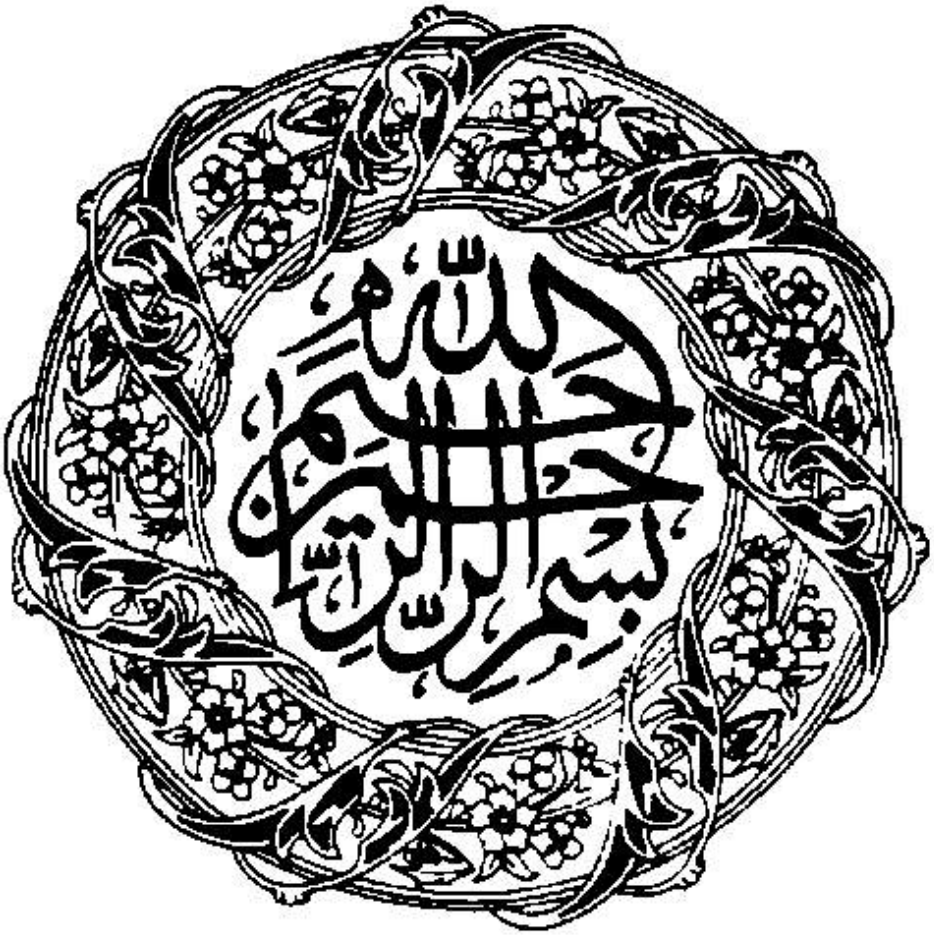
بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت علوم تحقیقات و فنآوری

دانشگاه بین المللی امام خمینی

IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

ارائه روشهای عددی برای پیش بینی چندگانگی جوابهای مسائل مقدار مرزی غیر خطی

رساله برای دریافت درجه دکتری در رشته

ریاضی کاربردی – آنالیز عددی

نگارش:

الیاس شیوانیان

استاد راهنما:

دکتر سعید عباس بندی

اساتید مشاور:

دکتر مهدی دهقان و دکتر داوود رستمی

شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به همسرم، الهه عشق، فاطمه

چکیده

در این رساله سعی می شود تا یک روش کاملاً محاسباتی – تحلیلی جهت پیش بینی چندگانگی جوابهای مسائل مقدار مرزی غیر خطی از نوع معادلات دیفرانسیل معمولی ارائه شود بطوریکه بتوان آن را به آسانی روی معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی بکار بست. هدف ما ارائه یک روشی است که نه تنها بتواند چندگانگی جوابهای مسائل مقدار مرزی غیر خطی را پیش بینی نماید بلکه بتواند با کارایی قابل توجهی همه شاخه های جوابها (در صورتی که مساله مورد نظر دارای جوابهای چندگانه باشد) را بطور همزمان بصورت تقریبی- تحلیلی بدست آورد. در فصل اول به بیان مقدمه ای بر روش آنالیز هموتوپی می پردازیم زیرا روشی که ارائه خواهد شده بر اساس این روش ساخته شده است. در فصل دوم به معرفی روش آنالیز هموتوپی پیشگو، سپس بصورت کامل به آنالیز ریاضی آن پرداخته می شود و در فصل سوم چندین مدل کاربردی که اعتبار روش را تائید می کند، بررسی می شود. در فصل چهارم به مسائل مقدار مرزی غیر خطی که دارای شرط مرزی در بی نهایت می باشند، بصورت مختصر پرداخته می شود و روشی مبتنی بر شبه طیفی – هم محلی برای یک نوع مدل خاص به کار برده می شود.

