بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه لرستان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

توسعه ی مدل های ابرکارایی کلاسیک در تحلیل پوششی داده های نادقیق

نگارش:
مهدی کرمی خرم آبادی

استاد راهنما:
دکتر محمد خدابخشی

استاد مشاور:
دکتر علی ثامری پور

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی کاربردی

شهریورماه ۱۳۹۳

همه ی امتیازات این پایان نامه به دانشگاه لرستان تعلق دارد. در صورت استفاده از تمام یا بخشی از مطالب در مجلات، کنفرانس ها یا سخنرانی ها، باید نام دانشگاه لرستان (یا استاد یا اساتید راهنمای پایان نامه) و نام دانشجو با ذکر مأخذ و ضمن کسب مجوز کتبی از دفتر تحصیلات تکمیلی دانشگاه ثبت شود. در غیر این صورت مورد پیگرد قانونی قرار خواهد گرفت.

گزیده ای از دعای مکارم الاخلاق امام سجاد (علیه السلام)

پروردگارا، بر محمد و آل او درود فرست و ایمانم را به کاملترین درجه ایمان برسان و یقینم را بهترین یقین قرار ده و فرجام نیتم را بهترین نیتها بگردان و عملم را به بهترین اعمال برسان.

پروردگارا، با لطف خودت نیتم را نیکو گردان و یقینم را با رحمت بی‌پایانت از گزند انحراف، مصون‌دار و با قدرت بی انتهایت، هر عمل فاسدی که از من سر زده است اصلاح فرما.

پروردگارا، بر محمد و آل او درود فرست و اموری را که اهتمام به آنها مشغولم می‌کند کفایت فرما و مرا به کاری که فردای قیامت از من درخواست می‌کنی وادار کن و در ایام عمرم فراغتی بخش تا به کاری که برای آنم آفریده‌ای بپردازم و بی‌نیازم کن و به من روزی وسیع عطا فرما و عزت ببخش و گرفتار کبر و خودپسندی نکن و به عبادت خالص مشغولم دار و عبادتم را با عجب و غرور باطل نکن.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و به هر اندازه‌ای که میان مردم مرا مرتبه می‌بخشی پیش خودم به همان مقدار خوارم کن و هر عزت ظاهری که برایم پدیدار می‌سازی به همان اندازه پیش نفسم برای من خواری باطنی پدید آور.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و چنان کن که از هدایت شایسته بهره‌مند شوم و آن را با هیچ چیز عوض نکنم و از راه حق بهره‌مند گردم و از آن بیرون نروم و به نیت درست دست یابم و در آن شك نکنم و تا هنگامی که عمرم در راه طاعت تو می‌گذرد به من عمر بده و آنگاه که عمرم چراگاه شیطان شود، پیش از آنکه دشمنی سخت تو به من روی آورد یا خشم تو محکم و پایدار گردد جانم را بگیر.

پروردگارا، هیچ خصلتی را که مردم زشت بدانند در من نگذار مگر آنکه اصلاحش کنی و هیچ عادت ناپسندی را که مردم سرزنشم کنند باقی نگذار مگر آنکه نیکش سازی و هیچ خوی پسندیده‌ای را در من ناقص نگذار مگر آنکه کاملش کنی.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و دشمنی سخت دشمنان را درباره من به دوستی تبدیل کن و حسد و بدخواهی سرکشان را به محبت تغییر ده و بدگمانی صالحان را به اطمینان و دشمنی نزدیکان را به دوستی و بدرفتاری خویشان را به خوشرفتاری و خوار کردن نزدیکان را به یاری و دوستی مدارا کنندگان را به دوستی واقعی مبدل فرما.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمد خدابخشی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

