بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده علوم ریاضی

گروه آمار

رساله دوره دکتری آمار

استنباط بیزی در مدلهای سریهای زمانی واریانس ناهمگن شرطی

توسط

فضل اله لک

استاد راهنما

دکتر محمدرضا مشکانی

استاد مشاور

دکتر احمد خدادادی

آبان ۱۳۸۶

تقدیم به

پدر و مادرم

و همه کسانی که به من آموختند و

آنهایی که در راه سرافرازی و اعتلای این

مـــرز و بـــوم گام بر می‌دارند.

قدردانی

پس از نام و یاد خدا و تشکر از او به خاطر ارزانی داشتن زندگی و توان تحقیق در من، برخود لازم می‌دانم از استاد گرانقدر دکتر محمد رضا مشکانی که مرا در تمامی دورهٔ تحصیلم در دانشگاه شهید بهشتی یاری کردند و همچنین به‌خاطر راهنمایی‌های بی‌دریغ‌شان در به پایان رساندن این رساله تشکر و قدردانی کنم. همچنین بر خود لازم می‌دانم از پروفسور کریستیان رابرت استاد دانشگاه دوفین فرانسه که در دورهٔ کوتاه مدت تحقیقاتی من را یاری نمودند تشکر کنم.

از استاد عزیز دکتر احمد خدادادی که در انجام این کار استاد مشاور اینجانب بودند نیز تشکر می‌کنم.

از اساتید بزرگوار دکتر جواد بهبودیان، دکتر محسن محمد زاده، دکتر محمد رضا فقیهی و دکتر مجتبی گنجعلی که زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند کمال تشکر را دارم.

همچنین از دوستانی که به هر نحو در انجام این کار مرا یاری رساندند تشکر می‌کنم.

در پایان نیز از خانواده عزیزم و به خصوص مادرم که مشوق من برای ادامهٔ تحصیل بودند نیز قدردانی کرده و دست یکایک آنها را می‌بوسم.

پیشگفتار

در سریهای زمانی معمولی، مانند سری زمانی اتورگرسیو، فرض می‌شود که واریانس خطا ثابت است. اما تعداد زیادی از سریهای زمانی مالی، مانند سود سرمایه و نرخهای ارز ، به طور موفقیت آمیزی می‌توانند با این فرض که واریانس خطا با زمان تغییر می‌کند مدلبندی شوند. چنین مدلهایی می‌توانند با یک پدیده معمول به نام خوشه‌بندی تصادفی [۱] در نظر گرفته شوند. یک راه مدلبندی این سریها این است که واریانس شرطی خطا به عنوان تابعی از توان دوم مشاهدات قبلی و واریانس‌شان در نظر گرفته شود. این مدلسازی منجر به مدلهای اتورگرسیو ناهمگن شرطی[۲] (ARCH) می‌شود. با پیروی از مدل ARCH انگل، بسطها و کاربردهای زیادی از این مدلها در نوشتگان این موضوع ارائه شده اند. بولرسلو (۱۹۸۶) مدلهای ARCH تعمیم یافته (GARCH) را مطرح کرد که این مدلها، پارامترهای مدل را کم کرده و ساختار تأخیر بیشتری را در واریانس شرطی در نظر می‌گیرند. در ۲۰ سال گذشته رشد سریعی در این حوزه از مدلسازی واریانس شرطی هم در اقتصاد سنجی و هم در ریاضیات مالی با مدلهای ARCH و GARCH با پژوهش عملی فراوان صورت گرفته است. گوکه (۱۹۸۸ و ۱۹۸۹) برای اولین بار در مدلهای ARCH یک بررسی بیزی انجام داد. به طور خاص از دیدگاه محاسباتی، باونز و لوربانو[۳] (۱۹۹۸) روشهای بیزی را برای این رده از این مدلها به کار بردند. در این رساله، برآورد بیز تجربی پارامترها را برای مدل ARCH در نظر گرفته و با معیار MSE آن را با برآورد ماکسیمم

