تشکر و قدردانی

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان این عرصه مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.
پس از پیمودن راه‌های فراوان، با حضور شیرین اساتید عزیزم و راهنمایی‌هایشان و نگاه‌های پدر و مادر مهربانم، با چشم‌های پر از برق شوق و گرمی حضورشان، که خستگی‌های این راه را به امید و روشنی تبدیل کردند، اکنون با احترام فراوان به پاس همه تلاش‌های این عزیزان برای موفقیت من، این پایان‌نامه را تقدیم می‌کنم...
به پدر و مادرم به خاطر همه‌ی تلاش‌های محبت آمیزی که در دوران مختلف زندگی‌ام انجام داده‌اند و با مهربانی چگونه زیستن را به من آموخته‌اند.
به برادرانم که همواره در طول تحصیل متحمل زحماتم بودند و تکیه‌گاه من در مواجه با مشکلات و وجودشان مایه دلگرمی من است.
به استاد گرامی‌ام خانم دکتر بهناز عمومی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند و بدون کمک ایشان این پایان‌نامه به نتیجه مطلوب نمی‌رسید.
به آنان که در راه کسب دانش راهنمایم بودند از جمله دکتر رامین جوادی که زحمت مشاوره پایان‌نامه‌ام را نیز بر عهده گرفتند.
و در پایان به همه آنان که نفس خیرشان و دعای روح پرورشان بدرقه‌ی راهم بود.
پروردگارا حسن عاقبت، سلامت و سعادت را برای آنان مقدر نما و توفیق خدمتی سرشار از شور و نشاط و همراه و همسو با علم و دانش و پژوهش جهت رشد و شکوفایی ایران کهنسال عنایت بفرما.

شهریور ۱۳۹۳

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی کاربردی خانم فاطمه کیانی
تحت عنوان

رنگ‌آمیزی منصفانه‌ی گراف‌ها

در تاریخ ۲۲ /۶ /۹۳ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱– استاد راهنما   دکتر بهناز عمومی

۲– استاد مشاور   دکتر رامین جوادی

۳– استاد داور۱   دکتر غلامرضا امیدی

۴– استاد داور۲   دکتر محمدرضا عبودی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده   دکتر فرید بهرامی

تشکر و قدردانی

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان این عرصه مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

پس از پیمودن راه‌های فراوان، با حضور شیرین اساتید عزیزم و راهنمایی‌هایشان و نگاه‌های پدر و مادر مهربانم، با چشم‌های پر از برق شوق و گرمی حضورشان، که خستگی‌های این راه را به امید و روشنی تبدیل کردند، اکنون با احترام فراوان به پاس همه تلاش‌های این عزیزان برای موفقیت من، این پایان‌نامه را تقدیم می‌کنم...

به پدر و مادرم به خاطر همه‌ی تلاش‌های محبت آمیزی که در دوران مختلف زندگی‌ام انجام داده‌اند و با مهربانی چگونه زیستن را به من آموخته‌اند.

به برادرانم که همواره در طول تحصیل متحمل زحماتم بودند و تکیه‌گاه من در مواجه با مشکلات و وجودشان مایه دلگرمی من است.

به استاد گرامی‌ام خانم دکتر بهناز عمومی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند و بدون کمک ایشان این پایان‌نامه به نتیجه مطلوب نمی‌رسید.

به آنان که در راه کسب دانش راهنمایم بودند از جمله دکتر رامین جوادی که زحمت مشاوره پایان‌نامه‌ام را نیز بر عهده گرفتند.

و در پایان به همه آنان که نفس خیرشان و دعای روح پرورشان بدرقه‌ی راهم بود.

پروردگارا حسن عاقبت، سلامت و سعادت را برای آنان مقدر نما و توفیق خدمتی سرشار از شور و نشاط و همراه و همسو با علم و دانش و پژوهش جهت رشد و شکوفایی ایران کهنسال عنایت بفرما.

شهریور ۱۳۹۳

فهرست مطالب

چکیده

فرض کنید G یک گراف متناهی، غیرجهت‌دار و ساده با مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ باشد. یک k-رنگ‌آمیزی رأسی از گراف G، یعنی تخصیص k رنگ به رئوس G به گونه‌ای که رأس‌های مجاور هم رنگ نباشند. اگر در گراف G یک k-رنگ‌آمیزی وجود داشته باشد به‌طوری‌که اختلاف اندازه‌ی کلاس‌های رنگی، حداکثر یک باشد، آنگاه گراف G را k-رنگ‌پذیر منصفانه گویند. کوچکترین عدد صحیح k که به ازای آن گراف G، k-رنگ‌پذیر منصفانه است را عدد رنگی منصفانه گویند و با نماد $\chi_=(G)$ نشان می‌دهند. رنگ‌آمیزی منصفانه اولین بار در سال ۱۹۷۳ توسط میر معرفی شده است. میر حدس زد که برای هر گراف همبند G، به جز گراف کامل و دور فرد، $\chi_=(G) \leq \Delta(G)$. این حدس به حدس رنگ‌آمیزی منصفانه (ECC) معروف شد و مورد توجه محققان قرار گرفت.

برخلاف رنگ‌آمیزی رأسی، اگر گرافی دارای یک k-رنگ‌آمیزی منصفانه باشد، لزوماً دارای $(k+1)$-رنگ‌آمیزی منصفانه نیست. به عبارت دیگر گراف‌هایی با عدد رنگی منصفانه کمتر از $\Delta(G)$ وجود دارند که دارای $\Delta(G)$-رنگ‌آمیزی منصفانه نیستند. چن و همکارانش در سال ۱۹۹۴ حدس زدند که اگر G یک گراف همبند غیر از گراف کامل K_n و دور فرد C_{2n+1} و گراف دوبخشی کامل $K_{2n+1,2n+1}$ باشد، آنگاه G، $\Delta(G)$-رنگ‌پذیر منصفانه است. این حدس به حدس Δ-رنگ‌آمیزی منصفانه $(E\Delta CC)$ معروف شد. مشاهده می‌شود که $(E\Delta CC)$ قوی‌تر از (ECC) است.

