دانشگاه پیام نور

مرکز شیراز

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض (گرایش جبر)

دانشکده: علوم پایه

گروه علمی: ریاضی

عناصر پاک در حلقه های کاهش یافته، گلفاند، مرتب و توابع پیوسته

استاد راهنما: دکتر احمد خاکساری

استاد مشاور: دکتر منصوره معانی شیرازی

نگارش: وحید بتویی

مرداد ۸۷

بسمه تعالی

دانشگاه پیام نور

مرکز شیراز

تصویب پایان نامه/ رساله

پایان نامه تحت عنوان:

عناصر پاک در حلقه های کاهش یافته، گلفاند، مرتب و توابع پیوسته

که توسط **وحید بتویی** در مرکز شیراز تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأئید می باشد. تاریخ دفاع: **۸۷/۵/۳۰** نمره: **۱۸/۵** درجه ارزشیابی: **عالی**

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱- دکتر احمد خاکساری	استاد راهنما	استادیار	
۲- دکتر منصوره معانی شیرازی	استاد مشاور	استادیار	
۳- دکتر بهمن یوسفی	استاد داور	استاد	
٤- دکتر عبدالرسول قرائتی	نماینده تحصیلات تکمیلی	استادیار	

تقدیم به

همسرم

و

فرزندانم

مریم و امیرعلی

اکنون که با لطف و عنایت خداوند این پایان نامه به اتمام رسید بر خود لازم می دانم از کمک و همراهی اساتید گرامی و دوستان عزیزی که در این راه یاریگر اینجانب بودند، تشکر و قدردانی نمایم.

از زحمات بی دریغ و تلاش دلسوزانه استاد گرانقدر، جناب آقای دکتر احمد خاکساری که با تجارب گرانمایه خود راهنما و راهگشای اینجانب بودند نهایت سپاس و امتنان را دارم.

از خانم دکتر منصوره معانی شیرازی که با تقبل استاد مشاور اینجانب بر من منت نهادند صمیمانه سپاسگذارم توفیقات روزافزون ایشان را از خداوند بزرگ خواهانم.

از اساتید عزیز و بزرگوار جناب دکتر یوسفی و دکتر قرائتی و خانم دکتر ارشاد تشکر و قدردانی می کنم امیدوارم در تمامی مراحل زندگی موفق و مؤید باشند.

از دوست عزیزم استاد علی فلکین که کمکهای صمیمانه ایشان در به اتمام رسیدن این پایان نامه مؤثر بود کمال امتنان را دارم.

اکنون که با لطف و عنایت خداوند این پایان نامه به اتمام رسید بر خود لازم می دانم از کمک و همراهی اساتید گرامی و دوستان عزیزی که در این راه یاریگر اینجانب بودند، تشکر و قدردانی نمایم.

از زحمات بی دریق و تلاش دلسوزانه استاد گرانقدر، جناب آقای دکتر احمد خاکساری که با تجارب گرانمایه خود راهنما و راهگشای اینجانب بودند نهایت سپاس و امتنان را دارم.

از خانم دکتر منصوره معانی شیرازی که با تقبل استاد مشاور اینجانب بر من منت نهادند صمیمانه سپاسگذارم توفیقات روزافزون ایشان را از خداوند بزرگ خواهانم.

از اساتید عزیز و بزرگوار جناب دکتر یوسفی و دکتر قرائتی و خانم دکتر ارشاد تشکر و قدردانی می کنم امیدوارم در تمامی مراحل زندگی موفق و مؤید باشند.

از دوست عزیزم استاد علی فلکین که کمکهای صمیمانه ایشان در به اتمام رسیدن این پایان نامه مؤثر بود کمال امتنان را دارم.

