابع میانگین گذشته ی طول عمر متغیر تصادفی T .... $m^*\ (t)$

آماره ی ترتیبی $\boldsymbol{i}$ام نمونه‌ی تصادفی n تایی .... $T_{i:n}$

تابع توزیع آماره ی ترتیبی $\boldsymbol{i}$ام .... $F_{i:n}(x)$

تابع ساختار سیستم .... ϕ

مجموعه ی مسیر .... $C_۱(\boldsymbol{x})$

مجموعه ی قطع کننده .... $C_۰(\boldsymbol{x})$

بردار علامت سیستم .... $\boldsymbol{p}$

میانگین طول عمر باقیمانده سیستم موازی دارای n مولفه‌ی فعال .... $M_n^{۱,n}(t)$

تابع میانگین طول عمر باقیمانده ی یک سیستم موازی دارای $(n-r+۱)$ مولفه‌ی فعال .... $M_n^{r,n}(t)$

میانگین طول عمر باقیمانده یک سیستم با $(n-k+۱)$ از n دارای n مولفه‌ی فعال .... $M_n^{۱,k}(t)$

تابع میانگین طول عمر باقیمانده ی یک سیستم $(n-k+۱)$ از n دارای حداقل $(n-s+۱)$ مولفه‌ی فعال .... $M_n^{r,k}(t)$

تابع میانگین طول عمر باقیمانده ی یک سیستم منسجم با حداقل $(n-r+۱)$ مولفه‌ی فعال .... $M_n^{r,s}(t)$

بردار علامت پویای سیستم .... $\boldsymbol{p}\ (t)$

متغیرتصادفی طول عمر یک سیستم منسجم .... $T = \tau\ (T_۱, \dots, T_n)$

تابع قابلیت اعتماد طول عمر باقیمانده ی یک مولفه ی فعال در یک سیستم منسجم غیر فعال در زمان t .... $P_{j,T}(t,x)$

تابع قابلیت اعتماد مدت زمان از کارافتادگی یک مولفه ی غیر فعال دریک سیستم منسجم فعال در زمان t .... $P_{j,T}^*(t,x)$

تابع قابلیت اعتمادباقیمانده ی طول عمرمولفه‌های سالم در یک سیستم $(n-k+۱)$ از n غیرفعال درزمان t .... $\gamma_{j,k,n}(t,x)$

تابع قابلیت اعتمادمدت زمان ازکارافتادگی یک مولفه‌ی غیرفعال دریک سیستم $(n-k+1)$ از n فعال درزمان t .. $\gamma^{*}{}_{j,k,n}(t,x)$

میانگین مدت زمان از کار افتادگی سیستم منسجم .... $M_T(t)$

تابع نرخ شکست معکوس مولفه ی iام سیستم .... $r_{i:n}(t)$

میانگین مدت زمان از کارافتادگی مولفه ی iام سیستم .... $m_{i:n}(t)$

میانگین مدت زمان از کارافتادگی سیستم با حداقل r مولفه ی غیرفعال در زمان t .... $M_T^*(t)$

تابع میانگین مدت زمان از کار افتادگی مولفه ای از سیستم با طول عمر $T_{r:n}$ در سطح سیستم .... $M_n^r(t)$

سیستم k از n تعمیم یافته .... $(n_1, \dots, n_N, f, k)$

طول عمر یک سیستم $(n_1, \dots, n_N, f, k)$ .... $T_{N,f,k}^{n_1,\dots,n_N}$

تابع قابلیت اعتماد سیستم $(n_1, \dots, n_N, f, k)$ خطی .... $R_L((n_1, \dots, n_N), f, k)$

تابع قابلیت اعتماد سیستم $(n_1, \dots, n_N, f, k)$ دایره‌ای .... $R_c((n_1, \dots, n_N), f, k)$

