دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات

عنوان:

روش برنامه‌ریزی آرمانی فازی در حل مسائل برنامه‌ریزی چندسطحی

نگارنده:

مرضیه موسوی

استاد راهنما:

دکتر منصور سراج

استاد مشاور:

دکتر حبیبه صادقی

دی ۱۳۸۸

دانشگاه شهید چمران اهواز

مدیریت تحصیلات تکمیلی

بسمه تعالی

نتیجه ارزشیابی پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

بدین وسیله گواهی می‌شود پایان‌نامه خانم **مرضیه موسوی** دانشجوی رشته ریاضی کاربردی (گرایش تحقیق در عملیات) از دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر به شماره دانشجویی **۸۶۱۴۱۰۵** تحت عنوان:

روش برنامه‌ریزی آرمانی فازی در حل مسائل برنامه‌ریزی چندسطحی

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در تاریخ **۸۸/۱۰/۲۲** توسط هیئت داوران مورد ارزشیابی قرار گرفت و با درجه عالی تصویب گردید.

۱– اعضای هیئت داوران	**مرتبه علمی**	**امضاء**
الف– استاد راهنما: دکتر منصور سراج	استادیار	امضاء
ب– استاد مشاور: دکتر حبیبه صادقی	استادیار	امضاء
ج– داور اول: دکتر نوراله نژاد صادقی	استادیار	امضاء
د– داور دوم: دکتر عبدالجبار بدیع‌الزمان	دانشیار	امضاء
ه– نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر هادی بصیرزاده	استادیار	امضاء
۲– مدیر گروه: دکتر سینا هدایتیان	استادیار	امضاء
۳– معاون پژوهشی–تحصیلات تکمیلی دانشکده:		
دکتر منصور سراج	استادیار	امضاء
۴– مدیر کل تحصیلات تکمیلی: دکتر رحیم پیغان	استاد	امضاء

چکیده

نام خانوادگی: موسوی	**نام:** مرضیه
عنوان پایان‌نامه: روش برنامه‌ریزی آرمانی فازی در حل مسائل برنامه‌ریزی چندسطحی	
استاد راهنما: دکتر منصور سراج	**استاد مشاور:** دکتر حبیبه صادقی
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد	
رشته: ریاضی کاربردی	**گرایش:** تحقیق در عملیات
محل تحصیل: دانشگاه شهید چمران اهواز	**دانشکده:** علوم ریاضی و کامپیوتر
تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۸۸/۱۰/۲۲	**تعداد صفحات:** ۱۳۸
واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی چندسطحی، برنامه‌ریزی فازی، برنامه‌ریزی آرمانی فازی، تابع عضویت، حد مجاز انحراف	

چکیده: در این رساله روشی برای حل مسائل برنامه‌ریزی چندسطحی در یک سازمان سلسله‌مراتبی بزرگ، با استفاده از روش برنامه‌ریزی آرمانی فازی مطرح شده است. با به‌کارگیری این روش، به یک جواب رضایت‌بخش برای مسأله چندسطحی دست می‌یابیم.

در این روش با مشخص کردن جواب‌های بهین انفرادی برای توابع هدف در هر سطح، سطوح آرمانی فازی برای اهداف در همه سطوح و نیز برای متغیرهای تصمیم تحت کنترل تصمیم‌گیرنده‌های سطوح بالا، تعیین می‌گردند. سپس با در نظر گرفتن حدود مجاز انحراف برای هر یک از سطوح آرمانی، توابع عضویت متناظرشان، تعریف می‌شوند. آن‌گاه روش برنامه‌ریزی آرمانی فازی برای دستیابی به بالاترین درجه عضویت هر یک از آرمان‌های فازی، توسط مینیمم کردن متغیرهای انحرافی منفی، به‌کار برده می‌شود.

در این‌جا دو روش برنامه‌ریزی فازی دیگر برای حل مسائل برنامه‌ریزی چندسطحی ارائه شده است. با مقایسه نتایج حاصل از این دو روش با روش برنامه‌ریزی آرمانی فازی نتیجه می‌گیریم که روش برنامه‌ریزی آرمانی فازی جواب‌های بهتری را نسبت به دو روش فازی دیگر ارائه می‌دهد.

فهرست مطالب

مقدمه

برنامه‌ریزی چندسطحی[1] ابزاری قوی برای مدل‌سازی و حل مسائل برنامه‌ریزی غیرمتمرکز[2] در یک ساختار سلسله‌مراتبی، می‌باشد. اما پیچیدگی محاسباتی آن بسیار زیاد است. در این نوع برنامه‌ریزی، چندین تصمیم‌گیرنده در سطوح مختلف قرار دارند و هر کدام تنها تعدادی از متغیرهای تصمیم را مشخص می‌کنند. در واقع هنگامی این مسائل مطرح می‌شوند که تصمیم‌گیرنده سطح یک، قادر به اتخاذ تصمیم در مورد تمام متغیرها نیست یا به‌عبارت دیگر اختیار تعیین تمام متغیرهای تصمیم را ندارد و مسأله تصمیم‌گیری غیرمتمرکز بدین صورت مطرح می‌شود.