در این پایان‌نامه ضمن مروری بر اهمیت حدس Δ-رنگ‌آمیزی منصفانه برای کلاس‌های خاصی از گراف‌ها از جمله گراف‌های دوبخشی، درخت‌ها، گراف‌های کنسر، گراف‌های بازه‌ای، گراف‌های سری-موازی، گراف‌های با تباهندگی کم و گراف‌های با عرض درختی کران‌دار، به طور ویژه به بررسی دقیق $(E\Delta CC)$ برای گراف‌های مسطح و گراف‌های مسطح بیرونی می‌پردازیم.

فصل ۱

مقدمه

در این فصل ابتدا مفاهیم اولیه و نمادهای استفاده شده در این پایان‌نامه را بیان می‌کنیم. سپس به اختصار به معرفی موضوع پایان‌نامه و تاریخچه آن می‌پردازیم. در انتها نیز مروری بر مطالب بیان شده در هر فصل پایان‌نامه خواهیم داشت.

۱.۱ تعاریف اولیه

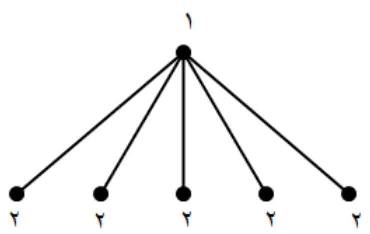
گراف G عبارت است از دوتایی مرتب $(V(G), E(G))$ شامل مجموعه $V(G)$ از رأس‌ها و مجموعه $E(G)$، مجزا از $V(G)$، از یال‌ها، به همراه یک تابع وقوع ψ_G که به هر یال یک دوتایی نامرتب (نه لزوماً متمایز) از رأس‌های G اختصاص می‌دهد. اگر e یک یال و u و v دو رأسی باشند که $\psi_G(e) = \{u, v\}$، آنگاه یال e، دو رأس u و v را به هم وصل می‌کند و به این دو رأس، رأس‌های انتهایی یال e می‌گویند. تعداد رأس‌ها و یال‌های گراف G را به ترتیب مرتبه و اندازه G می‌نامند. در این پایان‌نامه مرتبه‌ی گراف را با نماد $|G|$، گاهی به اختصار با n و اندازه‌ی گراف را با نماد $|E(G)|$، و گاهی به اختصار با $e(G)$ نشان می‌دهیم. به یالی که دو انتهای آن متمایز نباشد، طوقه و به یال‌هایی که دو انتهای یکسان دارند، یال موازی گفته می‌شود. گرافی که فاقد طوقه و یال موازی باشد، گراف ساده نام دارد. یک گراف، نابدیهی گفته می‌شود اگر شامل حداقل یک یال باشد. گرافی که مجموعه رأس‌ها و یال‌های آن متناهی باشند، گراف متناهی نامیده می‌شود. گراف‌های مورد نظر در این پایان‌نامه، ساده و متناهی هستند.
به تعداد یال‌های واقع بر رأس v، درجه‌ی آن رأس گفته می‌شود و با نماد $\deg_G(v)$ یا به اختصار $\deg(v)$، نشان داده می‌شود. اگر $\deg_G(v) = ۰$، آنگاه به v، رأس تنها می‌گویند. گرافی که درجه‌ی همه‌ی رأس‌های آن k باشد را گراف k-منظم نامند. بیشترین و کمترین درجه رأس در گراف به ترتیب با نماد $\Delta(G)$ و

$\delta(G)$ نشان داده می‌شود. به دو رأس انتهایی یک یال، دو رأس واقع بر آن یال و به این دو رأس مجاور یا همسایه گفته می‌شود. مجموعه رأس‌های مجاور با رأس v در گراف G با نماد $N_G(v)$ نشان داده می‌شود. اگر u و v دو رأس انتهایی یال e باشند، آنگاه یال e را به صورت uv نشان می‌دهند.
گراف‌های K_n و C_n و P_n به ترتیب نشان دهنده‌ی یک گراف کامل، یک دور و یک مسیر روی n رأس می‌باشند. گراف $K_{m,n}$ نیز نشان دهنده‌ی یک گراف دوبخشی کامل است که بخش‌های آن به ترتیب از اندازه m و n هستند. یک گراف r-بخشی نامیده می‌شود اگر بتوان مجموعه رئوس آن را به r مجموعه‌ی مستقل $V_1, V_2, ..., V_r$ افراز کرد و r-بخشی کامل $K_{n_1,n_2,...,n_r}$ نامیده می‌شود اگر هر رأس در V_i مجاور با هر رأس در V_j باشد که $i \neq j$ و $|V_i| = n_i \geq 1$ برای هر $1 \leq i \leq r$. به طور معمول فرض می‌شود که $r \geq 2$ و $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_r$. یک گراف چندبخشی کامل نامیده می‌شود اگر برای یک r، r-بخشی کامل باشد. گرافی که شامل n رأس تنها است با نماد I_n نشان داده می‌شود.
$\lceil x \rceil$ و $\lfloor x \rfloor$ به ترتیب نشان دهنده‌ی کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از x و بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از x هستند.