فصل اول

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱-۱ مقدمه

از زمانی که بشر توانایی ساخت محصولی را پیدا کرد در جهت بالا بردن کیفیت آن به تلاش پرداخت. دقت ، ظرافت و هنرمندی خاصی که در آثار باستانی و محصولات متعلق به زمان های گذشته مشاهده می شود، حکایت از این تلاش ها دارد. با شروع انقلاب صنعتی در اواسط قرن هجدهم، ماشین های تولیدی به تدریج جایگزین مهارت های فردی و ابزار افراد هنرمند و صنعتگر گردید. با پیدایش شیوه های جدید تولید، اشتیاق به تولید بیشتر و نیاز به توجه کردن به کیفیت محصولات نهایی وارد ابعاد تازه ای شد. از سوی دیگر، در جهان امروز، با توجه به محیط رقابتی شدید در تولید محصولات و ناپایداری چنین محیط هایی ، تولید کنندگان صنایع مجبور به داشتن طراحی های جدید در امر تولید، بالا بردن کیفیت تولیدات، استفاده از روش های جدید برای بازاریابی و ارائه خدمات متعدد به مشتریان گردیدند . در واقع تولید کنندگان صنایع به منظور حفظ جایگاه خود و تسخیر بازار مجبور به جلب رضایت مشتریان از جهات متعدد شده اند.

در صنعت، شاخص های مختلفی برای سنجش کیفیت یک محصول یا سیستم وجود دارد. یکی از مهمترین و مطرح ترین شاخص ها ، شاخص قابلیت اعتماد می باشد. قابلیت اعتماد،کیفیت محصول در دراز مدت است. درمباحث مطرح در قابلیت اعتماد معیارهای مختلفی جهت سنجش کیفیت یک محصول یا یک سیستم وجود دارد. همچنین روش های متعددی برای مقایسه قابلیت اعتماد محصولات از جهات متعدد با هم وجود دارد که از معروف ترین این روشها ، می توان به انواع ترتیب بندی های تصادفی مبتنی بر اندازه های قابلیت اعتماد اشاره کرد.

در این فصل ، در بخش ۱-۲ به بیان تعاریف و مفاهیم پایه‌ای در قابلیت اعتماد،که شامل توابع و معیارهای مختلف وکلاسهای توزیع طول عمر است می پردازیم. سپس در بخش ۱-۳ به معرفی ترتیب های تصادفی پرداخته و قضایا و نتایج مورد نیاز در این پایان نامه را به اجمال ذکر می کنیم. همچنین بخش پایانی این فصل به مطالعه‌ی اجمالی داده های آماری مرتب شده اختصاص داده شده است.

۱-۲ مفاهیم پایه‌ای در قابلیت اعتماد

یکی از انواع متغیرها و داده های مورد توجه در دنیای امروز، متغیرها و داده های طول عمر می باشند که در شاخه ای از علم آمار به نام قابلیت اعتماد، به طور دقیق و مفصل مورد بررسی قرار می‌گیرند. مطالعه بر روی طول عمر واحدهای زنده و بقای انسان در شاخه‌ای از قابلیت اعتماد به نام تحلیل بقا و مطالعه بر روی طول عمر واحدهای صنعتی و سیستم ها در شاخه‌ی دیگری از این علم به نام قابلیت اعتماد مهندسی صورت می‌گیرد.
در آمار، برای بیان رفتار احتمالی متغیرها، عموماً از توابع توزیع و توابع چگالی استفاده می شود. در این شاخه از علم آمار به سبب نوع متغیرها که عموما متغیرهای طول عمر می باشند و این که اندازه گیری تاثیر گذر زمان در آنها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است از توابع دیگری مانند تابع قابلیت اعتماد[۱]، تابع نرخ شکست[۲]، تابع میانگین طول عمر باقیمانده[۳] و ... استفاده می‌گردد. در این بخش برخی از این مفاهیم که در رساله به طور گسترده بکار برده شده است، معرفی می گردد.

۱-۲-۱ توابع و معیارهای قابلیت اعتماد

متغیر تصادفی T که معمولا در مطالعات قابلیت اعتماد، متغیر زمان یا متغیر طول عمر یک مولفه یا یک سیستم است را با تابع توزیع به طور مطلق پیوسته‌ی F و تابع چگالی احتمال f در نظر بگیرید. واضح است که T نامنفی و دارای تکیه گاه $[۰, b)$ ، $b \leq \infty$ است. تابع قابلیت اعتماد یا تابع بقا T به صورت

$$\bar{F}(t) = P(T > t) = ۱ - F(t),$$

تعریف می شود. واضح است که $\bar{F}(۰) = ۱ \ , \ \bar{F}(b) = ۰$.

[۱]Reliability function
[۲]Failure rate function
[۳]Mean residual lifetime function

در سراسر این رساله از عبارت صعودی به جای عبارت ناکاهشی و از عبارت نزولی به جای عبارت ناافزایشی استفاده می شود .