۱ Volatility clustering

۲ Auotregressive Conditional Heteroscedasticity

۳ Bauwens and Lubrano

درستنمایی و برآورد بیزی مورد مقایسه قرار داده‌ایم. برای به دست آوردن برآورد بیز تجربی، یک نکته مهم، به دست آوردن برآورد ابرپارامترها از توزیع کناری است. در این رساله، از روش SAME که به وسیله دوست و همکاران [۴] (۲۰۰۲) ارائه شده برای برآورد ابرپارامترها استفاده شده است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که با معیار MSE برآورد بیزی، تحت یک توزیع پیشین ناآگاهی بخش، بر برآورد ماکسیمم درستنمایی غلبه دارد. از طرف دیگر، مدلهای بیز سلسله مراتبی یک مرحله‌ای برای یک مجموعه داده یکسان در نظر گرفته شده است. کار دیگر در این رساله، انتخاب مدل از بین این رده از مدلها است که در آن تجزیه و تحلیل بیزی GARCH با در نظر گرفتن برآورد پارامترها و انتخاب مدل ارائه شده است. برای اجرای آن از روش نمونه‌گیری نقاط مهم استفاده شده است. نتایج با یک شبیه‌سازی برای مدلهایی با مراتب متفاوت نشان داده شده‌اند. نتایج شبیه‌سازی شده برای مدلهای GARCH با مرتبه‌های متفاوت معلوم نشان می‌دهد که روش ارائه شده برای برآورد مرتبه و پارامترهای متناظر آن مرتبه کاراست. فصول این رساله به صورت زیر تدوین شده‌اند: در فصل اول، مقدمه‌ای بر مدلهای ARCH و تعمیم آنها ارائه شده و ویژگی‌های این مدلها مورد بررسی قرار گرفته‌اند. با توجه به این که برای استفاده از روش SAME نیاز به روشهای MCMC است، در فصل دوم انواع روشهای MCMC همراه با مثالهایی به زبان ساده مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در فصل سوم برآورد بیز تجربی پارامترها با استفاده از روش SAME برای مدل ARCH به دست آورده می‌شود. فصل چهارم شامل انتخاب مدل برای مدلهای GARCH است. با توجه به روش ارائه شده می‌توان با داشتن یک مجموعه از داده‌ها، مرتبه مدل GARCH را که داده‌ها از آن آمده‌اند تعیین کرد. همچنین، این روش قادر است برآورد بیزی پارامترهای مربوط به آن مدل را به دست دهد.

---

۴ Doucet et. al.

استنباط بیزی در مدلهای سریهای زمانی

واریانس ناهمگن شرطی

چکیده

تعداد زیادی از سری‌های زمانی مالی، مانند سود سرمایه و نرخهای ارز، می‌توانند با فرض این‌که واریانس خطا با زمان تغییر می‌کنند، به طور موفقیت آمیزی مدلبندی شوند. این فرمولبندی، منجر به مدلهای اتورگرسیو ناهمگن شرطی، انگل (۱۹۸۲)، می‌شود. بولرسلو (۱۹۸۶) مدلهای ARCH تعمیم یافته (GARCH) را مطرح کرد که این مدلها، پارامترهای مدل را کم کرده و ساختار تأخیر بیشتری را در واریانس شرطی در نظر می‌گیرند. در این رساله برآورد بیز تجربی برای مدلهای ARCH را به دست می‌آوریم. برای به دست آوردن برآورد بیز تجربی یک نکته مهم به دست آوردن برآورد ابرپارامترها با استفاده از توزیع کناری است. در این رساله، از روش SAME، دوسِت و همکاران (۲۰۰۲)، برای برآورد ابرپارامترها استفاده شده است. برآوردهای بیزی، ماکسیمم درستنمایی و بیز تجربی را به دست آورده و با معیار MSE آن ها را با هم مقایسه می‌کنیم. همچنین تجزیه و تحلیل بیزی کامل مدلهای GARCH، شامل برآورد پارامتر و انتخاب مدل را ارائه می‌دهیم. برای اجرای این کار از روش نمونه‌گیری نقاط مهم استفاده می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی : برآورد بیزی و بیز تجربی، فرایندهای ARCH و GARCH، نمونه‌گیری نقاط مهم، انتخاب مدل، روش SAME.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مدلهای سریهای زمانی واریانس ناهمگن شرطی