واژه های کلیدی:

روش آنالیز هموتوپی، روش آنالیز هموتوپی پیشگو، پارامتر تجویز شده، پارامتر کنترل کننده همگرایی، شرط تحمیل شونده، جوابهای چندگانه، چندگانگی جوابها، مسائل مقدار مرزی غیر خطی ، معادلات دیفرانسیل غیر خطی، شرایط مرزی متناهی، شرایط مرزی در بی نهایت، روش شبه طیفی- هم محلی.

تشکّر و سپاس فراوان از پدر فداکار و مادر مهربانم

پیشگفتار

بررسی وجود و چندگانگی جوابهای معادلات دیفرانسیل به ویژه با شرایط مرزی اغلب بسی دشوار بوده و همراه با گام های ملالت آور می باشد بطوریکه همواره نیاز به پیش شرط هایی می باشد که معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی مورد نظر باید داشته باشد. بنابراین اثبات آنالیزی وجود و چندگانگی جوابهای مسائل مقدار مرزی غیر خطی اغلب غیر ممکن می باشد.

روشهای تقریبی- تحلیلی یا روشهای عددی صرفاً برای بدست آوردن جواب موجود مورد نظر بصورت تقریبی مورد استفاده قرار می گیرند و قادر به پیش بینی جوابهای چندگانه مسائل مقدار مرزی غیر خطی نمی باشند. بر این اساس ایدهء استفاده از روشهای عددی برای بررسی وجود و چندگانگی جوابهای مسائل مقدار مرزی در این رساله مطرح شده است. در این رساله ما روش آنالیز هموتوپی پیشگو (PHAM) را معرفی کرده ایم که بر اساس آن می توان پی به چندگانگی جوابهای مسائل مقدار مرزی غیر خطی از نوع معادلات دیفرانسیل معمولی برد. پایه اصلی این روش، روش آنالیز هموتوپی می باشد که در دهه اخیر برای بدست آوردن جواب تقریبی – تحلیلی به صورت سری برای معادلات دیفرانسیل مطرح شده است. در این روش با استفاده از پارامتری می توان همگرایی سری جواب را کنترل و سرعت بخشید، علاوه بر این می توان برای مسائلی که شامل قسمتهای غیر خطی قوی دارند بکار برد و جوابهای تقریبی مناسبی با دقت بالا بدست آورد. روش آنالیز هموتوپی پیشگو را می توان به آسانی روی معادلات دیفرانسیل معمولی غیر خطی با شرایط مرزی به کار برد. این روش علاوه بر پیش بینی چندگانگی مسائل مقدار مرزی قادر به محاسبه همزمان تقریبی- تحلیلی آنها نیز می باشد. بر این اساس برای استفاده های کاربردی در علوم و مهندسی این روش این امکان را می دهد که جوابهای ناشناخته ای از معادلات بدست آید که اساساً مورد علاقه می باشند. با توجه به وجود نرم افزار های قوی سیمبلیک امروزه، این روش ما را متقاعد می سازد که آن را روی معادلات غیر خطی بکار ببریم و مهمّتر اینکه خود را از گام های ملالت آور وجود و بررسی جواب مبرّا سازیم. در روش آنالیز هموتوپی پیشگو دو پارامتر

وجود دارد که نقش مهمّی در بررسی چندگانگی جوابها دارد، یکی از آنها پارامتر کنترل کننده همگرایی و دیگری پارامتر تجویز شده به مسئله می باشد. این روش مزیّت دیگری نیز دارد که تنها با یک حدس آغازی و یک عملگر خطی و یک تابع کمکی همه شاخه های جوابهای مساله را بدست می دهد. ساختار این رساله به شرح زیر است.