تابع قابلیت اعتماد، در واقع احتمال از کارافتادگی یا خرابی موجود زنده را در هر لحظه از زمان بیان می کند. هدف در قابلیت اعتماد، اغلب مطالعات برآورد این تابع می باشد. یکی دیگر از توابعی که نقش محوری در مطالعات قابلیت اعتماد بازی می کند، تابع نرخ شکست است که از مهمترین مفاهیم سالخوردگی می‌باشد. تابع نرخ شکست به صورت زیر تعریف می شود.

تعریف ۱.۱ تابع نرخ شکست متغیر تصادفی T که آن را با $h(t)$ نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می شود :

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\delta \to ۰} \frac{P(t < T < t + \delta \mid T > t)}{\delta} \\ &= \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}, \end{aligned}$$

برای هر t در تکیه گاه T به طوری که $\bar{F}(t) > ۰$.

در واقع تابع نرخ شکست ، نرخ از بین رفتن موجود زنده را در بازه‌ی زمانی کوچک بعد از t ، با فرض این که می دانیم موجود تا زمان t زنده بوده است بیان می کند. باید توجه کرد که تابع نرخ شکست فقط نرخ شکست آنی موجود زنده را بیان می کند و یک تابع احتمال نمی باشد.

تابع نرخ شکست را نرخ خطر[۴] ، نیروی مرگ[۵] و نرخ شدت[۶] نیز می نامند. در سراسر این رساله نرخ شکست را برای تابع $h(t)$ به کار خواهیم برد.

معمولاً در مطالعه ی مدت زمان سپری شده از زمان از کار افتادن یک موجود زنده و همچنین در آزمون های طول عمر، معیار دیگری نیز مورد استفاده قرار می گیرد که تابع نرخ شکست معکوس[۷] نام دارد.

تعریف ۲.۱ تابع نرخ شکست معکوس متغیر تصادفی T که آن‌را با $r(t)$ نمایش می‌دهیم، برای هر t به طوری‌که $F(t) > ۰$ به صورت زیرتعریف می شود :

$$r(t) = \lim_{\delta \to ۰} \frac{P(t - \delta < T < t \mid T \leq t)}{\delta}$$

---

[۴] Hazard rate

[۵] Force of mortality

[۶] Intensity rate

[۷] Reversed failure rate function

$$= \frac{f(t)}{F(t)}.$$

برای مطالعه‌ی بیشتر بر روی این تابع می‌توان به فینکلاشتاین[۸](۲۰۰۲) ونآندا[۹] و گوپتا[۱۰](۲۰۰۱) مراجعه کرد.
در بسیاری از مسائل مطرح در قابلیت اعتماد با مواردی مواجه می شویم که در آنها از طول عمر موجود زنده مدتی سپری شده است یعنی در واقع طول عمر موجود زنده بیشتر از زمان t است. از این رو علاقمند به تعریف معیارهایی برای بررسی باقیمانده‌ی طول عمر موجود زنده، تحت این شرایط می باشیم. در این حالت متغیر تصادفی باقیمانده‌ی طول عمر موجود زنده به صورت

$$T_t = \{T - t | T > t\}$$

تعریف می شود. تابع قابلیت اعتماد T_t برابر است با

$$\bar{F}_{T_t}(x) = P(T > x + t | T > t) = \frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)}\cdot$$

از طرف دیگر، در اکثر موارد علاقمند به مطالعه برروی متوسط طول عمر باقیمانده ی یک موجود زنده تا زمان از بین رفتن آن هستیم. از این رو به مطالعه ی تابع میانگین طول عمر باقیمانده (MRL) می‌پردازیم که از جمله معیارهای پر کاربرد در قابلیت اعتماد است.