برنامه‌ریزی چندسطحی از جمله مسائلی است که در سه دهه اخیر به‌طور جدی در تحقیق در عملیات مطرح شده است و عده بسیاری در مورد آن به تحقیق و بررسی پرداخته‌اند و غالباً با بیان تعاریف و قضایایی، به‌دنبال یافتن راه‌حل‌های صریح و کارا برای حل این مسائل بوده‌اند. برخی نیز در جهت به‌کارگیری این مدل‌ها در مسائل کاربردی تلاش کرده‌اند که موفقیت‌های هر دو گروه قابل توجه است.

توانایی برنامه‌ریزی چندسطحی برای بیان مسائل غیرمتمرکز سبب شده، کاربردهای فراوانی در زمینه‌های مختلف، از جمله سیاست‌گذاری‌های دولتی، طراحی شبکه‌های حمل و نقل، مسائل اقتصاد کشاورزی و ... داشته باشد.

همان‌طورکه گفته شد، حل مسائل برنامه‌ریزی چندسطحی دشوار است. بعضی از مهم‌ترین روش‌های حل موجود از قبیل جستجوی نقطه رأسی، روش مبتنی بر شرایط بهینگی

[1] Multilevel Programming

[2] Decenteralize Programming

کروش–کان–تاکر[۳] و روش‌های کاهشی[۴] [۵، ۶، ۱۲]، تنها برای حل مسائل بسیار ساده، کارایی دارند. برای غلبه بر این مشکلات، استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی فازی برای حل مسائل برنامه‌ریزی چندسطحی، مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفت [۲۱، ۲۵، ۲۷، ۲۸، ۳۰، ۳۱].
در این رساله روش برنامه‌ریزی آرمانی فازی[۵] برای حل مسائل برنامه‌ریزی چندسطحی مطرح شده در مقاله [۲۵]، شرح داده می‌شود. با به‌کارگیری این روش به یک جواب رضایت‌بخش[۶] برای مسأله چندسطحی دست می‌یابیم. برای فرمول‌بندی کردن مدل برنامه‌ریزی آرمانی فازی متناظر با مسائل برنامه‌ریزی چندسطحی، نخست با مشخص کردن جواب‌های بهین انفرادی برای هر یک از توابع هدف، سطوح آرمانی فازی برای اهداف در هر سطح و نیز برای متغیرهای تصمیم تحت کنترل تصمیم‌گیرنده‌های سطوح بالاتر، تعیین می‌گردند. سپس با در نظر گرفتن حدود مجاز انحراف برای هریک از سطوح آرمانی، توابع عضویت متناظرشان، تعریف می‌شوند. به‌عبارت دیگر متناظر با هر یک از آرمان‌های فازی یک تابع عضویت، تعیین می‌گردد. لذا هر چه درجه عضویت متناظر با یک آرمان فازی بیشتر باشد به‌معنای دستیابی بیشتر به آن آرمان است. بنابراین روش برنامه‌ریزی آرمانی فازی برای دستیابی به بالاترین درجه عضویت هر یک از آرمان‌های فازی توسط مینیمم کردن متغیرهای انحرافی منفی به‌کار برده می‌شود. اگر جواب به‌دست آمده از این روش، مورد رضایت همه تصمیم‌گیرنده‌ها واقع گردد، به این جواب یک جواب رضایت‌بخش گفته می‌شود. در غیر این صورت تصمیم‌گیرنده‌های سطوح بالا باید حدود مجاز انحراف جدیدی را برای متغیرهای تصمیم تحت کنترلشان، فراهم آورند تا این‌که یک جواب رضایت‌بخش برای همه تصمیم گیرنده‌ها، حاصل شود.
در فصل اول این رساله به معرفی نظریه مجموعه‌های فازی و مفاهیم اساسی مرتبط با آن پرداخته‌ایم. در فصل دوم، تصمیم‌گیری فازی و برنامه‌ریزی فازی خطی مورد بررسی قرار گرفته است. فصل سوم به معرفی برنامه‌ریزی آرمانی در حالت قطعی و نیز برنامه‌ریزی آرمانی فازی، می‌پردازد. فصل چهارم شامل معرفی فرم کلی مسائل برنامه‌ریزی چندسطحی و نیز مسائل