در فصل اول به بیان مقدمه ای بر روش آنالیز هموتوپی می پردازیم زیرا روشی که ارائه خواهد شده بر اساس این روش است. این فصل بر اساس مقالات زیر می باشد.

[1] S. Abbasbandy, M. Pakdemirli, E. Shivanian, Optimum Path of a Flying Object with Exponentially Decaying Density Medium, Z. Naturforsch. 2009; 64a: 431 – 438.

[2] S. Abbasbandy, E. Shivanian, Solution of Singular Linear Vibrational BVPs by the Homotopy Analysis Method, Journal of Numerical Mathematics and Stochastics, 20009; 1 (1): 77-84.

[3] S. Abbasbandy, E. Shivanian, A new analytical technique to solve Fredholm's integral equations, Numer Algor 2011; 56: 27–43.

[4] H. Vosughi, E. Shivanian, S. Abbasbandy, A new analytical technique to solve Volterra's integral equations, Mathematical methods in the applied sciences, 2011; 10(34): 1243-1253.

[5] S. Abbasbandy, E. Shivanian, Series Solution of the System of Integro-Differential Equations, Z. Naturforsch, 2009; 64a: 811 – 818.

در فصل دوم به معرفی روش و سپس بصورت کامل به آنالیز ریاضی آن پرداخته می شود و در فصل سوم چندین مدل کاربردی که اعتبار روش را تائید می کند، بررسی می شود. این دو فصل بر اساس مقالات زیر می باشد.

[6] S. Abbasbandy, E. Magyari, E. Shivanian, The homotopy analysis method for multiple solutions of nonlinear boundary value problems, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 2009;14: 3530–3536.

[7] S. Abbasbandy, E. Shivanian, Prediction of multiplicity of solutions of nonlinear boundary value problems: Novel application of homotopy analysis method, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 2010; 15: 3830–3846.

[8] S. Abbasbandy, E. Shivanian, Exact analytical solution of a nonlinear equation arising in heat transfer, Physics Letters A, 2010; 374: 567–574.

[9] S. Abbasbandy, E. Shivanian, K. Vajravelu, Mathematical properties of h-curve in the frame work of the homotopy analysis method Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 2011; 16: 4268–4275.

[10] S. Abbasbandy, E. Shivanian, Predictor homotopy analysis method and its application to some nonlinear problems, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 2011; 16: 2456–2468.

در فصل چهارم به مسائل مقدار مرزی غیر خطی که دارای شرط مرزی در بی نهایت می باشند، بصورت مختصر پرداخته می شود و روشی مبتنی بر شبه طیفی – هم محلی برای یک مساله مقدار مرزی غیر خطی ناشی از جریان تبادل حرارت مخلوط در ماده متخلخل که دارای شرایط مرزی در بی نهایت می باشد بکار گرفته می شود و جوابهای دوگانه آن بدست می آید که بر اساس مقاله زیر است.

[11] S. Abbasbandy, E. Shivanian, Multiple solutions of mixed convection in a porous medium on semi-infinite interval using pseudo-spectral collocation method, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 2011; 16: 2745–2752.

فهرست مطالب

فهرست عناوین پایان نامه شماره صفحه

فصل ۱(مقدمه ای بر روش آنالیز هموتوپی)..... ۱

1.1 معادله دگردیسی مرتبه صفر..... ۲

2.1 معادله دگردیسی مراتب بالا..... ۵

3.1 آنالیز همگرایی روش و کران خطا..... ۶

4.1 معادله دیفرانسیل معمولی: مسیر بهینه یک شیء شناور ۱۱

1.4.1 نتایج و بحث در حالت غیر خطی ضعیف ۱۳

2.4.1 نتایج و بحث در حالت غیر خطی قوی ۱۶

5.1 معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی: معادله ارتعاش خطی منفرد ۱۹

6.1 معادلات انتگرال فردهلم..... ۲۳

7.1 معادلات انتگرال ولترا..... ۳۱

8.1 معادلات انتگرال- دیفرانسیل..... ۴۰

فصل 2 (جوابهای چندگانه مسائل مقدار مرزی غیر خطی از نوع معمولی: آنالیز هموتوپی پیشگو)..... ۴۵