۱.۱ مقدمه

مدلهای اتورگرسیو واریانس ناهمگن شرطی[۱] به خاطر قابلیت شان در برازش به سریهای زمانی مالی مانند نرخ ارز و ارزش سهام مورد توجه قرار گرفته‌اند. این مدلها برای توصیف سریهای زمانی مالی که معمولاً به صورت خوشه‌ای رخ می‌دهند نیز بسیار مناسب اند. در این مدلها برآورد بی‌ثباتی واریانس [۲] و کوواریانس برای مدیریت مخاطره و تجزیه و تحلیل سبدهای مالی بسیار حیاتی است. تا سال ۱۹۸۰ مدلبندی سریهای زمانی بر اولین گشتاور شرطی متمرکز بود اما در دو دهه اخیرمحققان فنون جدیدی را مورد بررسی قرار داده‌اند به طوری که این فنون اجازه می‌دهند کوواریانسها و واریانسها مورد بررسی قرار گیرند. این فنون نقشی مهم در بررسی مخاطره در مدیریت اقتصاد بازی می‌کنند.

۱ Autoregressive Conditional Hetroscedasticity

۲ Volatility

پدیدهٔ خوشه بندی بی‌ثباتی واریانس را که بیشتر در سریهای زمانی مالی مانند سود سرمایه و نرخ ارز به چشم می‌خورد می‌توان به وسیله مدلبندی گشتاور دوم شرطی به خوبی تحلیل کرد.
پدیدهٔ خوشه بندی را می‌توان به راحتی با رسم نمودار سود سرمایه یا نرخهای ارز برحسب زمان ملاحظه کرد.
در این فصل مشخصات مهم مدلهای دارای واریانس ناهمگن شرطی و نوشتگان این موضوع مورد بررسی قرار می‌گیرند. درمرحله اول یک مدل اتورگرسیو مرتبه یک باخطاهای ناهمگن را بررسی می کنیم. این مثال ساده اجازه می‌دهد که بتوانیم شرایط وجودی فرایند و خواص اصلی آن را به تفصیل توضیح دهیم. سپس آن را بسط داده و نشان می‌دهیم چگونه نتایج به دست آمده برای حالت ساده می توانند تعمیم یابند.

۲.۱ خوشه بندی واریانس شرطی

مدل اتورگرسیو مرتبه یک باضریب رگرسیونی φ را درنظر می‌گیریم. به دلیل مانایی فرآیند، قدرمطلق φ کمتر از یک فرض می‌شود.

$$y_t = \mu + \varphi y_{t-۱} + \varepsilon_t, \qquad |\varphi| < ۱ \tag{۱.۲.۱}$$

که در آن $\varepsilon = \{\varepsilon_t\}$ یک نوفهٔ سفید ضعیف[۳] است و دارای دنبالهٔ تفاضلی مارتینگلی است:

$$E(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon_{t-۱}}) = ۰ \tag{۲.۲.۱}$$

[۳] Weak Noise

و $\underline{\varepsilon_{t-1}} = \{\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots\}$ سیگما میدان تولید شده به وسیله اطلاعات گذشته تا زمان $t - 1$ است.

تعریف: $\varepsilon = \{\varepsilon_t, \quad t \in T\}$، یک نوفهٔ سفید ضعیف نامیده می‌شود اگر دنباله‌ای ناهمبسته با میانگین صفر باشد و

$$\begin{aligned} LE(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon_{t-1}}) &= 0 \\ Var(\varepsilon_t) &= \Omega \end{aligned}$$

که در آن LE به معنی ترکیب خطی متغیرهای شرطی است.