مهدی کرمی خرم آبادی

شهریورماه ۱۳۹۳

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

چکیده

فهرست مطالب

فهرست تصاویر ت

فهرست جداول ث

پیشگفتار ۱

۱ مقدمه ای بر تحلیل پوششی داده ها ۴

۱.۱ مقدمه ۴

۲.۱ تابع تولید ۴

۱.۲.۱ روش پارامتری ۵

۲.۲.۱ روش های غیرپارامتری ۶

۳.۲.۱ مجموعه امکان تولید(PPS) ۷

۳.۱ مدل CCR ۱۰

۱.۳.۱ خواص مدل پوششی CCR ۱۵

۲.۳.۱ خواص مدل مضربی CCR ۱۶

۴.۱ مدل BCC ۱۶

۱.۴.۱ خواص مدل BCC ۱۹

۵.۱ مدل جمعی ۱۹

۱.۵.۱ خواص مدل جمعی ۲۰

۲ تحلیل پوششی داده های نادقیق ۲۱

۱.۲ مقدمه ۲۱

۲.۲ داده های نادقیق و $IDEA$ ۲۲

۱.۲.۲ تحلیل پوششی داده های بازه ای ۲۴

۱.۱.۲.۲ دقیق سازی داده های بازه ای ۲۵

۲.۱.۲.۲ روش تبدیلات محدب ۳۰
۲.۲.۲ تحلیل پوششی داده های ترتیبی ۳۲
۱.۲.۲.۲ تبدیل داده های ترتیبی ضعیف به دادهای دقیق ۳۳
۲.۲.۲.۲ تبدیل داده های ترتیبی قوی به دادهای دقیق ۳۸
۳.۲ رده بندی کارایی ۴۳

۳ مدل های ابرکارایی کلاسیک در تحلیل پوششی دادهها **۴۴**
۱.۳ مقدمه ۴۴
۲.۳ مدل ابرکارایی اندرسن – پیترسن (AP) ۴۴
۱.۲.۳ مدل AP در ماهیت خروجی (CCR) ۴۶
۲.۲.۳ مدل AP در ماهیت ورودی (BCC) ۴۸
۳.۳ مدل ابرکارایی $LJK - CCR$ ۴۸
۴.۳ مدل $Super\ SBM(I)$ ۵۰

۴ مدل های ابرکارایی کلاسیک در تحلیل پوششی داده های نادقیق **۵۳**
۱.۴ مقدمه ۵۳
۲.۴ مدل CCR در ماهیت ورودی و مدل ابرکارایی AP متناظر آن ۵۴
۳.۴ مدل ابرکارایی AP با داده های ترتیبی ۵۶
۱.۳.۴ تبدیل داده های ترتیبی ضعیف به دادهای دقیق ۵۶
۲.۳.۴ روش تبدیلات محدب ۵۷
۳.۳.۴ تبدیل داده های ترتیبی قوی به دادهای دقیق ۶۳
۴.۴ رده بندی ابرکارایی ۷۰

نتیجه گیری **۷۱**

واژهنامه فارسی به انگلیسی **۷۲**

کتاب نامه **۷۴**

فهرست تصاویر

۱.۱ تصویر ناکارا بر روی مرز کارا ۱۰
۲.۱ مجموعه امکان تولید و مرز تولید مدل CCR ۱۵
۳.۱ مجموعه امکان تولید و مرز تولید مدل BCC ۱۷

فهرست جداول

۱.۲ داده های ورودی و خروجی برای ارزیابی کارایی ۲۹
۲.۲ نتایج عددی ۳۰
۳.۲ داده های مراکز خدماتی مخابرات کره جنوبی ۳۶
۴.۲ فرم دقیق داده های x_3 و y_3 برای محاسبه کران پایین کارایی ۳۷
۵.۲ فرم دقیق داده های x_3 وy_3 برای محاسبه کران بالای کارایی ۳۷
۶.۲ نتایج عددی ۳۸
۷.۲ مقادیر بهینه η_j^* ۴۲
۸.۲ مقادیر دقیق(x_3) برای محاسبه کران بالای کارایی ۴۲
۹.۲ نتایج عددی ۴۳