دو گراف G و H، مجزا\گفته می‌شوند اگر هیچ رأس مشترکی نداشته باشند. اجتماع دو گراف مجزای G و H، که با نماد $G \cup H$، نشان داده می‌شود گرافی است که مجموعه رئوس آن $V(G) \cup V(H)$ و مجموعه یال‌های آن $E(G) \cup E(H)$ است. اگر مؤلفه‌ای از G یکریخت با H باشد، آنگاه گرافی که با حذف چنین مؤلفه‌ای به‌دست می‌آید با $G - H$ نشان داده می‌شود. گراف $G \vee H$، گرافی است که مجموعه رئوس آن $V(G) \cup V(H)$ و مجموعه یال‌های آن $E(G) \cup E(H)$ و یال‌هائی که هر رأس در گراف G را به همه‌ی رأس‌ها در گراف H وصل می‌کند، هستند. گراف mG گرافی است شامل m کپی مجزا از G که $m \geq 1$.
نماد G^c نشان‌دهنده مکمل گراف G است.
گراف H را زیرگراف G گویند هرگاه $V(G) \subseteq V(H)$ و $E(G) \subseteq E(H)$. زیرگراف حاصل از حذف رأس v از گراف G با نماد $G - v$ نشان داده می‌شود. زیرگراف H از G، یک زیرگراف القائی است هرگاه از حذف تعدادی رأس از گراف G حاصل شده باشد. زیرگرافی که هر دو رأس آن مجاور باشد را خوشه می‌نامند. اندازه‌ی بزرگترین خوشه در گراف G را عدد خوشه‌ای نامند و با نماد $\omega(G)$ نشان می‌دهند.
به زیرمجموعه‌ای از $V(G)$ که هر دو عضو آن نامجاور باشد مجموعه‌ی مستقل رأسی و به زیرمجموعه‌ای از $E(G)$ که هر دو عضو آن نامجاور باشد مجموعه‌ی مستقل یالی گفته می‌شود. اندازه‌ی بزرگترین مجموعه مستقل رأسی و بزرگترین مجموعه مستقل یالی در گراف G به ترتیب عدد استقلال رأسی و عدد استقلال یالی گفته می‌شود و به ترتیب با نمادهای $\alpha(G)$ و $\alpha'(G)$ نشان داده می‌شوند.

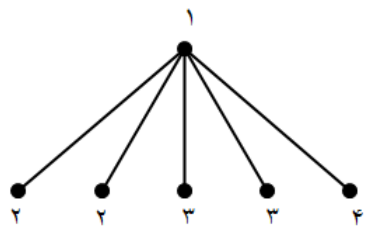
۲.۱ معرفی موضوع

یک k-رنگ‌آمیزی رأسی از گراف G یا به اختصار یک k-رنگ‌آمیزی، عبارت است از تخصیص k رنگ به رأس‌های G به گونه‌ای که رأس‌های مجاور هم‌رنگ نباشند. به عبارت دیگر رئوس گراف G به k کلاس $V_1, V_2, \ldots, V_k$ افراز می‌شود به‌طوری‌که هر V_i یک مجموعه‌ی مستقل باشد، یعنی رئوس داخل هر مجموعه‌ی V_i، $1 \leq i \leq k$، دو به دو مجاور نباشند. هر V_i را یک کلاس رنگی گراف می‌گویند. گراف G را k-رنگ‌پذیر گویند اگر یک k-رنگ‌آمیزی داشته باشد. کوچکترین عدد k، به‌طوری‌که گراف G، k-رنگ‌پذیر باشد را عدد رنگی گراف G نامند و با نماد $\chi(G)$ نشان می‌دهند.
به دلیل جذابیت‌های کاربردی و تحقیقاتی این مفهوم، تاکنون تعمیم‌های گوناگونی از رنگ‌آمیزی رأسی تعریف شده و مورد بررسی قرار گرفته است. در این پایان‌نامه یکی از این تعمیم‌ها به نام رنگ‌آمیزی منصفانه را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.
یک k-رنگ‌آمیزی منصفانه از یک گراف G، یک k-رنگ‌آمیزی است که در آن اختلاف اندازه‌ی کلاس‌های رنگی، حداکثر یک باشد، یعنی به ازای هر دو کلاس رنگی V_i و V_j، $1 \leq i \neq j \leq k$، $||V_i| - |V_j|| \leq 1$. یک گراف G، k-رنگ‌پذیر منصفانه است اگر یک k-رنگ‌آمیزی منصفانه داشته باشد.
کوچکترین عدد صحیح k که به ازای آن گراف G، k-رنگ‌پذیر منصفانه است را عدد رنگی منصفانه می‌گویند و با نماد $\chi_=(G)$ نشان می‌دهند.
برای هر گراف دلخواه، لزوماً عدد رنگی و عدد رنگی منصفانه برابر نیستند. به عنوان مثال گراف $K_{1,5}$ را در نظر بگیرید. طبق شکل ۱.۱، $\chi(K_{1,5}) = 2$ و طبق شکل ۲.۱، $\chi_=(K_{1,5}) = 4$.



شکل ۱.۱: یک رنگ‌آمیزی از گراف $K_{1,5}$

به راحتی دیده می‌شود که به ازای هر گراف دلخواه G، $\chi(G) \leq \chi_=(G)$.



شکل ۲.۱: یک رنگ‌آمیزی منصفانه از گراف $K_{۱,۵}$

رنگ‌آمیزی منصفانه اولین بار در [۳۵] توسط میر[۱] معرفی شد. البته انگیزه میر از مقاله‌ی توکر[۲] [۴۲] ناشی شده بود. در مقاله توکر یک گراف G در نظر گرفته شده است که در آن رأس‌ها نشان دهنده‌ی مسیرهای زباله‌روبی هستند و دو رأس مجاور هستند هرگاه مسیرهای متناظر نباید در یک روز پیموده شوند. هدف توکر مشخص کردن مسیرهایی بود که باید در هر روز هفته طی شوند. حالت مطلوب این است که تعداد مسیرهایی که در هر روز در طول ۶ روز یک هفته طی می‌شود، تقریباً برابر باشد. بیشترین سهم توجه و علاقه‌مندی به رنگ‌آمیزی منصفانه در مقاله‌ی میر زمانی که حدس زیر را بیان نمود، ایجاد شد که به حدس رنگ‌آمیزی منصفانه ECC[۳] معروف است.