[۳] Karush-Kuhn-Tucker Condition
[۴] Descent Methods
[۵] Fuzzy Goal Programming Approach
[۶] Satisfactory Solution

برنامه‌ریزی دوسطحی غیرمتمرکز، می‌باشد. در این فصل ساده‌ترین نوع از مسائل برنامه‌ریزی چندسطحی یعنی مسائل برنامه‌ریزی دوسطحی خطی مورد بررسی قرار می‌گیرند و دو روش حل متداول این دسته از مسائل که یکی بر پایه شمارش رئوس و دیگری بر شرایط بهینگی کروش—کان—تاکر استوار است، شرح داده می‌شوند. در فصل پنجم، روش برنامه‌ریزی آرمانی فازی برای حل مسائل برنامه‌ریزی چندسطحی، توضیح داده می‌شود. به‌علاوه در این فصل، پیش از شرح این روش، دو روش برنامه‌ریزی فازی دیگر نیز برای حل مسائل برنامه‌ریزی چندسطحی آورده شده است و نتایج حاصل از این دو روش با روش برنامه‌ریزی آرمانی فازی، مقایسه می‌گردد.

فصل ۱

نظریه مجموعه‌های فازی

۱.۱ مجموعه‌های کلاسیک و معرفی مجموعه‌های فازی

در نظریه کلاسیک، یک مجموعه، گردایه‌ای از اشیاء معین و متمایز است که این اشیاء، عناصر نام دارند و گوییم عضوهای مجموعه می‌باشند. در مورد مجموعه‌های کلاسیک می‌توانیم به‌طور قطع بگوییم که هر عنصر عضو مجموعه هست یا نه. گیریم X مجموعه جهانی[۱] و A یک مجموعه کلاسیک در X باشد. راه‌های مختلفی برای نمایش این مجموعه وجود دارد که اولین نحوه نمایش، فهرست عناصر آن مجموعه است:

$$A = \{x_۱, x_۲, ..., x_n\}$$

دومین نحوه نمایش، تعریف خصوصیات عناصر مجموعه می‌باشد:

$$A = \{x \in X | \text{ خاصیت } p \text{ را داشته باشد } x\}$$

[۱] Universal Set

و سومین نحوه نمایش مجموعه، استفاده از تابع مشخصه[۲] است. تابع مشخصه یک مجموعه، به‌صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$\mu_A : X \longrightarrow \{۰, ۱\}$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases}$$

تابع مشخصه، عناصر مجموعه جهانی X را به دو مقدار صفر و یک، تصویر می‌کند. عناصری که عضو مجموعه A هستند، مقدار یک و در غیر این صورت مقدار صفر می‌گیرند. مجموعه A از لحاظ ریاضی معادل تابع مشخصه $\mu_A(x)$ بوده و بنابراین با معلوم بودن $\mu_A(x)$، مجموعه A نیز معلوم خواهد بود.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود در مجموعه‌های کلاسیک، یک عنصر یا عضو مجموعه مورد نظر هست یا نیست، یعنی از این دو حالت خارج نیست. اگر عنصر مورد نظر عضو مجموعه باشد ۱۰۰٪ عضو آن است و اگر عضو آن نباشد ۱۰۰٪ عضو آن نیست.

با توجه به مطالب فوق، مجموعه‌های کلاسیک برای مفاهیمی مناسبند که به‌طور قطعی و مشخص قابل تعریف هستند، در حالی که مفاهیمی وجود دارند که نمی‌توان به‌طور مشخص و قطعی برای آن‌ها حد و مرزی مشخص کرد و بر اساس آن مجموعه کلاسیک را تشکیل داد. به‌عنوان مثال به موارد ذیل توجه نمایید:

- مجموعه افراد مسن
- مجموعه اعداد حقیقی نزدیک به صفر
- مجموعه اتومبیل‌ها با مصرف سوخت متوسط

و بسیاری از موارد مشابه دیگر که در دنیای واقعی وجود دارند. این موارد نشان می‌دهند که بعضی مجموعه‌ها دامنه روشن و مشخصی ندارند. در حالی که مجموعه‌های کلاسیک نیازمند داشتن یک ویژگی به‌خوبی تعریف شده، می‌باشند. برای حل این مشکل نظریه مجموعه‌های کلاسیک، مجموعه‌های فازی ارائه گردیدند.

[۲] Charecteristic Function

تعریف ۱.۱.۱ مجموعه فازی [۳] **:** گیریم X یک مجموعه جهانی باشد که عناصر آن با x نشان داده می‌شود؛ یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ در X، به‌وسیله یک تابع $\mu_{\tilde{A}}(x)$ که مقادیری در بازه $[0,1]$ اختیار می‌کند، مشخص می‌شود. $\mu_{\tilde{A}}(x)$، تابع عضویت [۴] یا درجه عضویت x در $\tilde{A}$ است.