1.2 شرح روش آنالیز هموتوپی پیشگو..... ۴۷

2.2 آنالیز همگرایی روش ۵۲

فصل 3 (جوابهای چندگانه مسائل مقدار مرزی غیر خطی از نوع معمولی: کاربردها)..... ۷۰

1.3 مدل انتقال گرما..... ۷۱

1.1.3 جواب دقیق مدل..... ۷۱

2.1.3 جوابهای چندگانه به روش آنالیز هموتوپی پیشگو..... ۸۱

2.3 معادله براتو (قویاً غیر خطی)..... ۸۷

1.2.3 جواب دقیق مساله..... ۸۷

2.2.3 جوابهای چندگانه به روش آنالیز هموتوپی پیشگو ۹۰

3.3 جریان تبادل حرارت مخلوط در یک کانال عمودی..... ۹۵

1.3.3 جوابهای چندگانه به روش آنالیز هموتوپی پیشگو ۹۶

2.3.3 نتایج بیشتر..... ۱۰۳

4.3 مدل واکنش - نفوذ..... ۱۰۵

1.4.3 جواب دقیق مدل..... ۱۰۶

2.4.3 جوابهای چندگانه به روش آنالیز هموتوپی پیشگو ۱۰۷

فصل 4 (جوابهای چندگانه مسائل مقدار مرزی غیر خطی از نوع معمولی با شرایط مرزی در بی نهایت)..۱۱۴

1.4 مقدمه ای بر روش شبه طیفی – هم محلی ۱۱۵

2.4 مدل جریان تبادل حرارت..... ۱۲۱

3.4 فرایند بدست آوردن جوابهای چندگانه..... ۱۲۲

فصل 5 (نتیجه گیری و پیشنهادات)..... ۱۳۲

واژه نامه فارسی به انگلیسی..... ۱۳۵

واژه نامه انگلیسی به فارسی..... ۱۴۲

کتاب نامه..... ۱۴۹

فهرست جدول ها

جدول ۱-۱: مقایسه جواب دقیق از جواب تقریبی در حالت قوی غیر خطی مساله (1.40).....۱۸

جدول ۳-۱: جوابهای دقیق مساله مقدار مرزی (3.2)- (3.1) برای بعضی مقادیر n در بازه $(-2,-1)$.....۷۶

جدول ۳-۲: جوابهای دقیق مساله مقدار مرزی (3.2)- (3.1) برای بعضی مقادیر n در بازه $[-4,-2)$.....۷۸

جدول ۳-۳: محاسبه تقریبی $U_{25}(0)$ و $U''_{25}(0)$ برای مقادیر مختلف Ξ.....۱۰۵

جدول ۴-۱: محاسبه خطای مطلق جوابهای تقریبی $u(\eta)=f'(\eta)$ با $b=-0.6$ با $N=30$ برای مقادیر مختلف η....۱۳۰

جدول ۴-۲: محاسبه خطای مطلق جوابهای تقریبی $u(\eta)=f'(\eta)$ با $b=-1$ با $N=30$ برای مقادیر مختلف η.....۱۳۱

جدول ۴-۳: محاسبه خطای مطلق جوابهای تقریبی $u(\eta)=f'(\eta)$ با $b=-1.4$ با $N=30$. برای مقادیر مختلف η...۱۳۱

فهرست شکل ها

شکل ۱-۱: رسم $\hbar - \text{curve}$ برای $u'(0)$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 10$ با $\beta = 0.1$ و $\varepsilon = 0.1, 1, 5, 10$..... ۱۴

شکل ۱-۲: رسم $\hbar - curve$ برای $u''(0)$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 10$ با $\beta = 0.1$ و $\varepsilon = 0.1, 1, 5, 10$..... ۱۴

شکل ۱-۳: جواب تقریبی از مرتبه $M = 10$ با $\beta = 0.1$ و $\varepsilon = 0.1, 1, 5, 10$..... ۱۵

شکل ۱-۴: جواب تقریبی از مرتبه $M = 10$ با $\beta = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$ و $\varepsilon = 10$..... ۱۵

شکل ۱-۵: تابع خطای تقریبی (1.51) نسبت به هر دوی ε و $\hbar$ با $\beta = 0.1$..... ۱۶