برعکس روش معمول فرض نمی‌کنیم که واریانس شرطی نوفه، یعنی $Var(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon_{t-1}})$، مستقل از زمان باشد بلکه اجازه می‌دهیم که توان دوم عاملهای نوسازی دارای وابستگی از نوع اتورگرسیو مرتبه یک به صورت

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + u_t \qquad (۳.۲.۱)$$

باشند، که در آن $u = \{u_t\}$ یک نوفهٔ سفید قوی[۴] است.

تعریف: $u = \{u_t, \quad t \in T\}$ یک نوفهٔ سفید قوی نامیده می‌شود اگر مستقل و هم‌توزیع و دارای گشتاورهای مرتبه دوم متناهی باشد.

فرآیندی که سه شرط بالا (۱.۲.۱) تا (۳.۲.۱) را دارا باشد اتورگرسیو مرتبه یک باخطاهای ARCH(۱) نامیده می‌شود. ویژگی‌های این فرآیند را می‌توان به طور مستقیم از دو معادلهٔ بازگشتی تعریف شده برحسب $\{y_t\}$ و $\{\varepsilon_t^2\}$ به‌دست آورد. شرط (۳.۲.۱) نمی‌تواند $\{\varepsilon_t^2\}$ را به طور کامل معرفی کند و باید یک شرط اولیه برای ε_t^2 درنظر بگیریم. دراین حالت میانگین توان دوم عامل نوسازی به صورت زیر است :

$$m_t = E(\varepsilon_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 m_{t-1}$$

۴ Strong White Noise

که در آن m_0 داده شده است. برای اینکه میانگین غیرشرطی ناوردا[5] باشد، باید قدرمطلق پارامتر α_1 اکیداً کمتر از یک باشد و در شرط اولیه $m_0 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$ صدق کند. شرایط کافی برای مثبت بودن فرآیند $\{\varepsilon_t^2\}$ عبارت اند از $\alpha_1 > 0$ و $\alpha_0 + u_t \geq 0$ به ازای مقادیر مناسبی از u_t.

۱.۲.۱ خواص فرآیند عامل نوسازی ε_t

فرآیند ε_t باید شرط متعامد بودن نسبت به گذشته را دارا باشد، یعنی برای هر t:

$$E(\varepsilon_t|\underline{\varepsilon_{t-1}}) = 0$$

این محدودیت دارای پیامدهای زیر است:

۱– فرآیند (ε_t) نسبت به زمان گذشته در هر تأخیر متعامد است.

$$E(\varepsilon_t|\underline{\varepsilon_{t-h}}) = 0, \quad \forall h > 0$$

بنابر قانون امید ریاضی مکرر و اینکه به ازای $h > 1$ اطلاعات موجود در $\underline{\varepsilon_{t-h}}$ کمتر از اطلاعات $\underline{\varepsilon_{t-1}}$ است داریم

$$E(\varepsilon_t|\underline{\varepsilon_{t-h}}) = E(E(\varepsilon_t|\underline{\varepsilon_{t-1}})|\underline{\varepsilon_{t-h}}) = E(0|\underline{\varepsilon_{t-h}}) = 0$$

۲– ویژگی متعامد بودن نشان می‌دهد که همبستگی های شرطی برابر صفراند. به ازای مقادیر مثبت h و k داریم:

$$\begin{aligned}
Cov[(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k})|\underline{\varepsilon_{t-h}}] &= E[\varepsilon_t\varepsilon_{t+k}|\underline{\varepsilon_{t-h}}] - E[\varepsilon_t|\underline{\varepsilon_{t-h}}]E[\varepsilon_{t+k}|\underline{\varepsilon_{t-h}}] \\
&= E[\varepsilon_t\varepsilon_{t+k}|\underline{\varepsilon_{t-h}}] \\
&= E[\varepsilon_t E(\varepsilon_{t+k}|\underline{\varepsilon_{t+k-1}})|\underline{\varepsilon_{t-h}}], \quad \varepsilon_t \in \underline{\varepsilon_{t+k-1}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

---

۵ Invariant

پس همبستگی میان مقادیر فعلی و آیندهٔ فرآیند عامل نوسازی به ازای هرتأخیر h صفر است.