۱.۳ داده های مثال عددی ۵۲
۲.۳ نتایج محاسباتی مدل ابرکارایی AP ۵۲

۱.۴ داده های مراکز خدماتی مخابرات کره جنوبی ۶۱
۲.۴ فرم دقیق داده های x_3 وy_3 برای محاسبه کران پایین ابرکارایی ۶۲
۳.۴ فرم دقیق داده های x_3 وy_3 برای محاسبه کران بالای ابرکارایی ۶۲
۴.۴ نتایج عددی ۶۳
۵.۴ مقادیر بهینه η_j^* ۶۷
۶.۴ مقادیر دقیق(x_3) برای محاسبه کران بالای ابرکارایی ۶۸
۷.۴ نتایج عددی ۶۸
۸.۴ مقادیر دقیق(x_3) برای محاسبه کران بالای ابرکارایی ۶۹
۹.۴ نتایج عددی ۶۹
۱۰.۴ مقادیر دقیق (x_3) برای محاسبه کران پایین ابرکارایی ۷۰
۱۱.۴ نتایج عددی ۷۰

پیشگفتار

تحلیل پوششی داده ها [۱] ، (DEA) یک ابزار تصمیم گیری مناسب برای ارزیابی عملکرد نسبی مجموعه ای از واحد های تحت ارزیابی است که دارای ورودی و خروجی های مشابه می باشند. اولین مدل در DEA ، مدل CCR است که در سال ۱۹۷۸ توسط چارنز، کوپر و رودز [۲] پیشنهاد گردید [۱]. در مدل های کلاسیک تحلیل پوششی داده ها می بایست، که مقدار تمامی داده های ورودی ها و خروجی ها شناخته شده باشند. این فرض همیشه در دنیای واقعی درست نیست. به علت عدم اطمینان در داده ها، برخی اوقات تحلیل پوششی داده ها با داده های نادقیق مواجه می شود، مخصوصاً وقتی یک سری از واحدهای تصمیم گیرنده حاوی داده های بازه ای و ترتیبی باشند و به طور کلی صحبت از عدم اطمینان در داده ها باشد، مدل تحلیل پوششی داده ها به یک مدل غیر خطی تبدیل می شود و تحلیل پوششی داده های نادقیق $(IDEA)$ [۳] نامیده می شود.

اولین بار کوک [۴] [۲] در سال ۱۹۹۳ به این موضوع پرداخت . سپس کوپر در سال ۱۹۹۹ راه حلی برای برخورد با داده های نادقیق مانند: ترتیبی، بازه ای ارائه کرد و مدل های تحلیل پوششی داده ها با چنین داده هایی را تحلیل پوششی داده ها با داده های نا دقیق نامید[۳] ، راه حل او برای برخورد با این موضوع یک مدل غیر خطی بود که با تغییر متغیر به مدل خطی تبدیل می شد .کیم [۵] و همکاران [۴] در سال ۱۹۹۹یک روش تغییر متغیر و مقیاس را برای این امر معرفی نمودند، نقطه ضعف مدل آن ها این بود که داده های بازه ای را در مدلشان مورد توجه قرار نداده بودند. لی [۶] و همکاران

[۱] Data Envelopment Analysis
[۲] Charnes, Cooper and Rhodes
[۳] Imprecise Data Envelopment Analysis
[۴] Cook
[۵] Kim
[۶] Lee