چکیده

یک عنصر از حلقه R پاک است هرگاه، آن مجموع یک عنصر خود توان و یک عنصر یکه باشد و یک زیر مجموعه A از حلقه R پاک است هرگاه هر عنصر آن پاک باشد. این مفهوم بوسیله Nicholson معرفی شد. در این پایان نامه که مبتنی بر مقاله ای از K. Samei چاپ شده در Communications in Algebra 2004 است چند نتیجه اساسی در باره عناصر پاک در حلقه های مرتب، گلفاند، کاهش یافته و $C(X)$ نشان داده می شود. بویژه چندین شرط هم ارز توپولوژیکی و جبری برای پاک بودن حلقه $C(X)$ ارائه شده است.

.

فهرست

چکیده فارسی
مقدمه ۱
فصل اول: مباحث و تعریف مقدماتی ۲
۱.۱- توپولوژی ۳
۱.۲- مقدمات جبری ۹
۱.۳- حلقه توابع پیوسته $C(X)$ ۱۵
فصل دوم: عناصر پاک ۱۷
۱۲- حلقه های پاک ۱۸
۲.۲- عناصر پاک در حلقه های کاهشی ۲۰
۲.۳- حلقه های گلفاند ۲٤
فصل سوم: حلقه های مرتب ۳۲
۳.۱- مقدمات ۳۳
۳.۲- عناصر پاک در حلقه های مرتب ۳۶
فصل چهارم: عناصر پاک در حلقه $C(X)$ ٤۱
واژه نامه انگلیسی به فارسی ۵۲
مراجع ۵٤
چکیده انگلیسی ۵۵

مقدمه

یک عنصر در حلقه R پاک نامیده می شود هرگاه مجموع یک عنصر یکه ویک عنصر خودتوان باشد و یک زیرمجموعه از حلقه R پاک نامیده می شود هرگاه همه عناصر آن پاک باشند.

در این پایان نامه، به توصیف نسبتاً خودکفایی از نتایج حاصله در مقاله:

Clean Elements in Commutative Reduced Rings

توسط K. Samei چاپ شده در:

Communications In Algebra 2004

می پردازیم.

این پایان نامه حاوی چهار فصل است که در فصل نخست آن به ارائه تعریفها و قضایای جبری و توپولوژیکی مورد نیاز می پردازیم. در فصل دوم به تعریف عنصر و حلقه پاک پرداخته و عناصر پاک در حلقه های کاهش یافته مطالعه مورد بررسی قرار گرفته اند. فصل سوم شامل مقدماتی در باره حلقه های مرتب و بررسی عناصر پاک در این حلقه است. در فصل چهارم به بررسی عناصر پاک در حلقه $C(X)$ می پردازیم و در این بخش چندین شناسه جبری و تو پولوژیکی برای پاک بودن حلقه $C(X)$ ارائه می شود.

فصل (۱)

مباحث مقدماتی

این فصل شامل تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز این پایان نامه است و از سه بخش تشکیل شده است. در بخش اول مقدمات توپولوژیکی را ارائه می کنیم. بخش دوم شامل تعاریف و مقدمات جبری مورد نیاز است و بخش سوم شامل معرفی حلقه توابع پیوسته $C(X)$ است.

۱-۱ توپولوژی

(۱-۱-۱) تعریف: خانواده B از مجموعه های بسته فضای توپولوژیک X را یک پایه برای مجموعه های بسته در X می نامند، هرگاه هر مجموعه بسته در X اشتراکی از اعضای B باشد.

(۱-۱-۲) قضیه: خانواده B یک پایه برای مجموعه های بسته فضای توپولوژیک X است اگر و تنها اگر برای هر مجموعه بسته F در X و هر $x \in X - F$ ، عنصری مانند $\beta \in B$ وجود داشته باشد که $F \subseteq \beta$ و $x \notin \beta$.

برهان:

(لزوم): فرض کنید که F یک مجموعه بسته در X باشد از آنجا که B یک پایه برای مجموعه های بسته در X است، لذا $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ که $\{F_i\} \subseteq B$. اگر $x \in X - F$ ، آنگاه $j \in I$ وجود دارد که $x \notin F_j$. توجه کنید که بوضوح $F \subseteq F_j$.