۳– ویژگی های دیگر فرآیند خطا از معادلهٔ اتورگرسیو (۳.۲.۱) به دست می‌آید:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + u_t,$$

بااستفاده از رابطه بازگشتی به دست می‌آوریم:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0[1 + \alpha_1 + ... + \alpha_1^{h-1}] + \alpha_1^h \varepsilon_{t-h}^2 + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + ... + \alpha_1^{h-1} u_{t-h+1}$$

با گرفتن امید شرطی نسبت به اطلاعات $\underline{\varepsilon_{t-h}}$ از دوطرف معادله به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} E[\varepsilon_t^2|\underline{\varepsilon_{t-h}}] &= \alpha_0[1 + \alpha_1 + ... + \alpha_1^{h-1}] + \alpha_1^h \varepsilon_{t-h}^2 \\ &= \alpha_0 \frac{1 - \alpha_1^h}{1 - \alpha_1} + \alpha_1^h \varepsilon_{t-h}^2 \end{aligned}$$

پس واریانس شرطی عبارت است از

$$Var(\varepsilon_t|\underline{\varepsilon_{t-h}}) = \alpha_0 \frac{1 - \alpha_1^h}{1 - \alpha_1} + \alpha_1^h \varepsilon_{t-h}^2$$

واریانس شرطی فقط از طریق مقادیر اخیر ε_{t-h}^2 به اطلاعات گذشته وابسته است. هرگاه تأخیر h به بی‌نهایت میل کند واریانس غیر شرطی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$Var(\varepsilon_t) = E[Var(\varepsilon_t|\underline{\varepsilon_{t-h}})] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

چون این واریانس مستقل از زمان است پس فرآیند (ε_t) یک نوفهٔ سفید ضعیف است. تفاضل میان واریانس شرطی و غیرشرطی تابعی ساده از انحراف از میانگین توان دوم عاملهای نوسازی است،

$$Var(\varepsilon_t|\underline{\varepsilon_{t-h}}) - Var(\varepsilon_t) = \alpha_1^h[\varepsilon_{t-h}^2 - E(\varepsilon_{t-h}^2)]$$

فرض کنید $\alpha_1 > 0$ آن گاه اگر قدرمطلق عامل نوسازی بزرگ باشد واریانس شرطی مقادیری کوچکتر از واریانسهای غیرشرطی خواهد داشت.

۲.۲.۱ ویژگی های فرآیند y_t

ویژگی‌های این فرآیند را می‌توان به طور مستقیم از نوفهٔ سفید (ε_t) به دست آورد. این ویژگیها عبارت‌اند از

۱−

$$E(y_t|\underline{y_{t-h}}) = \mu\frac{1-\varphi^h}{1-\varphi} + \varphi^h y_{t-h}$$

که وابسته به مقادیر گذشته و فعلی است.

۲−واریانسهای شرطی و کوواریانسها را می‌توان به صورت مجموعی موزون از جملاتی از عاملهای نوسازی نوشت:

$$y_t = \mu\frac{1-\varphi^h}{1-\varphi} + \varphi^h y_{t-h} + \varepsilon_t + \varphi\varepsilon_{t-1} + \ldots + \varphi^{h-1}\varepsilon_{t-h+1}$$