[۵] در سال ۲۰۰۲ استفاده از داده های ترتیبی را برای مدل های جمعی توسعه دادند و آن ها نیز از روش تغییر مقیاس و متغیر استفاده نمودند که این امر حجم محاسبات را بسیار زیاد می کرد. انتانی [۷] و همکاران [۶] در سال ۲۰۰۲ یک مدل تحلیل پوششی داده ها برای اندازه گیری کارایی بازه ای با دو دیدگاه خوش بینانه و بدبینانه را ارائه نمودند، ضعف مدل آن ها این بود که تنها یک ورودی و یک خروجی را با دادهای ترتیبی محاسبه می نمود. دسپوتیس و اسمیرلیس [۸] [۷] در سال ۲۰۰۲ نیز یک روش برای برخورد با دادهای نادقیق را معرفی نمودند که اساس کار ما در این پایان نامه بر اساس همین روش است. روش آن ها تبدیل یک مدل غیر خطی به یک مدل خطی به وسیله تغییر متغیر و نتیجه مدل آن ها کارایی در حدود بازه ای بود. زو [۹] [۸] در سال ۲۰۰۳ با تبدیل داده های ترتیبی به داده های دقیق کارایی واحدها را در حالت خوشبینانه تعیین کرد اما این روش برای محاسبه کارایی، تعداد زیادی از ورودی و خروجی ها را صفر در نظر می گیرد. همچنین کوک و زو [۹] و ونگ [۱۰] [۱۰] روش هایی را برای حل مدل های DEA با داده های ترتیبی ارائه کردند.

دراغلب مدلهاي DEA ،معمولاً چندین واحد تصمیم گیری [۱۱] DMU کارا هستند. رتبه بندي بين اين واحد هاي كارا موضوع تحقيقي جالبي است. مدلهاي مختلف و مطالعات فراوانی براي رتبه بندي هاي واحدهای کارا مطرح شده است از قبيل: مدلهاي اندرسن و پيترسن [۱۲] [۱۱] در سال ۱۹۹۳، دویل و گرین [۱۳] [۱۲، ۱۳] در سال های ۱۹۹۳و۱۹۹۴، سیفورد [۱۴] و زو [۱۴] در سال ۱۹۹۹، زو[۱۵] در سال ۲۰۰۱، لی [۱۵] و همکاران [۱۶]در سال ۲۰۰۷، خدابخشی [۱۶] [۱۷] در سال ۲۰۰۷، جهانشاهلو [۱۷] و همکاران[۱۸] در سال ۲۰۱۱، پایان [۱۸]و همکاران [۱۹] در سال ۲۰۱۱،

[۷] Entani
[۸] Despotis and Smirlis
[۹] Zhu
[۱۰] Wang
[۱۱] Desigen Making Unit
[۱۲] Andersen and Petersen
[۱۳] Doyle and Green
[۱۴] Seiford and Zhu
[۱۵] Li
[۱۶] Khodabakhshi
[۱۷] Jahanshahloo
[۱۸] Payan

خدابخشی و همکاران [۲۰] در سال ۲۰۱۲، حسین زاده لطفی [۱۹] و همکاران [۲۱] در سال ۲۰۱۳، رمضانی [۲۰] و همکاران [۲۲] در سال ۲۰۱۳، جهانشاهلو و همکاران [۲۳] در سال ۲۰۱۴، و مطالعات مختلف و متعددی از این قبیل صورت گرفته، در این پایان نامه رتبه بندي را ابركارايي مي ناميم. ابركارايي يك روش براي رتبه بندي واحدهاي كارا مي باشد كه قادر است يك واحد كارا و رأسي مانند k را با مقدار كارايي بزرگتر از يك مشخص كند. در كليه مدلهاي ياد شده از داده هاي دقيق استفاده شده، اما از آنجايي كه در اغلب مسائل عملي و كاربردي داده ها نادقيق و غير قطعی هستند لذا در سال های اخیر مطالعاتی در مورد ابرکارایی داده های نادقیق ارائه شده که از جمله آنها می توان به تحقیقات خدابخشی و همکاران در این زمینه اشاره کرد [۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷].

سازمان دهی فصول این پایان نامه به صورت زیر است:

فصل اول این پایان نامه مقدمه ای بر تحلیل پوششی داده ها می باشد.

فصل دوم به معرفی تحلیل پوششی داده های نادقیق می پردازد.

فصل سوم برخی از مدل های ابرکارایی کلاسیک در تحلیل پوششی داده ها را معرفی می کند.