شکل ۱-۶: (الف) رسم $\hbar - curve$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 40$ با $\beta = 1$ و $\varepsilon = 0.1$. (ب) تابع خطای جواب تقریبی از مرتبه $M = 40$ خط تیره $(\hbar = -0.4)$ خط چین $(\hbar = -0.8)$ نقطه چین $(\hbar = -1)$..... ۱۷

شکل ۱-۷: (الف) رسم $\hbar - curve$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 50$ با $\beta = 5$ و $\varepsilon = 0.1$. (ب) تابع خطای جواب تقریبی از مرتبه $M = 50$ خط تیره $(\hbar = -0.25)$ خط چین $(\hbar = -0.30)$ نقطه چین $(\hbar = -0.35)$..... ۱۷

شکل ۱-۸: (الف) رسم $\hbar - curve$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 50$ با $\beta = 0.1$ و $\varepsilon = 15$. (ب) تابع خطای جواب تقریبی از مرتبه $M = 50$ خط تیره $(\hbar = -0.35)$ خط چین $(\hbar = -0.40)$ نقطه چین $(\hbar = -0.50)$..... ۱۸

شکل ۱-۹: (الف) رسم $\hbar - curve$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 50$ با $\beta = 0.1$ و $\varepsilon = 20$. (ب) تابع خطای جواب تقریبی از مرتبه $M = 50$ خط تیره $(\hbar = -0.32)$ خط چین $(\hbar = -0.40)$ نقطه چین $(\hbar = -0.50)$..... ۱۸

شکل ۱-۱۰: رسم $\hbar - curve$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 30$ با $c = 5$ خط تیره $(\mathrm{U}''_{30,\mathrm{t}}(1,0))$ خط چین $(\mathrm{U}'''_{30,\mathrm{t}}(1,0))$..... ۲۱

شکل ۱-۱۱: جواب تقریبی از مرتبه $M = 30$ با $c = 5$ و $\hbar = -1$ و خطای باقیمانده آن..... ۲۲

شکل ۱-۱۲: جواب تقریبی از مرتبه $M = 30$ نسبت به زمان برای c های مختلف با $r = 15$..... ۲۲

شکل ۱-۱۳: رسم $\hbar - curve$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 15$، خط تیره $(\mathrm{U}'_{15}(0, \hbar))$ خط چین $(\mathrm{U}'''_{15}(0, \hbar))$..... ۲۹

شکل ۱-۱۴: تابع خطای جواب تقریبی از مرتبه $M = 15$ خط تیره $(\hbar = -0.60)$ خط چین $(\hbar = -0.65)$ نقطه چین $(\hbar = -0.50)$ ۲۹

شکل ۱-۱۵: رسم $\hbar - curve$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 30$ یعنی $U'_{30}(0, \hbar)$ ۳۰

شکل ۱-۱۶: تابع خطای جواب تقریبی از مرتبه $M = 30$ خط تیره $(\hbar = -0.15)$ خط چین $(\hbar = -0.20)$ نقطه چین $(\hbar = -0.10)$ ۳۱

شکل ۱-۱۷: رسم $\hbar - curve$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 15$، خط چین $(U_{15}(1, \hbar))$ خط تیره $(U'_{15}(1, \hbar))$ خط نقطه-چین $(U''_{15}(1, \hbar))$ ۳۷

شکل ۱-۱۸: تابع خطای جواب تقریبی از مرتبه $M = 10$ خط تیره $(\hbar = -0.60)$ خط چین $(\hbar = -0.80)$ نقطه چین $(\hbar = -0.40)$ ۳۸

شکل ۱-۱۹: رسم $\hbar - curve$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 10$، خط چین $U_{10}\left(\frac{\pi}{4}, \hbar\right)$ خط تیره $(U'_{10}(0, \hbar))$ خط نقطه-چین $(U''_{10}\left(\frac{\pi}{6}, \hbar\right))$ ۳۹

شکل ۱-۲۰: تابع خطای جواب تقریبی از مرتبه $M = 10$ خط تیره $(\hbar = -0.9)$ خط چین $(\hbar = -1)$ نقطه چین $(\hbar = -0.5)$ ۴۰

شکل ۱-۲۱: رسم $\hbar - curve$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 15$، خط چین $(V'''_{15}(0, \hbar))$ خط تیره $(U''_{15}(0, \hbar))$ ۴۳