واگر $h > 0$ و $k \geq 0$ آنگاه می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
Cov[(y_t, y_{t+k})|\underline{y_{t-h}}] &= Cov[(\mu\frac{1-\varphi^h}{1-\varphi} + \varphi^h y_{t-h} + \varepsilon_t + \varphi\varepsilon_{t-1} + \ldots + \varphi^{h-1}\varepsilon_{t-h+1}, \\
&\quad \mu\frac{1-\varphi^{h+k}}{1-\varphi} + \varphi^{h+k} y_{t-h} + \varepsilon_{t+k} + \ldots + \varphi^{h+k-1}\varepsilon_{t-h+1})|\underline{y_{t-h}}] \\
&= Cov[(\varepsilon_t + \ldots + \varphi^{h-1}\varepsilon_{t-h+1}, \varepsilon_{t+k} + \ldots + \varphi^{h+k-1}\varepsilon_{t-h+1}))|\underline{y_{t-h}}] \\
&= \varphi^k Var(\varepsilon_t|\underline{\varepsilon_{t-h}}) + \varphi^{k+2} Var(\varepsilon_{t-1}|\underline{\varepsilon_{t-h}}) + \\
&\quad \ldots + \varphi^{k+2(h-1)} Var(\varepsilon_{t-h+1}|\underline{\varepsilon_{t-h}}) \\
&= \varphi^k \sum_{j=0}^{h-1} \varphi^{2j} Var(\varepsilon_{t-j}|\underline{\varepsilon_{t-h}}) \\
&= \varphi^k \sum_{j=0}^{h-1} \varphi^{2j} \{\alpha_0 \frac{1-\alpha_1^{h-j}}{1-\alpha_1} + \alpha_1^{h-j}\varepsilon_{t-h}^2\} \\
&= \frac{\alpha_0\varphi^k}{1-\alpha_1}\sum_{j=0}^{h-1}\varphi^{2j} - \frac{\alpha_0\alpha_1^h\varphi^k}{1-\alpha_1}\sum_{j=0}^{h-1}\varphi^{2j}\alpha_1^{-j} + \alpha_1^h\varphi^k\varepsilon_{t-h}^2\sum_{j=0}^{h-1}\varphi^{2j}\alpha_1^{-j}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha_0 \varphi^k}{1-\alpha_1}\frac{1-\varphi^{2h}}{1-\varphi^2} - \frac{\alpha_0 \alpha_1 \varphi^k}{1-\alpha_1}\frac{\alpha_1^h - \varphi^{2h}}{\alpha_1 - \varphi^2} + \alpha_1 \varphi^k \varepsilon_{t-h}^2 \frac{\alpha_1^h - \varphi^{2h}}{\alpha_1 - \varphi^2}$$

به ویژه، کوواریانسهای غیرشرطی دریک حالت حدی که h به سمت بی‌نهایت میل کند به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$Cov(y_t, y_{t+k}) = \frac{\alpha_0 \varphi^k}{1-\alpha_1}\frac{1}{1-\varphi^2}, \qquad k \geq 0.$$

۳.۱ رده بندی مدلهای دارای بی ثباتی واریانس

چند مدل مشهور وجود دارند که می توانند پدیدهٔ خوشه‌بندی بی ثباتی واریانس را با کوواریانس شرطی تبیین کنند. برای این گونه مدلها دو ردهٔ اصلی وجود دارند که به مدلهای مشاهدهٔ مبنا[۶] و پارامترِ مبنا[۷] موسوم‌اند. به منظور توضیح این دو رده فرض می‌کنیم

$$y_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

که در آن y_t مشاهدهٔ فرآیند تصادفی درلحظهٔ t، نماد $N(\cdot,\cdot)$ نشان دهنده توزیع نرمال و Ψ_t شامل اطلاعات گذشته تا لحظهٔ t است، یعنی $\Psi_t = \{y_t, y_{t-1}, \ldots\}$. مدلهای مشاهدهٔ مبنا اجازه می‌دهند که Ψ_t تابعی ازمقادیر تأخیر دار از y_t باشد. مشهورترین این مدلها، مدلهای اتورگرسیو شرطی واریانس ناهمگن (ARCH)، انگل (۱۹۸۲) [۸] و اتورگرسیو شرطی واریانس ناهمگن تعمیم یافته بولرسلو(۱۹۸۶)[۹] (GARCH) هستند.

۶ Observation-driven

۷ Parameter-driven

۸ Engle

۹ Bollerslev