تعریف ۳.۱ فرض کنید T متغیر تصادفی طول عمر یک موجود زنده با میانگین متناهی و تابع توزیع $F(t)$ باشد. تابع میانگین طول عمر باقیمانده که آن را با $m(t)$ نمایش می دهیم برای t هایی که $\bar{F}(t) > ۰$ است، به صورت

$$m(t) = E(\,T - t \mid T > t\,) = \frac{\int_t^\infty \bar{F}(x)dx}{\bar{F}(t)},$$

تعریف می شود. واضح است که $m(۰) = E(T)$.
برای مطالعه‌ی بیشتر به کاتز[۱۱] و شنباق[۱۲](۱۹۸۰)، هال[۱۳] و ولنر[۱۴](۱۹۸۱) و گس[۱۵] و پروشان[۱۶](۱۹۸۸) مراجعه

---

[۸] Finkelstein
[۹] Nanda
[۱۰] Gupta
[۱۱] Kotz
[۱۲] Shanbhag

معیار دیگری که متوسط مدت زمان سپری شده از زمان از کار افتادن یک موجود زنده را نشان می دهد، تابع میانگین گذشته ی طول عمر[۱۷] (MPL) یا تابع میانگین مدت از کار افتادگی[۱۸] (MIT) می باشد. برای مطالعه بر روی این تابع و بررسی نتایج متعددی در خواص آن می توان به ارتگا[۱۹] (۲۰۰۹) و اسدی[۲۰] و برد[۲۱] (۲۰۱۱) مراجعه کرد.

تعریف ٤.١ فرض کنید T متغیر تصادفی طول عمر یک موجود زنده با میانگین متناهی و تابع توزیع $F(t)$ باشد. تابع میانگین گذشته ی طول عمر به صورت

$$m^{*}(t) = E(t-T|T \leq t) = \frac{\int_{0}^{t} F(x)dx}{F(t)},$$

برای t هایی که $F(t) > 0$ باشد، تعریف می شود.

یکی از مهمترین ویژگی های تابع نرخ شکست، نرخ شکست معکوس ، میانگین طول عمر باقیمانده و میانگین گذشته‌ی طول عمر، تعیین توزیع جامعه به طور منحصر بفرد می باشد.

۱-۲-۲ کلاس هایی از توزیع های طول عمر

برای مطالعه‌ی متغیرهای تصادفی طول عمر بر مبنای مفاهیم طول عمر که در نظریه قابلیت اعتماد مطرح می شود، کلاس‌های متعددی از توزیع‌ها تعریف شده اند که از مهمترین آن‌ها می‌توان کلاس توزیع‌های دارای نرخ شکست صعودی[۲۲] (IFR) و کلاس توزیع هایی با نرخ شکست نزولی[۲۳] (DFR) را نام برد.

---

[۱۳] Hall

[۱٤] Wellner

[۱۵] Guess

[۱٦] Proschan

[۱۷] Mean past lifetime function

[۱۸] Mean inactivating time function

[۱۹] Ortega

[۲۰] Asadi

[۲۱] Berred

[۲۲] Increasing failure rate

[۲۳] Decreasing failure rate

تعریف ۵.۱ توزیع طول عمر متغیر تصادفی T، متعلق به کلاس توزیع های IFR (DFR) است اگر برای هر $x > ۰$, $\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)}$ تابعی نزولی (صعودی) از t باشد. قابل توجه است که $\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)}$ تابع قابلیت اعتماد T_t است. از طرف دیگر در صورت وجود تابع چگالی، این تعریف معادل است با اینکه $h(t)$ تابعی صعودی (نزولی) از t باشد . (بارلو[۲۴]و پروشان (۱۹۷۵))

در سراسر پایان نامه، هرگاه بخواهیم بیان کنیم توزیع F متعلق به کلاس IFR (DFR) است، به طور خلاصه خواهیم گفت F، IFR (DFR) است.

انتظار می‌رود طول عمر بسیاری از توزیع ها متعلق به کلاس توزیع های IFR باشد. به طور مثال می توان به توزیع طول عمر واحدهای مکانیکی اشاره کرد. اما لازم به ذکر است که همیشه توابع نرخ شکست یکنوا[۲۵] نمی باشند. به طور مثال در توزیع لگ نرمال، تابع نرخ شکست ابتدا صعود می کند تا به نقطه ماکزیمم خود برسد و سپس نزول می کند. از طرف دیگر نرخ شکست برخی متغیرها مانند طول عمر انسان، U شکل (وانی شکل[۲۶]) می باشد که در زیر به تعریف آن می پردازیم.