(کفایت): اگر F یک مجموعه بسته در X باشد، آنگاه طبق فرض برای هر $x \in X - F$، $F_x \in B$ وجود دارد که $F \subseteq F_x$ و $x \notin F_x$. در نتیجه $F \subseteq \bigcap_{x \in X - F} F_x$. روشن است که $\bigcap_{x \in X - F} F_x \subseteq F$ و در نتیجه $F = \bigcap_{x \in X - F} F_x$. □

در ادامه این بخش با تعریف مناسبی از مجموعه های باز و بسته در مجموعه ایدالهای اول حلقه R، آن را به یک فضای توپولوژیک تبدیل می کنیم و به بررسی خواص توپولوژیکی آن می پردازیم.

(۱-۱-۳) تعریف: فرض کنید که R یک حلقه و X یک زیرمجموعه آن باشد. قرار می دهیم:

$Spec(R) = \{I \mid$ یک ایدال اول R است $I\}$

$Max(R) = \{I \mid$ یک ایدال ماکسیمال R است $I\}$

$$V(X)=\{P\in Spec(R)\,|\,X\subseteq P\}$$

چنانچه $X=\{a\}$ (یک مجموعه تک عضوی باشد) قرار می دهیم:

$$V(X)=V(a)=\{P\in Spec(R)\,|\,a\in P\}$$

(۱-۱-۳) لم: برای هر $X\subseteq R$ داریم:

$$V(X)=\bigcap_{a\in X}V(a)$$

برهان:

واضح است.

(۱-۱-٤) قضیه: اگر I ایدال تولید شده توسط زیرمجموعه X از حلقه R باشد، آنگاه:

$$V(I)=V(X)$$

برهان:

چون $X\subseteq I$ پس $V(I)\subseteq V(X)$. اگر $P\in V(X)$، آنگاه. $X\subseteq P$. اما $I=\langle X\rangle$ ودرنتیجه $P\in V(I)$ و بنابراین $V(I)=V(X)$. □

حال با تعریف مجموعه های بسته به صورت $V(I)$ برای هر ایدال از R یک توپولوژی روی $Spec(R)$ برحسب مجموعه های بسته تعریف می کنیم که برای این منظور قرار می دهیم:

(۱-۱-۵) قضیه: فرض کنید که I یک ایدال از حلقه R باشد، قرار می دهیم:

$$F=\{V(I)\,|\,\text{یک ایدال } R \text{ است } I\}$$

در اینصورت داریم:

۱) $\phi=V(1)=V(R)\in F$ و $Spec(R)=V(0)\in F$.

۲) اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده ای از ایدالهای R باشد، آنگاه

$$\bigcap_{i\in I}V(A_i)=V(\bigcup_{i\in I}A_i)\in F$$

۳) برای ایدالهای $I_1,\dots,I_n$ از R داریم:

$$\bigcup_{i=1}^{n}V(I_i)=V(\bigcap_{i=1}^{n}I_i)$$

برهان:

۱) بدیهی است.

۲)

$$
\begin{aligned}
P \in V(\bigcup_{i\in I} A_i) &\Leftrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq P \\
&\Leftrightarrow A_i \subseteq P ;\forall i \in I \\
&\Leftrightarrow P \in V(A_i);\forall i \in I \\
&\Leftrightarrow P \in \bigcap_{i\in I} V(A_i)
\end{aligned}
$$

۳) شبیه (۲) است. □

قضیه قبل نشان می دهد که اصول موضوعه فضاهای توپولوژی بر حسب زیرمجموعه های بسته برای F برقرار هستند. از این رو می توان تعریف ریر را داشت.

(۱-۱-٦) تعریف: فرض کنید که I یک ایدال از حلقه R باشد، در این صورت:

$$F = \{V(I) \mid \text{است } R \text{ یک ایدال } I\}$$

یک توپولوژی روی R است که به توپولوژی زاریسکی موسوم است.