و در نهایت در فصل چهارم که اساس کار این پایان نامه است یکی از مدل های ابرکارایی کلاسیک که در فصل سوم معرفی شد با داده های نادقیق توسعه داده می شود.

[۱۹] Hosseinzadeh Lotf
[۲۰] Ramezani

فصل ۱
مقدمه ای بر تحلیل پوششی داده ها

۱.۱ مقدمه

مساله ارزیابی عملکرد واحدها از گذشته مورد توجه بوده است که برخورد علمی با این مطلب از اواخر جنگ جهانی دوم شروع و گسترش یافت. چون هر تصمیم‌گیری فوری بدون به کارگیری روش های علمی با مشکل مواجه می‌شد، به همین دلیل اولین گروه از دانشمندان برای تصمیم‌گیری در مورد مساله های جنگی، تصمیماتی را اتخاذ کردند. امروزه نیز با توجه به مشکلاتی از جمله محدود بودن واحدها در رابطه با تصمیم‌گیری های مناسب و...، بدون استفاده از راهکارهای علمی نتیجه ای برای بهره وری[۱] بهتر حاصل نمی‌شود. با توجه به این مشکلات به منظور به کارگیری روش های علمی، تابعی به نام تابع تولید[۲] جهت ارزیابی عملکرد واحدها بنا نهاده شد.

۲.۱ تابع تولید

تابع تولید تابعی است که برای هر ترکیب از ورودی ها ماکزیمم خروجی را بدهد. اما گاهی به دلیل چند مقداره بودن این تابع و مشکلاتی دیگر مجبورم از تقریب آن به جای خود تابع استفاده کنیم. شناخت تابع تولید یکی از موضوعات مهم علم اقتصاد است. در این صورت رابطه ی عملکرد با عوامل تاثیرگذار تابعی است، که به تابع تولید معروف است و به صورت $y = f(u, v)$ تعریف می‌شود، که در آن بردار ورودی (u, v) خروجی y را تولید می‌کند. بردار ورودی از دو

[۱] Productivity
[۲] Production function

قسمت تشکیل شده است، u عوامل قابل کنترل و v عوامل غیر قابل کنترل هستند. f تابع تولید است که از ترکیب ورودی ها ماکزیمم خروجی را تولید می‌نماید. به عبارت دیگر اگر مقدار خروجی را با y نشان دهیم و ورودی ها را با $x_{m-1}, ..., x_2, x_1$ و x_m نشان دهیم تابع تولید را می‌توان به صورت $y = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ در نظر گرفت. در این تابع y حداکثر خروجی است که می‌توان با استفاده از ترکیب عوامل $x_{m-1}, ..., x_2, x_1$ و x_m تولید نمود. محاسبه این تابع در حالت کلی دشوار است، بنابراین از تقریب آن استفاده می‌کنیم. این تقریب به دو صورت پارامتری و غیر پارامتری است.

۱.۲.۱ روش پارامتری

این روش، بسیار قدیمی است و می‌توان گفت تا سال ۱۹۵۷ که فارل[۳] [۲۸] روش غیر پارامتری را پیشنهاد نمود از این روش استفاده می‌شد. در روش پارامتری شکل خاصی از یک تابع را برای تخمین تابع تولید در نظر می‌گیرند و با استفاده از روش های ریاضی پارامترهای تابع را مشخص می‌کنند که اصطلاحاً به آن « روش برازش منحنی[۴]» نیز گفته می‌شود. در این روش ساده ترین تقریب به صورت تابع خطی است که شامل پارامترهایی است. روش هایی برای محاسبه این پارامترها وجود دارند که عبارتند از:

۱. مینیمم نمودن مجموع قدر مطلق انحرافات،

۲. مینیمم نمودن مجموع مربعات انحرافات،

۳. مینیمم نمودن ماکزیمم انحرافات است.