شکل ۱-۲۲: تابع خطای جواب تقریبی از مرتبه $M = 10$ برای $U_M(x)$، خط تیره $(\hbar = 0.9)$ خط چین $(\hbar = 1)$ نقطه چین $(\hbar = 0.8)$ ۴۴

شکل ۱-۲۳: تابع خطای جواب تقریبی از مرتبه $M = 10$ برای $V_M(x)$، خط تیره $(\hbar = 0.83)$ خط چین $(\hbar = 1)$ نقطه چین $(\hbar = 0.7)$ ۴۴

شکل۲-۱: نمودار $G_{10}(\gamma, g_1(\hbar))$ بر حسب $\hbar$ برای مقادیر مختلف γ ۵۶

شکل۲-۲: نمودار $G_{10}(\gamma, g_2(\hbar))$ بر حسب $\hbar$ برای مقادیر مختلف γ ۵۷

شکل۲-۳: نمودار $G_{25}(\gamma, g_1(\hbar))$ بر حسب $\hbar$ برای مقادیر مختلف γ.....۵۸

شکل۲-۴: نمودار $G_{20}(\gamma, g_2(\hbar))$ بر حسب $\hbar$ برای مقادیر مختلف γ.....۵۸

شکل۲-۵: نمودار $G_{20}(\gamma, g(\hbar))$ بر حسب $\hbar$ برای مقادیر مختلف γ.....۶۲

شکل۲-۶: نمودار $G_{10}(\gamma, g(\hbar))$ بر حسب $\hbar$ برای مقادیر مختلف γ.....۶۳

شکل۳-۱: رسم پارامتر θ_0 بر حسب N بصورت ضمنی برای مقادیر مختلف n بر طبق (3.11).....۷۵

شکل۳-۲: حوابهای دوگانه مساله مقدار مرزی (3.2)- (3.1) برای n و N مشخص.....۷۷

شکل۳-۳: رسم پارامتر θ_0 بر حسب N بصورت ضمنی برای مقادیر مختلف n بر طبق (3.11).....۸۰

شکل۳-۴: حوابهای دوگانه مساله مقدار مرزی (3.2)- (3.1) برای n و N مشخص.....۸۰

شکل۳-۵: رسم پارامتر δ بر حسب ψ بصورت ضمنی بر طبق (3.17).....۸۲

شکل۳-۶: رسم پارامتر δ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (3.28).....۸۴

شکل۳-۷: مقایسه جواب تقریبی شاخه پایینی با دقیق، $\Theta_3(x)$ (قهوه ای) $\Theta_5(x)$ (آبی) $\Theta_{10}(x)$ (قرمز).....۸۵

شکل۳-۸: مقایسه جواب تقریبی شاخه بالایی با دقیق، $\Theta_3(x)$ (قهوه ای) $\Theta_5(x)$ (آبی) $\Theta_{10}(x)$ (قرمز).....۸۶

شکل۳-۹: مقایسه جواب دوگانه تقریبی از مرتبه $M = 35$ با جواب دوگانه دقیق.....۸۶

شکل۳-۱۰: رسم پارامتر α بر حسب λ بصورت ضمنی بر طبق (3.34).....۸۸

شکل۳-۱۱: رسم پارامتر $u'(0)$ بر حسب α بر طبق (3.35).....۸۹

شکل۳-۱۲: رسم پارامتر γ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (3.49).....۹۳

شکل۳-۱۳: مقایسه جواب تقریبی شاخه پایینی با دقیق، $\Theta_5(x)$ (قهوه ای) $\Theta_8(x)$ (آبی) $\Theta_{10}(x)$ (قرمز).....۹۴

شکل۳-۱۴: مقایسه جواب تقریبی شاخه بالایی با دقیق، $\Theta_{17}(x)$ (قهوه ای) $\Theta_{20}(x)$ (آبی) $\Theta_{22}(x)$ (قرمز).....۹۴

شکل۳-۱۵: مقایسه جواب دوگانه تقریبی از مرتبه $M = 20$ برای شاخه پایینی و از $M = 30$ برای شاخه بالایی با جواب دوگانه دقیق..... ۹۵