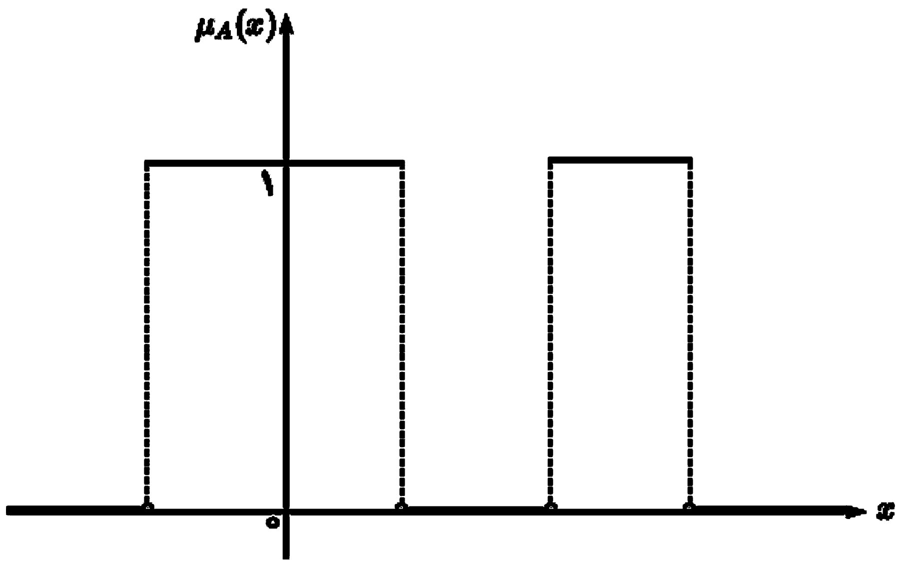
بنابراین یک مجموعه فازی تعمیم یک مجموعه کلاسیک است که اجازه می‌دهد تابع عضویت هر مقداری را در بازه $[0,1]$، اختیار کند. در حالی که یک مجموعه کلاسیک فقط می‌توانست مقادیر عضویت ۰ و ۱ را داشته باشد.

برای بیان این‌که یک مجموعه مورد نظر، مجموعه فازی است از علامت $(\sim)$ استفاده می‌شود؛ یعنی A بیانگر یک مجموعه کلاسیک و $\tilde{A}$ بیانگر یک مجموعه فازی است.

یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ در X می‌تواند با یک مجموعه از زوج‌های مرتب x و مقدار عضویت آن، نمایش داده شود و به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) |\ x \in X\} \qquad (۱.۱)$$

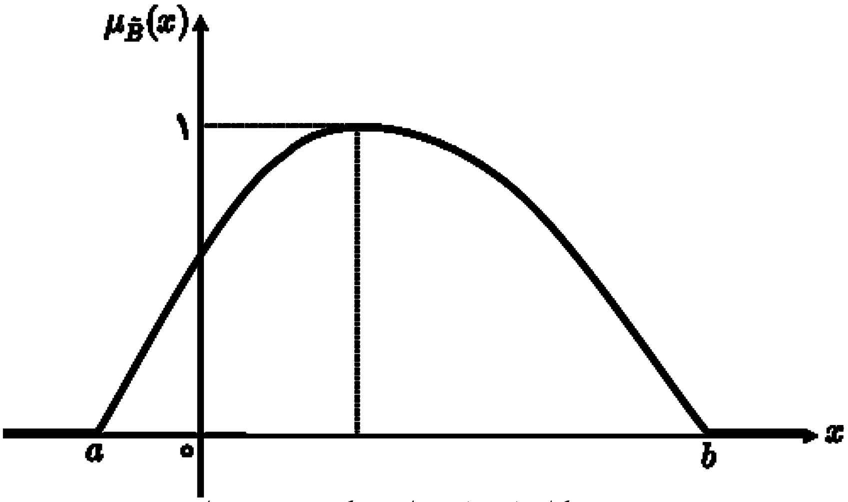
مثال ۱.۱ در شکل (۱.۱)، یک مجموعه قطعی و در شکل (۲.۱)، یک مجموعه فازی در $\mathbb{R}$، نشان داده شده است.