یکی از روش های پارامتری، روش کاب – داگلاس[۵] است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y = x_0 A_1^{x_1} A_2^{x_2} ... A_n^{x_n} \qquad (۱.۱)$$

[۳] Farrell
[۴] Curev fitting
[۵] Cobb-Douglas

$A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ و A_n ورودی ها و y خروجی و $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_0$ پارامترهای آن می‌باشند. هم چنین فرض کنیم y_j خروجی مشاهده شده ی واحد jام و A_{ij} به ازای $i = 1, 2, ..., m$، ورودی iام واحدjام است. اکنون با بیان مدل برنامه ریزی خطی زیر و حل آن پارامترهای این تابع تولید را تخمین می‌زنیم:

$$\begin{aligned} &Min \sum_{j=1}^{n} \left[x_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} - q_j \right] \\ &s.t. \;\; x_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} - q_j \geq 0, \quad j = 1, ..., n \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

که در آن $a_{ij} = \ln A_{ij}$, $x_0 = \ln A_0$ و $q = \ln y_j$ است. کارایی این تابع برای واحد jام به صورت زیر است:

$$\frac{y_j}{y_j^*} \leq 1$$

که در آن y_j^* مقدار خروجی بهینه است.

۲.۲.۱ روش های غیرپارامتری

سوال ها و ایرادات اساسی در زمینه منحنی برازش وجود داشتند که با روش پارامتری قابل پاسخگویی نبودند. لذا فارل [۲۸] در سال ۱۹۵۷ روش غیرپارامتری را مطرح کرد. یکی از روش های غیرپارامتری، روش تحلیل پوششی داده ها است. این روش، تکنیکی را برای محاسبه کارایی نسبی واحد های تصمیم‌گیری$(DMUs)$ فراهم می‌کند (کلمه نسبی به دلیل مقایسه واحدها با یکدیگر است). با استفاده از مجموعه امکان تولیدی که فارل در این روش مطرح کرده بود، مدل هایی مانند[۶] CCR و در ادامه مدل هایی مثل [۷] BCC و... برای محاسبه ی کارایی واحدها معرفی شدند. که به دلیل بسط و گستردگی مدل ها و حجم زیاد مطالب در این مقدمه تنها به مدل های BCC, CCRو مدل جمعی[۸] اشاره خواهیم کرد. برای آشنایی بیشتر با روند پیشرفت و انواع مدل های DEA طی چند دهه اخیر به مرجع [۲۹] رجوع کنید. قبل از معرفی مدل ها ابتدا به چند مفهوم مهم اشاره کوتاهی می‌کنیم.

اگر واحد تصمیم‌گیری دارای یک ورودی و یک خروجی باشد، نسبت خروجی به ورودی میزان، کارایی مطلق[۹] آن واحد

[۶] Charnes, Cooper and Rhodes
[۷] Banker Charnes Cooper
[۸] Additive model
[۹] Absolute efficiency

(DMU) را نشان می‌دهد.

حال اگر واحد تصمیم‌گیری دارای m ورودی و s خروجی باشد و قیمت خروجی ها و هزینه ورودی ها مشخص باشند، نسبت مجموع وزنی خروجی ها به مجموع وزنی ورودی ها میزان کارایی اقتصادی را نشان می‌دهد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Eff = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \quad (j\text{ام واحد})\ (۳.۱)$$

که x_{ij} ورودی iام و v_i وزن ورودی iام در واحد jام و y_{rj} خروجی rام و u_r وزن خروجی rام در واحد jام است. در ارزیابی بعضی از واحدها هزینه ورودی و قیمت خروجی، مشخص نیست و یکی از اهداف اصلی DEA، پیدا کردن همین وزن ها و تعیین کارایی است. بنابراین بحث ورودی و خروجی مجازی مطرح می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{ورودی مجازی} &= \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \\ \text{خروجی مجازی} &= \lambda_1 y_1 + ... + \lambda_n y_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \end{aligned} \quad (۴.۱)$$

که $\lambda_j \geq 0\ (j = 1, ..., n)$.