حدس ۱.۲.۱ (**ECC**) [۳۵] فرض کنید G گرافی همبند باشد. اگر G غیر از گراف کامل K_n یا دور فرد $C_{۲n+۱}$ باشد، آنگاه $\chi_=(G) \leq \Delta(G)$.

میر در اثبات درستی ECC تنها برای گراف‌های با ۶ رأس و کمتر، موفق بود. انگیزه‌ی بیان ECC از قضیه‌ی بروکس[۴] ناشی شده است.

قضیه ۲.۲.۱ [۴] فرض کنید G گرافی همبند باشد. اگر G غیر از گراف کامل K_n یا دور فرد $C_{۲n+۱}$ باشد، آنگاه $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

واضح است که اگر یک گراف k-رنگ‌پذیر باشد آنگاه $(k+۱)$-رنگ‌پذیر نیز هست. اما برخلاف رنگ‌آمیزی معمولی یک گراف، رنگ‌آمیزی منصفانه یک گراف یکنواخت نیست. به عبارت دیگر یک گراف می‌تواند k-رنگ‌پذیر منصفانه باشد اما $(k+۱)$-رنگ‌پذیر منصفانه نباشد. به عنوان مثال گراف دوبخشی کامل $K_{۷,۷}$، زمانی که $k \in \{۲,۴,۶\}$، k-رنگ‌آمیزی منصفانه دارد اما زمانی که

[۱] Meyer

[۲] Tucher

[۳] Equitable Coloring Conjecture

[۴] Brooks

$\{۳,۵,۷\} \ni k$، k-رنگ‌آمیزی منصفانه ندارد [۲۸]. بنابراین گراف‌هایی با عدد رنگی منصفانه کمتر از $\Delta(G)$ وجود دارند که دارای $\Delta(G)$-رنگ‌آمیزی منصفانه نیستند. به نظر می‌رسد که ماکسیمم درجه نقش مهمی را در اینجا دارد. قبل از مقاله‌ی میر، هاگنال و زمردی[۵] قضیه‌ای ثابت کردند که به زبان رنگ‌آمیزی منصفانه به شکل زیر بیان می‌شود.

قضیه ۳.۲.۱ [۱۸] گراف G (نه لزوماً همبند) به ازای هر $k \geq \Delta(G)+۱$، k-رنگ‌پذیر منصفانه است.

کوچکترین عدد صحیح r به‌طوری‌که گراف G به ازای هر $k \geq r$، k-رنگ‌پذیر منصفانه است را آستانه رنگی منصفانه گراف G می‌نامند و با نماد $\chi^*_=(G)$ نشان می‌دهند. بنابراین یک شکل هم ارز از قضیه‌ی ۳.۲.۱ این است که، برای هر گراف G، $\chi^*_=(G) \leq \Delta(G)+۱$.

مطابق تعاریف عدد رنگی، عدد رنگی منصفانه و آستانه رنگی منصفانه، واضح است که $\chi(G) \leq \chi_=(G) \leq \chi^*_=(G)$. به عنوان مثال بار دیگر گراف $K_{۷,۷}$ را در نظر بگیرید. به راحتی با دادن رنگ‌آمیزی مناسب دیده می‌شود که $\chi(K_{۷,۷}) = \chi_=(K_{۷,۷}) = ۲$ در حالی که $\chi^*_=(K_{۷,۷}) = ۸$.

همچنین حدس زیر توسط چن[۶] و همکارانش در سال ۱۹۹۴ مطرح شد که این حدس به نام حدس Δ-رنگ‌آمیزی منصفانه $E\Delta CC$[۷]، معروف است.

حدس ۴.۲.۱ **(EΔCC)** [۸] فرض کنید G گرافی همبند باشد. اگر G، گراف کامل K_n، یا دور فرد $C_{۲n+۱}$ یا گراف دوبخشی کامل $K_{۲n+۱,۲n+۱}$ نباشد، آنگاه G، $\Delta(G)$-رنگ‌پذیر منصفانه است.

بلافاصله دیده می‌شود که $E\Delta CC$، ECC را نتیجه می‌دهد. چون اگر $G \neq K_n$ و $G \neq C_{۲n+۱}$ باشد آنگاه $G = K_{۲n+۱,۲n+۱}$ یا $G \neq K_{۲n+۱,۲n+۱}$. در حالتی که $G = K_{۲n+۱,۲n+۱}$، آنگاه $\chi_=(G) = ۲ \leq \Delta(G)$ و در نتیجه $\chi_=(G) \leq \Delta(G)$. در حالتی هم که $G \neq K_{۲n+۱,۲n+۱}$، طبق $E\Delta CC$، G، Δ-رنگ‌پذیر منصفانه است و در نتیجه $\chi_=(G) \leq \chi^*_=(G) \leq \Delta(G)$.

بنابراین $E\Delta CC$ قوی‌تر از ECC است.

۳.۱ مروری بر فصل‌های پایان‌نامه

هدف اصلی این پایان‌نامه مطالعه حدس Δ-رنگ‌آمیزی منصفانه است.