شکل (۱.۱): نمایش یک مجموعه قطعی

[۳] Fuzzy Set

[۴] Membership Function

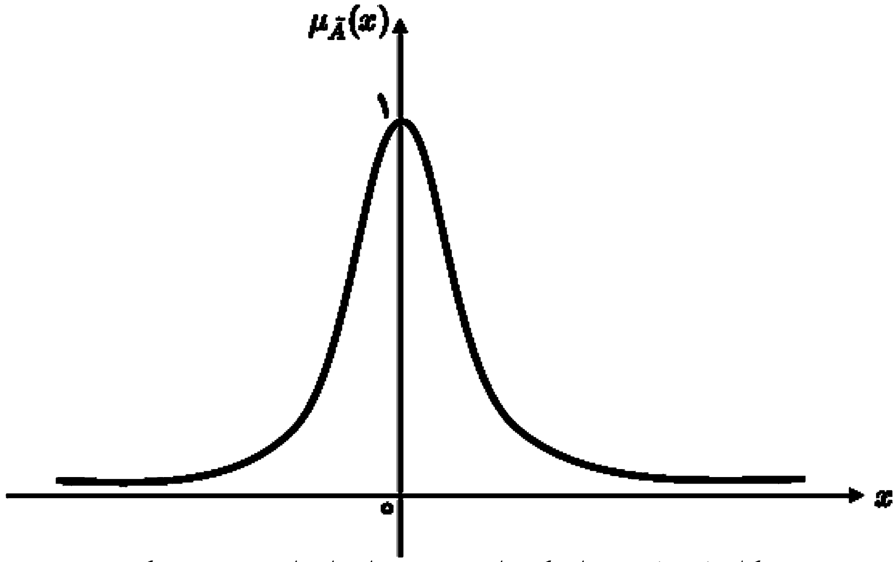


شکل (۲.۱): نمایش یک مجموعه فازی

در شکل (۲.۱)، درجه عضویت هر عدد حقیقی $x \in \mathbb{R}$ در مجموعه فازی $\tilde{B}$ در بازه (a, b) بزرگتر از صفر و خارج از بازه (a, b) برابر صفر است. درجه عضویت هر عدد حقیقی $x \in \mathbb{R}$ در مجموعه قطعی A یا صفر است یا یک.

مثال ۲.۱ فرض کنید مجموعه فازی $\tilde{A}$، مجموعه «اعداد حقیقی نزدیک به صفر» تعریف گردد. تابع عضویت آن می‌تواند به شرح ذیل تعریف شود که در شکل (۳.۱)، به تصویر کشیده شده است.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{۱}{۱ + ۱۰x^{۲}} \ , \qquad \tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in \mathbb{R}\}$$



شکل (۳.۱): نمودار یک تابع عضویت از «اعداد حقیقی نزدیک به صفر»

نکته: در بیان مجموعه‌های فازی زوج‌های مرتبی که درجه عضویتشان صفر است، نشان داده نمی‌شوند.

۲.۱ عملیات در مجموعه‌های فازی

در این بخش عملیات اساسی مکمل[۵] ، اشتراک[۶] و اجتماع[۷] بر روی مجموعه‌های فازی معرفی می‌شوند. اما پیش از آن مجموعه فازی تهی، معادل بودن مجموعه‌های فازی و زیرمجموعه بودن در نظریه مجموعه‌های فازی، تعریف می‌گردند.

تعریف ۱.۲.۱ مجموعه فازی تهی: یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ تهی است اگر درجه عضویت همه عناصرش صفر باشد یعنی برای تمامی مقادیر $x \in X$، $\mu_{\tilde{A}}(x) = ۰$.

تعریف ۲.۲.۱ معادل بودن مجموعه‌های فازی: دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ معادل هستند اگر و فقط اگر برای تمامی مقادیر $x \in X$، $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$.

تعریف ۳.۲.۱ زیرمجموعه بودن: مجموعه فازی $\tilde{A}$ زیرمجموعه $\tilde{B}$ است و می‌نویسیم $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ اگر و فقط اگر برای تمامی مقادیر $x \in X$، $\mu_{\tilde{A}}(x) \leqslant \mu_{\tilde{B}}(x)$.

تعریف ۴.۲.۱ مکمل مجموعه فازی: مکمل مجموعه فازی $\tilde{A}$، مجموعه فازی $\tilde{A}^c$ در X است که تابع عضویت آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = ۱ - \mu_{\tilde{A}}(x) \quad , \quad \forall x \in X$$

گاهی $\tilde{A}^c$ را با $\bar{\tilde{A}}$ نیز نمایش می‌دهند.