اکنون برای تعریف کارایی نسبی[۱۰] یک DMU لازم است ابتدا مجموعه امکان تولید را معرفی کنیم.

۳.۲.۱ مجموعه امکان تولید(PPS)

همان طوری که در روش غیر پارامتری ذکر شد به دلیل های مختلف، تابع تولید به راحتی محاسبه نمی‌گردد و در بعضی مواقع به دست آوردن صورت تحلیلی آن غیر ممکن است. از این رو مجموعه ای به نام مجموعه امکان تولید[۱۱] می‌سازیم و مرز آن را تقریبی از تابع تولید در نظر می‌گیریم تا کارایی نسبی مجموعه مشاهدات را به ما بدهد. مجموعه امکان تولید به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T = \{\ (x, y) | \text{بردار نامنفی } x \text{ بتواند بردار نامنفی } y \text{ را تولید کند}\ \}$$

[۱۰] Relative efficiency
[۱۱] Production Possebility Set

حال برای مشخص کردن مجموعه ی T ابتدا فرض می‌کنیم که در هر بردار ورودی و خروجی حداقل یک مولفه مثبت وجود دارد. حال مجموعه یT را طوری در نظر می‌گیریم که در اصول زیر صدق نماید.

۱. اصل شمول مشاهدات: این اصل بیان می‌دارد که تمامی مشاهدات به مجموعه امکان تولید T تعلق دارند. یعنی:

$$(x_j, y_j) \in T \quad j = ۱, ..., n$$

۲. اصل بیکرانی اشعه یا بازده به مقیاس ثابت: تکنولوژی تولید بازده به مقیاس ثابت دارد یعنی تغییرات خروجی به تغییرات ورودی ثابت است:

$$((x, y) \in T, \lambda \geq ۰) \Rightarrow (\lambda x, \lambda y) \in T$$

۳. اصل تحدب: T مجموعه ای محدب و بسته است. یعنی:

$$((x_۱, y_۱) \in T, (x_۲, y_۲) \in T, ۰ \leq \lambda \leq ۱) \Rightarrow (\lambda(x_۱, y_۱) + (۱ - \lambda)(x_۲, y_۲)) \in T$$

۴. اصل امکان پذیری: این اصل دلالت بر این دارد که اگر $\bar{x}$, $\bar{y}$ را تولید کند، هر ورودی بزرگتر یا مساوی از $\bar{x}$ نیز می‌تواند، خروجی کمتر یا مساوی از $\bar{y}$ را تولید می‌کند. یعنی:

$$((\bar{x}, \bar{y}) \in T, \forall x \quad x \geq \bar{x}, \ \ \forall y \quad y \leq \bar{y}) \Rightarrow (x, y) \in T$$

۵. اصل کمینه درون یابی: T می‌بایست اشتراک همه مجموعه هایی باشد که در اصول موضوعه ۱، ۲ ، ۳ و ۴ صدق می‌کند. بنابراین T را کوچکترین مجموعه ای می‌گیریم که در چهار اصل نخست صدق کند.

قضیه ۱.۱. کوچکترین مجموعه ای که در اصول موضوعه فوق صدق می‌کند به صورت زیر است:

$$T_c = \left\{ (x, y) | \, x \geq \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_j, y \leq \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_j, \lambda_j \geq ۰, \, j = ۱, ..., n \right\}$$

T_c را مجموعه امکان تولید CCR می‌گویند و آن را با T_{CCR} نیز نمایش می‌دهند.

برهان: به [۲۹] مراجعه شود.

تعریف ۲.۱ (DMU غالب). DMU_k بر DMU_h غالب است اگر نامساوی های زیر به ازاء حداقل یک مولفه اکید باشد.

$$\begin{aligned} -x_k &\geq -x_h \\ y_k &\geq y_h \end{aligned}$$

تعریف ۳.۱ (کارایی نسبی). DMU_k را کارای نسبی گویند اگر و تنها اگر هیچ $(x, y) \in T$ یافت نشود که DMU_k را مغلوب کند. برای محاسبه ی میزان کارایی نسبی هر واحد باید کارایی مطلق آن واحد را بر ماکزیمم کارایی مطلق از بین دیگر واحدها تقسیم کرد.