در فصل دوم به طور خلاصه مروری بر نتایج موجود در راستای حدس Δ-رنگ‌آمیزی منصفانه برای

[۵] Hajnal and Szemerédi

[۶] Chen

[۷] Equitable Δ-Coloring Conjecture

کلاس‌های خاصی از گراف‌ها از جمله گراف‌های دوبخشی، درخت‌ها، گراف‌های کنسر، گراف‌های بازه‌ای، گراف‌های سری-موازی، گراف‌های با تباهندگی کم و گراف‌های با عرض درختی کران‌دار خواهیم داشت.
در فصل سوم Δ-رنگ‌آمیزی منصفانه‌ی گراف‌های ناهمبند را بررسی می‌کنیم.
در فصل‌های چهارم و پنجم به ترتیب، به بررسی دقیق حدس Δ-رنگ‌آمیزی منصفانه برای گراف‌های مسطح و مسطح بیرونی همراه با جزئیات اثبات قضایا می‌پردازیم.
مطالب این پایان‌نامه برگرفته از مراجع [۱۱، ۲۴، ۳۷، ۳۹، ۴۸، ۵۱] است.

فصل ۲

نتایج موجود در رنگ‌آمیزی منصفانه

در این فصل مروری بر نتایج موجود در رنگ‌آمیزی منصفانه برای کلاس‌های خاصی از گراف‌ها از جمله گراف‌های دوبخشی، درخت‌ها، گراف‌های کنسر، گراف‌های بازه‌ای، گراف‌های سری-موازی، گراف‌های با تباهندگی کم و گراف‌های با عرض درختی کران‌دار خواهیم داشت. مطالب این فصل برگرفته از مرجع [۳۹] است که در فصل ۲۸ آن مرور کاملی بر نتایج موجود در زمینه رنگ‌آمیزی منصفانه انجام شده است.

۱.۲ گراف‌های دو بخشی

لی و وو[۱] در سال ۱۹۹۶ برای اولین بار ECC را برای گراف دوبخشی اثبات کردند.

قضیه ۱.۱.۲ [۳۲] گراف $K_{n,n}$، k-رنگ‌پذیر منصفانه است اگر و تنها اگر $۱ \leq \left\lceil \frac{n}{\lfloor \frac{k}{۲} \rfloor} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{\lceil \frac{k}{۲} \rceil} \right\rfloor$.

اثبات این قضیه با در نظر گرفتن اندازه‌های مناسب از کلاس‌های رنگی سرراست و آسان است. یک نکته‌ی جالب این است که برای $k = n = \Delta(K_{n,n})$، اختلاف مورد بحث در قضیه‌ی ۱.۱.۲، زمانی که n زوج است برابر صفر و زمانی که n فرد است برابر دو می‌باشد.

قضیه ۲.۱.۲ [۳۲] اگر $G \neq K_{n,n}$، $n \geq ۲$، یک گراف دو بخشی همبند با بخش‌های X و Y و $\Delta(G) \geq ۲$ باشد، آنگاه G می‌تواند با Δ رنگ، رنگ‌آمیزی منصفانه شود.

در قضیه‌ی ۲.۱.۲، در حقیقت از $\Delta(G)$ رنگ برای رنگ کردن منصفانه‌ی گراف G استفاده می‌شود. پس می‌توان نتیجه گرفت که به‌جز گراف‌های دوبخشی کامل $K_{۲m+۱,۲m+۱}$، هر گراف دوبخشی همبند G، می‌تواند با $\Delta(G)$ رنگ، رنگ‌آمیزی منصفانه شود.

---

[۱] Lih and Wu

قضیه‌های ۲.۱.۲ و ۱.۱.۲ نتیجه می‌دهند که حدس Δ-رنگ‌آمیزی منصفانه ($E\Delta CC$) برای گراف‌های دوبخشی همبند درست است.
اما در بسیاری از حالت‌ها، عدد رنگی منصفانه کمتر از ماکسیمم درجه است. اگر محدودیت‌های دیگری روی گراف اعمال شود، آنگاه کران بهتری برای عدد رنگی منصفانه به‌دست می‌آید.

قضیه ۳.۱.۲ [۳۲] فرض کنید $G = G(X, Y)$ یک گراف دوبخشی همبند با بخش‌های X و Y و دارای $e(G)$ یال باشد. اگر $|X| = m \geq n = |Y|$ و $2m$ + $(m-n)$ $\left\lfloor \frac{m}{(n+1)} \right\rfloor > e(G)$، آنگاه $\chi_{=}(G) \leq \left\lceil \frac{m}{(n+1)} \right\rceil + 1$.

کران بالا برای عدد رنگی منصفانه زمانی که حداقل ۲ یال وجود داشته باشد از $\Delta(G)$ بهتر است.
وانگ و ژانگ[۲] در [۴۶] درستی ECC را برای گراف‌های چندبخشی کامل اثبات کردند. مقدار دقیق عدد رنگی منصفانه از یک گراف چندبخشی کامل $K_{n_1,n_2,\dots,n_r}$ توسط لم و همکارانش در [۲۹] مشخص شد.

قضیه ۴.۱.۲ [۲۹] فرض کنید M، بزرگترین عدد طبیعی باشد به‌طوری‌که $\left\lceil \frac{n_i}{M} \right\rceil > n_i \pmod{M}$ برای $1 \leq i \leq r$، آنگاه $\chi_{=}(K_{n_1,n_2,\dots,n_r}) = \sum_{i=1}^{r} \left\lceil \frac{n_i}{(M+1)} \right\rceil$.

گراف چندبخشی کامل $K_{\underbrace{n, n, \dots, n}_{r}}$ برای $r \geq 2$ با $K_{r(n)}$ نشان داده می‌شود.