تعریف ۵.۲.۱ اشتراک مجموعه‌های فازی: اشتراک مجموعه‌های فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ یک مجموعه فازی $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ در X است که تابع عضویت عناصرش با به‌کارگیری عملگر حداقل به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x)\ ,\ \mu_{\tilde{B}}(x)\}\ .$$

[۵] Complement
[۶] Intersection
[۷] Union

تعریف ۶.۲.۱ اجتماع مجموعه‌های فازی: اجتماع مجموعه‌های فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ یک مجموعه فازی $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ در X است که تابع عضویت عناصرش با به‌کارگیری عملگر حداکثر به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x)\ ,\ \mu_{\tilde{B}}(x)\}\ .$$

لازم به‌ذکر است برای اشتراک و اجتماع مجموعه‌های فازی عملگرهای فازی دیگر نیز تعریف شده است؛ منتهی عملگرهای حداقل و حداکثر معروف‌ترین و کاربردی‌ترین آن‌ها می‌باشند.
به دلیل خاصیت شرکت‌پذیری عملگرهای min و max، تعاریف اجتماع و اشتراک دو مجموعه فازی را می‌توان به هر تعداد متناهی از مجموعه‌های فازی، تعمیم داد. هم‌چنین تمام خواص مجموعه‌های کلاسیک، به‌غیر از دو خاصیت زیر، برای مجموعه‌های فازی نیز صادق هستند:

$$A \cup A^c = X \quad \text{(قانون اجتماع با مکمل)}$$

$$A \cap A^c = \phi \quad \text{(قانون تناقض)}$$

قانون اجتماع با مکمل و قانون تناقض تنها خواص مجموعه‌های قطعی می‌باشند که در مورد مجموعه‌های فازی برقرار نیستند.

۳.۱ تعاریف و مفاهیم اساسی مرتبط با مجموعه‌های فازی

اکنون چند تعریف و مفهوم اساسی مرتبط با یک مجموعه فازی را معرفی می‌کنیم.
تعریف ۱.۳.۱ مجموعه‌های فازی گسسته[۸] و پیوسته[۹] : اگر مجموعه عناصر یک مجموعه فازی، گسسته باشند به آن مجموعه فازی گسسته گفته می‌شود که درجه عضویت هر یک از عناصر آن، با یک عدد بین صفر و یک بیان می‌شود. نحوه نمایش مجموعه فازی گسسته می‌تواند

[۸] Discrete
[۹] Contineous

به‌صورت مجموعه زوج‌های مرتب (۱.۱) و یا به‌صورت زیر باشد:

$$\tilde{A} = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_2)}{x_2} + ...$$

که در حالت کلی به فرم زیر نمایش داده می‌شود:

$$\tilde{A} = \sum_{x \in X} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x}$$

در این‌جا نماد $\sum$، به معنی جمع نیست بلکه اجتماع تمامی نقاط $x \in X$ و درجه عضویت متناظرشان $\mu_{\tilde{A}}(x)$، را نشان می‌دهد.

اگر مجموعه عناصر یک مجموعه فازی، پیوسته باشد (مثلاً $X = \mathbb{R}$)، به آن مجموعه فازی پیوسته گویند و معمولاً درجه عضویت عناصر آن به‌صورت یک تابع بیان می‌شود. مجموعه‌های فازی پیوسته علاوه بر نمایش مجموعه زوج‌های مرتب (۱.۱)، به‌صورت زیر نیز می‌توانند نمایش داده شوند:

$$\int_x \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x}$$

در این‌جا نماد $\int$، به‌معنای انتگرال نیست بلکه اجتماع تمامی نقاط $x \in X$ و مقدار تابع عضویت متناظرشان $\mu_{\tilde{A}}(x)$، را نشان می‌دهد.

تعریف ۲.۳.۱ تکیه‌گاه[۱۰] یک مجموعه فازی: تکیه‌گاه مجموعه فازی $\tilde{A}$ در X، یک مجموعه غیرفازی است و شامل تمامی عضوهایی از X می‌باشد که دارای درجه عضویت مثبت هستند و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Supp(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}.$$

از تعریف فوق نتیجه می‌شود که اگر تکیه‌گاه یک مجموعه فازی تهی باشد، آن مجموعه فازی تهی می‌باشد.