تعریف ۴.۱ (کارای پارتو-کوپمن). DMU_k را کارای پارتو-کوپمن می‌نامند، اگر بهبود هیچ کدام از ورودی ها و خروجی هایش بدون بدتر شدن سایر ورودی و خروجی هایش ممکن نباشد.

مدل های DEA به صورت مدل های شعاعی و غیر شعاعی هستند. در مدل های شعاعی وقتی کارایی واحد ارزیابی مدنظر برابر ۱ باشد گویند DMU مربوطه به مفهوم شعاعی کارا است. کارایی در این مدل ها ممکن است ضعیف یا قوی باشد. وجه تسمیه کارایی در این مدل آن است که در امتداد شعاعی ورودی ها را به یک نسبت منقبض یا خروجی ها در امتداد شعاعی به یک نسبت منبسط می‌گردند. دو مدل CCR و BCC از مدل های شعاعی هستند. در مدل های غیر شعاعی روش انقباض تمامی ورودیها معمولا به یک نسبت نیست. و در کل با اندازه های متفاوت فاصله واحد تحت ارزیابی را با مرز کارایی مورد سنجش قرار می‌دهد. در واقع به جای محاسبه ی بیشترین انقباض ممکن، روی اندازه بهینه متغیرهای متمرکز می‌شوند. بنابراین در این نوع مدل ها اگر فاصله بهینه صفر باشد واحد تحت ارزیابی کارا، و غیر این صورت ناکارا معرفی می‌گردد. یکی از این مدل ها، مدل جمعی است.

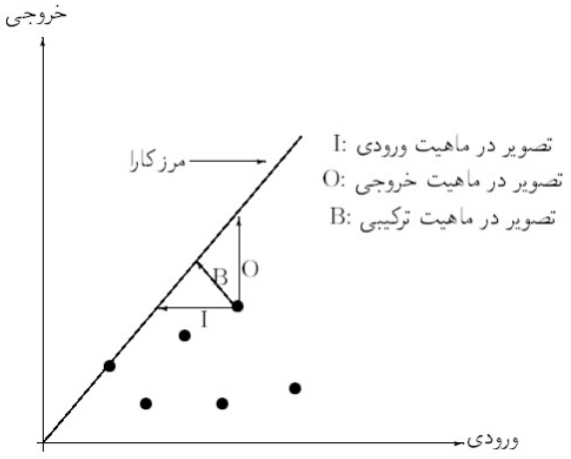
۳.۱ مدل CCR

این مدل در سال ۱۹۷۸ توسط چارنز، کوپر و رودز [۱] ابداع گردید. آن ها روش تحلیل پوششی داده ها را برای سیستم های چند ورودی و چند خروجی تعمیم دادند. در این مدل از فرمول بندی برنامه ریزی خطی برای اندازه گیری کارایی یک واحد تصمیم‌گیری نسبت به واحد های دیگر با روش بهینه سازی ریاضی، استفاده می‌شود. با استفاده از مجموعه امکان تولید، مدل CCR تحت دو ماهیت ورودی و خروجی و مدل ترکیبی (بدون ماهیت) به دست می‌آید. در بررسی حالت اول فرض می‌کنیم DMU_k واحد ناکارای تحت ارزیابی باشد. به طور شعاعی به سه روش می‌توانیم DMU_k را روی مرز کارا تصویر کنیم. (شکل (۱.۱))

۱. ورودی آن را کاهش دهیم،

۲. خروجی آن را افزایش دهیم،

۳. بطور همزمان ورودی را کاهش و خروجی را افزایش دهیم.



شکل ۱.۱: تصویر ناکارا بر روی مرز کارا