قضیه ۵.۱.۲ [۳۱] فرض کنید عدد صحیح $n \geq 1$ و $k \geq r \geq 2$. آنگاه $K_{r(n)}$، k-رنگ‌پذیر منصفانه است اگر و تنها اگر

$$\left\lceil \frac{n}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{\lceil \frac{k}{2} \rceil} \right\rfloor \leq 1.$$

مثال‌هایی از گراف‌های چندبخشی در [۳۰] این امکان را فراهم می‌کند تا نشان دهیم که نامساوی $\chi(G) \leq \chi_{=}(G) \leq \chi^*_{=}(G)$ می‌تواند، اکید باشد. فرض کنید $G_1 = K_{\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m}, 2n+1}$ و $G_2 = K_{\underbrace{2n+1, 2n+1, \dots, 2n+1}_{m}}$ و $G_3 = K_{2n+1, 2n+1, \underbrace{4n+2, \dots, 4n+2}_{m}}$، آنگاه

- $\chi(G_1) = m + 1 < \chi_{=}(G_1) = \chi^*_{=}(G_1) = m + n + 1$.
- $\chi(G_2) = \chi_{=}(G_2) = m < \chi^*_{=}(G_2) = m(n+1)$.
- $\chi(G_3) = m + 2 < \chi_{=}(G_3) = 2(m+1) < \chi^*_{=}(G_3) = (m+1)(2n+1) + 1$.

[۲] Wang and Zhang

وانگ و ژانگ در [۴۶] حدسی در مورد اختلاف عدد رنگی منصفانه و عدد رنگی بیان کردند که در زیر آمده است.

حدس ۶.۱.۲ [۴۶] برای هر گراف G، $\chi_=(G) - \chi(G) \leq \left\lfloor \frac{\Delta(G)}{۲} \right\rfloor$.
کران بالا توسط گراف $K_{۱,۲n+۱}$ اختیار می‌شود.

۲.۲ درخت‌ها

نتایج اصلی روی درخت‌ها توسط میر به‌دست آمده بود که بیان می‌کرد، یک درخت T، می‌تواند با $\left\lceil \frac{\Delta(T)}{۲} \right\rceil + ۱$ رنگ، رنگ‌آمیزی منصفانه شود. اما اثبات او ناقص و با اشکالاتی همراه بود. طبق گزارشی از گای[۳] [۱۷]، ایگلتون[۴] راه چاره‌ای برای آن اشکالات یافته و نتیجه میر را تعمیم داد. او ثابت کرد که یک درخت T، می‌تواند رنگ‌آمیزی منصفانه با k رنگ داشته باشد هر زمان که $k \geq \left\lceil \frac{\Delta(T)}{۲} \right\rceil + ۱$. قضیه زیر در مورد درخت‌ها توسط بالوباش و گای بیان شده است.

قضیه ۱.۲.۲ [۳] یک درخت T، ۳-رنگ‌پذیر منصفانه است اگر $|T| \geq ۳\Delta(T) - ۸$ یا $|T| = ۳\Delta(T) - ۱۰$.

همچنین هر درخت T، را می‌توان به عنوان یک گراف دوبخشی $T(X,Y)$ در نظر گرفت. چن و همکاران در [۸] قضیه‌ی زیر را در حالتی که اختلاف اندازه‌ی دو بخش حداکثر یک باشد، اثبات کردند.

قضیه ۲.۲.۲ [۸] فرض کنید $T = T(X,Y)$ یک درخت نابدیهی باشد به‌طوری‌که $||X| - |Y|| \leq ۱$، آنگاه $\chi_=(T) = \chi^*_=(T) = ۲$.

زمانی که اختلاف اندازه‌ی دو بخش بیشتر از یک باشد، آنگاه

قضیه ۳.۲.۲ [۸] اگر $T = T(X,Y)$ یک درخت باشد به‌طوری‌که $||X| - |Y|| > ۱$، آنگاه $\chi_=(T) = \chi^*_=(T) = \max\left\{۳, \left\lceil \frac{(|T|+۱)}{(\alpha_u(T)+۱)} \right\rceil\right\}$ که u یک رأس دلخواه از ماکسیمم درجه در T است.

توجه شود که $\alpha_u(G)$، نشان دهنده بزرگترین اندازه یک مجموعه‌ی مستقل شامل u در گراف G است.
چانگ در حالت کلی‌تر یعنی برای جنگل‌ها قضیه زیر را اثبات کرد.

قضیه ۴.۲.۲ [۵] فرض کنید F یک جنگل و $k \geq ۳$ یک عدد صحیح باشد. در این صورت F، k-رنگ‌پذیر منصفانه است اگر و تنها اگر برای هر رأس v از F، $\alpha_v(F) \geq \left\lfloor \frac{|F|}{k} \right\rfloor$.

[۳] Guy

[۴] Eggleton

مشخص کردن اینکه یک جنگل F، ۲-رنگ‌پذیر منصفانه است، نیاز به تلاش‌های بیشتری نسبت به درخت‌ها دارد. بدون کاستن از کلیت، فرض کنید F، یک جنگل شامل r مؤلفه است که هر مؤلفه شامل دو بخش X_i و Y_i است. با افراز کردن $\{۱,۲,...,r\}$ به دو بخش A و B به‌طوری‌که $\sum_{i\in A}|X_i|+\sum_{j\in B}|Y_j|=\left\lfloor\frac{|F|}{۲}\right\rfloor$، به یک ۲-رنگ‌آمیزی منصفانه از F می‌رسیم.