تعریف ٦.۱ توزیع متغیر تصادفی طول عمر، T با تابع توزیع به طور مطلق پیوسته F را متعلق به کلاس نرخ شکست U شکل گوییم هرگاه تابع نرخ شکست ، $h(t)$ در فاصله‌ی $[۰,\infty)$ ، U شکل باشد. به عبارت دیگر اگرمقادیر $t_۱$, $t_۲$ وجود داشته باشند به طوری که $۰ \leq t_۱ \leq t_۲ \leq \infty$ و داشته باشیم:

$$h(t)\begin{cases} \text{اکیدا نزولی باشد} & ۰ \leq t < t_۱, \\ \text{ثابت باشد} & t_۱ \leq t < t_۲, \\ \text{اکیدا صعودی باشد} & t_۲ \leq t. \end{cases}$$

به نقاط $t_۱$ و $t_۲$، نقاط تغییر می گوییم.

کلاس های متعدد دیگری نیز برای توزیع های طول عمر وجود دارد که برای کسب اطلاعات جامع تر در این زمینه می توان به بارلو و پروشان (۱۹۷۵) مراجعه کرد.

---

[۲٤] Barlow

[۲٥] Monotone

[۲٦] Bathtub-shaped

۱-۳ ترتیب بندی‌های تصادفی

در بسیاری از شاخه های علم آمار مقایسه ی توزیع های احتمال دارای اهمیت ویژه ای است و توجه بسیاری از محققان را به خود معطوف کرده است. ترتیب بندی‌های تصادفی یکی از مهم ترین ابزارها در این راستا می باشد که در نیم قرن گذشته کاربردهای رو به رشدی در زمینه های مختلف آمار و احتمال داشته است. از جمله این زمینه ها می‌توان به نظریه صف، تحلیل بقا، تئوری قابلیت اعتماد، آمار بیمه، فیزیک آماری، زیست شناسی، تحقیق در عملیات، اقتصاد و علوم مدیریت اشاره کرد.

در یک مساله ترتیب بندی، هدف مقایسه ی توزیع چند متغیر یا چند آماره مبتنی بر دو یا چند جامعه می‌باشد. برای مقایسه‌ی دو تابع توزیع، آسان‌ترین راهی که به نظر می‌رسد مقایسه‌ی میانگین‌های دو توزیع است. اما در چنین مقایسه‌ای، اساس کار فقط دو عدد (میانگین‌ها) است که خیلی آگاهی بخش نمی‌باشد. از طرف دیگر، برخی اوقات میانگین‌ها وجود ندارند. برای مقایسه دو تابع توزیع، در بسیاری از موارد اطلاعات جزئی تر و بیشتری از داشتن دو میانگین در دسترس می‌باشد. اساس مقایسه در مبحث ترتیب بندی‌های تصادفی، اشکال مختلف اطلاعات ممکن درباره ساختار دو تابع توزیع می باشد. این اطلاعات عموماً به شکل توابع و معیارهای مختلفی است که ویژگی‌های احتمالی دو توزیع را در بردارند. نتایج شناخته شده‌ای در این زمینه توسط مولر[۲۷] و استویان[۲۸] (۲۰۰۲) و شیکد[۲۹] و شانتیکومار[۳۰] (۲۰۰۷) جمع‌آوری شده است. در این بخش به مرور برخی از ترتیب بندی هایی که در این رساله مورد نیاز است، می‌پردازیم.

تعریف ۷.۱ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته، به ترتیب با توابع توزیع F و G و توابع بقای $\bar{F} = 1 - F$ و $\bar{G} = 1 - G$ باشند.

الف) X را کوچک تر از Y از نظر ترتیب تصادفی معمولی[۳۱] گوییم هرگاه به ازای هر t متعلق به اجتماع تکیه‌گاه‌های X و Y ، $\bar{F}(t) \le \bar{G}(t)$ و آن را با نماد $X \le_{st} Y$ نمایش می‌دهیم.

ب) X را کوچک‌تر از Y از نظر ترتیب نرخ شکست[۳۲] گوییم هرگاه $\frac{\bar{G}(t)}{\bar{F}(t)}$ بر حسب t صعودی باشد و آن را با نماد $X \le_{hr} Y$ نمایش می دهیم. اگر F و G دارای چگالی احتمال باشند آنگاه $X \le_{hr} Y$ معادل است با $h_Y(t) \le h_X(t)$ ، که در آن h_X و h_Y به ترتیب نرخ‌های شکست X و Y می باشند.

---

[۲۷] Muller

[۲۸] Stoyan

[۲۹] Shaked

[۳۰] Shanthikumar

[۳۱] Usual stochastic order

[۳۲] Failure rate order