تعریف ۳.۳.۱ منفرد فازی[۱۱] : یک منفرد فازی، یک مجموعه فازی است که تکیه‌گاه آن یک

[۱۰] Support

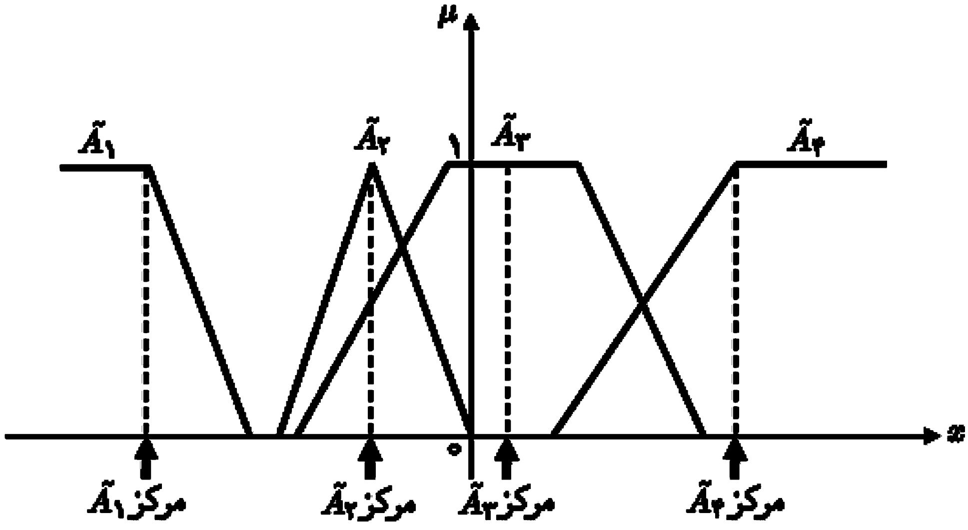
[۱۱] Fuzzy Singleton

نقطه واحد در X می‌باشد.

تعریف ۴.۳.۱ هسته[۱۲] یک مجموعه فازی: هسته یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ در X، یک مجموعه غیرفازی است و شامل تمامی عضوهایی از X می‌باشد که دارای درجه عضویت یک می‌باشند:

$$core(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}.$$

تعریف ۵.۳.۱ مرکز[۱۳] یک مجموعه فازی: مرکز یک مجموعه فازی بدین صورت تعریف می‌شود: اگر مقدار میانگین تمام نقاطی که در آن‌ها تابع عضویت مجموعه فازی به حداکثر مقدار خود می‌رسد، محدود باشد در آن صورت این مقدار میانگین، مرکز مجموعه فازی می‌باشد و اگر مقدار میانگین مثبت بی‌نهایت (منفی بی‌نهایت) باشد، در آن صورت مرکز به‌صورت کوچکترین (بزرگترین) نقطه‌ای که در آن نقطه، تابع به حداکثر مقدار خود می‌رسد، تعریف می‌شود. شکل (۴.۱)، مرکز چند مجموعه فازی را نشان می‌دهد.



شکل (۴.۱): نمایش مرکز چند مجموعه فازی

تعریف ۶.۳.۱ نقطه تقاطع: نقطه تقاطع یک مجموعه فازی، نقطه‌ای در X است که در آن مقدار تابع عضویت برابر ۰/۵ گردد.

[۱۲] Core

[۱۳] Center

تعریف ۷.۳.۱ ارتفاع[۱۴] مجموعه فازی: ارتفاع یک مجموعه فازی برابر حداکثر درجه عضویت عناصر آن مجموعه است. به عبارت دیگر

$$h(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \ \mu_{\tilde{A}}(x).$$

تعریف ۸.۳.۱ مجموعه فازی نرمال[۱۵] : مجموعه فازی $\tilde{A}$ نرمال است اگر ارتفاع آن برابر یک باشد. یعنی $h(\tilde{A}) = ۱$؛ در غیر این صورت این مجموعه فازی، زیرنرمال نامیده می‌شود.

تعریف ۹.۳.۱ عدد اصلی[۱۶] یک مجموعه فازی: برای یک مجموعه فازی متناهی $\tilde{A}$، عدد اصلی آن ($|\tilde{A}|$) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

عدد اصلی نسبی[۱۷] مجموعه فازی $\tilde{A}$ نیز به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$||\tilde{A}|| = \frac{|\tilde{A}|}{|X|}$$

واضح است که عدد اصلی نسبی یک مجموعه فازی به عدد اصلی مجموعه جهانی آن بستگی دارد. بنابراین اگر قصد مقایسه دو مجموعه فازی با عدد اصلی نسبی آن‌ها را داریم، می‌بایست مجموعه جهانی آن‌ها یکسان باشد.

عدد اصلی یک مجموعه فازی پیوسته در فضای X نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\tilde{A}| = \int_x \mu_{\tilde{A}}(x) dx.$$

تعریف ۱۰.۳.۱ α—برش[۱۸] در مجموعه‌های فازی: α—برش یک مجموعه فازی $\tilde{A}$، یک مجموعه غیرفازی A_α است که شامل تمام عضوهایی از X می‌باشد که مقادیر عضویتی بزرگتر یا مساوی α دارند ($\alpha \in (۰, ۱]$)؛ یعنی

$$A_\alpha = \{x \in X | \ \mu_{\tilde{A}}(x) \geqslant \alpha\}$$

[۱۴] Height

[۱۵] Normal

[۱۶] Cardinality

[۱۷] Relative Cardinality

[۱۸] α-Cut

گاهی نیز از $\alpha-$برش قوی استفاده می‌شود که با A'_α نشان داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$A'_\alpha = \{x \in X|\ \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}.$$