۳.۲ گراف‌های کنسر

برای اعداد طبیعی n و k که $n\geq ۲k$، گراف کنسر[۵] $KG(n,k)$، گرافی است که مجموعه رئوس آن شامل همه‌ی زیرمجموعه‌های k عضوی از مجموعه‌ی n عضوی است و دو رأس مجاورند اگر اشتراک زیرمجموعه‌های نظیرشان، تهی باشد. گراف کنسر $KG(۲k+۱,k)$ را گراف فرد می‌گویند و با نماد O_k نشان می‌دهند.

عدد استقلال گراف کنسر توسط اردیش[۶] وهمکارانش محاسبه شد که برابر است با $\alpha(KG(n,k))\leq\binom{n-۱}{k-۱}$ [۱۳]. عدد رنگی گراف کنسر نیز توسط لواز[۷] در [۳۳] به‌دست آمده است.

قضیه ۱.۳.۲ [۳۳] برای اعداد طبیعی n و k که $n\geq ۲k$، $\chi(KG(n,k))=n-۲k+۲$.

چون $KG(n,۱)=K_n$، بنابراین $\chi(KG(n,۱))=\chi_=(KG(n,۱))=\chi^*_=(KG(n,۱))=n$. از این به بعد فرض می‌کنیم که $k\geq ۲$. چن و هانگ[۸] سعی کردند که نشان دهند گراف $KG(n,k)$، به ازای هر $m\geq n-k+۱$، m-رنگ‌پذیر منصفانه است و آنها موفق به اثبات قضیه‌ی زیر شدند.

قضیه ۲.۳.۲ [۶] $\chi_=(KG(n,k))\leq\chi^*_=(KG(n,k))\leq n-k+۱$.

همچنین مقادیر دقیق $\chi_=(KG(n,۲))$ و $\chi_=(KG(n,۳))$ و $\chi(O_k)$ توسط چن و هانگ محاسبه شد.

قضیه ۳.۳.۲ [۶] فرض کنید $n\geq ۵$. آنگاه

$$\chi_=(KG(n,۲))=\chi^*_=(KG(n,۲))=\begin{cases} n-۲ & \text{اگر } n=۵ \text{ یا } n=۶\\ n-۱ & \text{اگر } n\geq ۷\end{cases}$$

[۵] Kneser graph

[۶] Erdös

[۷] Lovász

[۸] Chen and Huang

قضیه ۴.۳.۲ [۶] فرض کنید $n \geq ۷$. آنگاه

$$\chi_{=}(KG(n,۳)) = \chi^{*}_{=}(KG(n,۳)) = \begin{cases} n-۴ & \text{اگر } ۷ \leq n \leq ۱۳ \\ n-۳ & \text{اگر } ۱۴ \leq n \leq ۱۵, \\ n-۲ & \text{اگر } n \geq ۱۶. \end{cases}$$

قضیه ۵.۳.۲ [۶] در هر گراف فرد O_k، اگر $k \geq ۱$، آنگاه $\chi(O_k) = \chi_{=}(O_k) = \chi^{*}_{=}(O_k) = ۳$.

حدس زیر نیز توسط چن و هانگ پیشنهاد شده است.

حدس ۶.۳.۲ [۶] اگر $n > ۲k \geq ۴$، آنگاه $\chi_{=}(KG(n,k)) = \chi^{*}_{=}(KG(n,k))$.

همه‌ی نتایج به‌دست آمده در مورد گراف کنسر که در این بخش بیان کردیم، همچنین توسط فیدیتک[۹]وهمکاران در [۱۴] به طور مستقل بیان شده است.

۴.۲ گراف‌های بازه‌ای

گراف $G(V,E)$، گراف بازه‌ای است اگر، خانواده‌ی $\{I_v : v \in V(G)\}$ از بازه‌ها روی خط حقیقی وجود داشته باشد به‌طوری‌که u و v دو رأس مجاورند اگر و تنها اگر $I_u \cap I_v \neq \emptyset$. به عبارت دیگر بازه‌های بسته متناهی روی خط حقیقی نقش رئوس را بازی می‌کنند و دو رأس مجاورند اگر و تنها اگر بازه‌های متناظر هر کدام با هم اشتراک داشته باشند. یک چنین خانواده‌ی $\{I_v : v \in V(G)\}$ به طور عادی نشان دهنده‌ی یک نمایش بازه‌ای از گراف G است.

چن و همکارانش در [۹] نشان دادند که $E\Delta CC$ برای گراف‌های بازه‌ای درست است.

قضیه ۱.۴.۲ [۹] اگر G یک گراف بازه‌ای همبند غیر از گراف کامل باشد، آنگاه G، $\Delta(G)$-رنگ‌پذیر منصفانه است.

همچنین آنان نشان دادند که

قضیه ۲.۴.۲ [۹] اگر G یک گراف بازه‌ای باشد، آنگاه $\chi_{=}(G) = \chi^{*}_{=}(G)$.

---

[۹] Fidytek

۵.۲ گراف‌های با تباهندگی کم

یک گراف G، d-تباهیده است اگر هر زیرگراف H از G شامل یک رأس از درجه‌ی حداکثر d در H باشد. واضح است که گراف بدون یال یک گراف ۰-تباهیده، جنگل‌ها، گراف‌های ۱-تباهیده، گراف‌های مسطح بیرونی، ۲-تباهیده و گراف‌های مسطح، ۵-تباهیده هستند.
در سال ۲۰۰۳ کاستاچکا و ناکپراسیست[۱۰] سعی کردند کرانی برای آستانه رنگی منصفانه گراف d-تباهیده پیدا کنند. فرض کنید $G(d,\Delta) = K_d \vee I_{\Delta-d+1}$. این یک گراف d-تباهیده با ماکسیمم درجه Δ است. در هر رنگ‌آمیزی از $G(d,\Delta)$، هر رأس در K_d یک کلاس رنگی تک عضوی را تشکیل می‌دهد. بنابراین در هر رنگ‌آمیزی منصفانه از $G(d,\Delta)$، حداقل $d + \left\lceil\frac{(\Delta-d+1)}{2}\right\rceil = \left\lceil\frac{(\Delta+d+1)}{2}\right\rceil$ رنگ استفاده می‌شود. کاستاچکا و ناکپراسیست نشان دادند که $\left\lceil\frac{(\Delta+d+1)}{2}\right\rceil$ رنگ، برای رنگ‌آمیزی منصفانه‌ی هر گراف d-تباهیده، با ماکسیمم درجه Δ، که $\frac{\Delta}{d}$ بزرگ باشد، کافی است.