شکل۳-۱۶: رسم پارامتر δ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (3.66) برای $\Xi = 20$..... ۹۹

شکل۳-۱۷: رسم پارامتر δ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (3.66) برای $\Xi = 20$ (بزرگنمایی شکل ۳-۱۶)..... ۹۹

شکل۳-۱۸: رسم باقیمانده معادله (3.66) برای مقادیر مختلف $\hbar$ با $\Xi = 20$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 20$، خط چین $(\hbar = -0.8)$ خط تیره $(\hbar = -1)$خط نقطه- چین $(\hbar = -1.2)$..... ۱۰۰

شکل۳-۱۹: رسم پارامتر δ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (3.66) برای $\Xi = -20$..... ۱۰۰

شکل۳-۲۰: رسم پارامتر δ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (3.66) برای $\Xi = -20$ (بزرگنمایی شکل ۳-۱۹)..... ۱۰۱

شکل۳-۲۱: رسم باقیمانده معادله (3.66) برای مقادیر مختلف $\hbar$ با $\Xi = -20$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 20$، خط چین $(\hbar = -0.8)$ خط تیره $(\hbar = -1)$خط نقطه- چین $(\hbar = -1.2)$..... ۱۰۱

شکل۳-۲۲: رسم جوابهای تقریبی دوگانه برای $\Xi = 20$..... ۱۰۲

شکل۳-۲۳: رسم جوابهای تقریبی دوگانه برای $\Xi = -20$..... ۱۰۳

شکل۳-۲۴: رسم پارامتر δ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (3.66)، خط تیره $(\Xi = 50)$ نقطه چین $(\Xi = 100)$ خط چین $(\Xi = 150)$ خط نقطه- چین $(\Xi = 200)$..... ۱۰۴

شکل۳-۲۵: رسم پارامتر δ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (3.66)، خط تیره $(\Xi = -50)$ نقطه چین $(\Xi = -100)$ خط چین $(\Xi = -150)$ خط نقطه- چین $(\Xi = -200)$..... ۱۰۴

شکل۳-۲۶: رسم پارامتر γ بر حسب φ بصورت ضمنی بر طبق (3.71)..... ۱۰۷

شکل۳-۲۷: رسم پارامتر γ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (3.81) برای $M = 60$ و $\varphi = 0.7$..... ۱۱۰

شکل۳-۲۸: رسم پارامتر γ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (3.81) برای $M = 60$ و $\varphi = 0.6$..... ۱۱۰

شکل۳-۲۹: مقایسه جوابهای تقریبی شاخه پایینی $U_1(x)$، $U_3(x)$ و $U_5(x)$ با دقیق..... ۱۱۱

شکل۳-۳۰: مقایسه جوابهای تقریبی شاخه بالایی $U_1(x)$، $U_3(x)$ و $U_5(x)$ با دقیق..... ۱۱۲

شکل۳-۳۱: مقایسه جواب دوگانه تقریبی (نقاط گرد تیره) از مرتبه $M = 30$ با جواب دوگانه دقیق (خط تیره) متناظر با نقاط (A,B) در شکل ۳-۲۶..... ۱۱۲

شکل۳-۳۲: مقایسه جواب دوگانه تقریبی (نقاط گرد تیره) از مرتبه $M = 30$ با جواب دوگانه دقیق (خط تیره) متناظر با نقاط (C,D) در شکل ۳-۲۶..... ۱۱۳

شکل ۴-۱: رسم $f''(0)$ بر حسب b بر طبق (2.17)..... ۱۲۲

شکل ۴-۲: جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ برای $b = -1$ بر طبق (4.38)- (4.37)..... ۱۲۷

شکل ۴-۳: جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ برای $b = -0.6$ با $N = 30$..... ۱۲۷

شکل ۴-۴: جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ برای $b = -1$ با $N = 30$..... ۱۲۸

شکل ۴-۵: جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ برای $b = -1.4$ با $N = 30$..... ۱۲۸

شکل ۴-۶: خطای مطلق جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ برای $b = -0.6$ با $N = 30$..... ۱۲۹

شکل ۴-۷: خطای مطلق جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ برای $b = -1$ با $N = 30$..... ۱۲۹

شکل ۴-۸: خطای مطلق جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ برای $b = -1.4$ با $N = 30$..... ۱۳۰