$\alpha-$برش‌ها، توصیفی از مجموعه‌های فازی با استفاده از مجموعه‌های قطعی ارائه می‌دهند و دارای ویژگی‌های زیر هستند:

۱. خانواده $\{A_\alpha | \alpha \in (0, 1]\}$ یکنواست یعنی: $0 < \alpha \leqslant \beta \leqslant 1 \Longrightarrow A_\beta \subseteq A_\alpha$

۲. $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Longleftrightarrow A_\alpha \subseteq B_\alpha\ , \forall \alpha \in (0, 1]$

۳. $(\tilde{A} \cup \tilde{B})_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha\ , (\tilde{A} \cap \tilde{B})_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$.

۴.۱ مجموعه‌های فازی محدب

هنگامی که مجموعه جهانی X، فضای n بعدی $\mathbb{R}^n$ باشد، مفهوم تحدب را می‌توان به مجموعه‌های فازی تعمیم داد.

تعریف ۱.۴.۱ مجموعه فازی محدب[۱۹] : یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ در $\mathbb{R}^n$ محدب گفته می‌شود اگر و فقط اگر $\alpha-$برش‌های آن (A_α) برای هر مقدار α در محدوده $(0, 1]$، یک مجموعه محدب باشد.

قضیه زیر تعریف معادلی برای یک مجموعه فازی محدب ارائه می‌کند.

قضیه ۱.۴.۱ یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ در $\mathbb{R}^n$، یک مجموعه فازی محدب است اگر و فقط اگر برای هر $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ و $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \geqslant \min[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)] \qquad (۲.۱)$$

اثبات. فرض کنیم $\tilde{A}$ محدب باشد. گیریم برای $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ، $\alpha = \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$ پس $x_1, x_2 \in A_\alpha$ و با توجه به این‌که A_α محدب است داریم:

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in A_\alpha\ , \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

[۱۹] Convex Fuzzy Sets

بنابراین

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \alpha = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$$

برعکس؛ فرض کنیم $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ و $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ نامساوی (۲.۱)، برقرار باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که برای هر $\alpha \in (0, 1]$، A_α، محدب است.

گیریم α یک عنصر دلخواه از محدوده $(0, 1]$ باشد، نشان می‌دهیم که A_α محدب است.

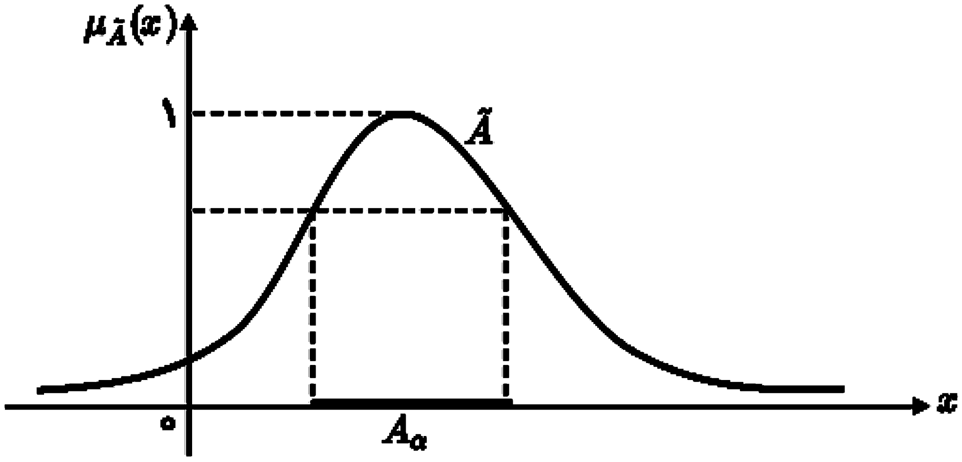
$$\forall x_1, x_2 \in A\alpha \qquad (i.e \ , \ \mu_{\tilde{A}}(x_1) \geqslant \alpha \ , \ \mu_{\tilde{A}}(x_2) \geqslant \alpha)$$

با توجه به نامساوی (۲.۱)، داریم:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\} \geqslant \alpha$$

بنابراین $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A_\alpha$ و این یعنی A_α محدب است و چون α را از اول دلخواه انتخاب کردیم لذا $\tilde{A}$ محدب است. □

شکل‌های (۵.۱) و (۶.۱)، به ترتیب یک مجموعه فازی محدب و یک مجموعه فازی نامحدب را نمایش می‌دهند.



شکل (۵.۱): نمایش یک مجموعه فازی محدب