قضیه ۱.۵.۲ [۲۵] فرض کنید $2 \le d \le \frac{\Delta}{27}$ و G یک گراف d-تباهیده با ماکسیمم درجه‌ی حداکثر Δ است. اگر $k \ge \frac{(\Delta+d+1)}{2}$، آنگاه G، k-رنگ‌پذیر منصفانه است.

نتیجه ۲.۵.۲ [۲۵] فرض کنید $\Delta \ge 135$ و ماکسیمم درجه‌ی گراف مسطح G، حداکثر Δ باشد. اگر $k \ge \frac{\Delta}{2} + 3$، آنگاه G، k-رنگ‌پذیر منصفانه است.

در قضیه ۱.۵.۲ به ازای $\Delta = 2k - 1 - d$ نتیجه زیر به‌دست می‌آید.

نتیجه ۳.۵.۲ [۲۵] فرض کنید $d \ge 2$. اگر $k \ge 14d + 1$، آنگاه هر گراف d-تباهیده با ماکسیمم درجه‌ی حداکثر k، k-رنگ‌پذیر منصفانه است.

همچنین حدس زیر در مقاله‌ی [۲۵] مطرح شده است.

حدس ۴.۵.۲ [۲۵] فرض کنید $2 \le d \le \Delta$ و G یک گراف d-تباهیده با ماکسیمم درجه‌ی حداکثر Δ باشد. اگر $k \ge \frac{(\Delta+d+1)}{2}$، آنگاه G، k-رنگ‌پذیر منصفانه است .

درجه میانگین یک گراف G، با نماد $Ad(G)$ نشان داده می‌شود و برابر است با $Ad(G) = \frac{2|E(G)|}{|G|}$.
یک گراف با تباهیدگی کم از لحاظ شهودی نسبتاً شبیه به گرافی است که هر زیرگراف آن درجه میانگین کوچک دارد.
کاستاچکا و ناکپراسیست در سال ۲۰۰۵ در [۲۶] اثبات کردند که $E\Delta CC$ برای گراف‌هایی که درجه میانگین کوچک دارند بدون محدودیتی روی زیرگراف‌های آن، درست است.

[۱۰] Kostochka and Nakprasit

قضیه ۵.۵.۲ [۲۶] فرض کنید $\Delta \geq ۴۶$ و G یک گراف از مرتبه‌ی حداقل ۴۶ و ماکسیمم درجه‌ی حداکثر Δ است. اگر $Ad(G) \leq \frac{\Delta}{۵}$ و $K_{\Delta+۱}$ زیرگرافی از G نباشد، آنگاه G، Δ-رنگ‌پذیر منصفانه است.

آنها همچنین در [۲۶] اثبات کردند که $E\Delta CC$ برای گراف‌های d-تباهیده با ماکسیمم درجه‌ی Δ اگر $d \leq \frac{\Delta}{۱۰}$ درست است .

کاستاچکا و همکاران در سال ۲۰۰۵ در [۲۷] همچنین نتایج دیگری را برای گراف‌های d-تباهیده اثبات کردند که در زیر آمده است.

قضیه ۶.۵.۲ [۲۷] هر گراف d-تباهیده G با ماکسیمم درجه‌ی حداکثر Δ، زمانی که $k \geq ۱۶d$ و $\Delta \leq \frac{|G|}{۱۵}$، k-رنگ‌پذیر منصفانه است .

با برداشتن محدودیت روی Δ، آنها ثابت کردند

قضیه ۷.۵.۲ [۲۷] هر گراف d-تباهیده G با ماکسیمم درجه‌ی حداکثر Δ، برای هر k، $k \geq \max\left\{۶۲d, ۳۱d\frac{|G|}{(|G|-\Delta+۱)}\right\}$، k-رنگ‌پذیر منصفانه است.

نتیجه ۸.۵.۲ [۲۷] هر گراف d-تباهیده G با ماکسیمم درجه‌ی حداکثر $۱ + \frac{|G|}{۲}$، برای هر $k \geq ۶۲d$، k-رنگ‌پذیر منصفانه است.

نتایج زیر نیز در سال ۲۰۱۰ توسط ژو و بو[۱۱] به‌دست آمده است.

قضیه ۹.۵.۲ [۵۳] فرض کنید $۳ \leq d+۱ \leq k$ و $t \geq ۱$ و همچنین فرض کنید G یک گراف d-تباهیده از مرتبه kt است. اگر $|E(G)| \leq (k-۱)t$، آنگاه G، k-رنگ‌پذیر منصفانه است.

نتیجه ۱۰.۵.۲ [۵۳] اگر G یک گراف ۲-تباهیده باشد و $|E(G)| \leq \frac{۲}{۳}|G|$، آنگاه G، ۳-رنگ‌پذیر منصفانه است.

نتیجه ۱۱.۵.۲ [۵۳] اگر G یک گراف ۲-تباهیده باشد و $|E(G)| \leq \frac{۳}{۴}|G|$، آنگاه G، ۴-رنگ‌پذیر منصفانه است.

[۱۱] Zhu and Bu