(۱-۱-۷) تعریف: فرض کنید R یک حلقه باشد و $X \subseteq R$ در اینصورت متمم $V(X)$ در $Spec(R)$ را با $U(X)$ نشان می دهیم به عبارت دیگر

$$U(X) = Spec(R) - V(X) = \{P \in Spec(R) \mid X \not\subseteq P\}$$

و اگر $X = \{a\}$ (یک مجموعه تک عضوی باشد) قرار می دهیم:

$$U(X) = U(a) = Spec(R) - V(a)$$

(۱-۱-۸) لم: برای هر $X \subseteq R$ داریم:

۱) $U(X) = \bigcup_{a\in X} U(a)$.

۲) $U(X)=U(\langle X\rangle)$

برهان:

واضح است.

(۱-۱-۹) لم: فرض کنید R یک حلقه باشد، در اینصورت:

۱) برای هر دو عنصر a و b از حلقه R داریم:

$U(a)\bigcap U(b)=U(ab)$ و $V(a)\bigcup V(b)=V(ab)$

۲) برای هر $a\in R$ و $n\in\mathbb{N}$ د اریم:

$V(a^n)=V(a)$ و $U(a^n)=U(a)$

۳) $a\in Nil(R)$ اگر و تنها اگر $V(a)=Spec(R)$ یا به طور معادل $a\in Nil(R)$ ، اگر و تنها اگر $U(a)=\phi$.

٤) اگر A و B زیرمجموعه هایی از R باشند و $A\subseteq B$ ، آنگاه:

$U(A)\subseteq U(B)$ و $V(B)\subseteq V(A)$.

برهان:

واضح است. □

برای هر زیرمجموعه S از $Spec(R)$ توپولوژی S را توپولوژی زیرفضایی القا شده از $Spec(R)$ در نظر می گیریم و در این راستا تعاریف زیر را خواهیم داشت:

(۱-۱-۱۰) تعریف: فرض کنید که S زیرمجموعه ای از $Spec(R)$ باشد در این صورت قرار می دهیم:

$$V_S(a)=V(a)\bigcap S \qquad V_S(I)=V(I)\bigcap S$$

$$M(a)=V(a)\bigcap Max(R) \qquad M(I)=V(I)\bigcap Max(R)$$

(۱-۱-۱۱) تعریف: فرض کنید که X یک فضای توپولوژیک باشد. در اینصورت:

۱) فضای توپولوژیک X را یک $T_\circ$– فضا نامیم، هرگاه برای هر دو عضو متمایز $x,y\in X$ مجموعه ای باز مانند U موجود باشد که $x\in U$ و $y\notin U$.

۲) فضای توپولوژیک X را یک T_1– فضا نامیم، هرگاه برای هر $x\in X$ مجموعه $\{x\}$ بسته باشد.

۳) فضای توپولوژیک X را یک $T_۲$– فضا (هاسدروف) نامیم هرگاه برای هر دوعضو متمایز $x, y \in X$ مجموعه های باز U و V موجود باشند که $x \in U$ و $y \in V$ و $U \cap V = \phi$.

٤) فضای توپولوژیک X را کاملاً منظم نامیم، هرگاه X یک فضای هاسدروف باشد وبرای هر مجموعه بسته مانند F و هر $x \in X - F$ تابع پیوسته ای مانند $f : X \longrightarrow [۰,۱]$ موجود باشد که $f(x) = ۰$، و برای هر $y \in F$، $f(y) = ۱$ که در آن توپولوژی روی $[۰,۱]$ توپولوژی معمولی است.

۵) یک زیر مجموعه از فضای توپولوژیک X را کلوپن نامیم، هرگاه هم باز و هم بسته باشد.

٦) فضای توپولوژیک X را یک فضای صفر بعدی نامیم، هرگاه X یک فضای $T_۱$ بوده و دارای پایه ای متشکل از مجموعه های هم باز و هم بسته در X باشد.

۷) زیرمجموعه A از فضای توپولوژیک X را چگال در X نامیم هرگاه $\overline{A} = X$

در سرتاسر این متن X نشان دهنده یک فضای هاسدروف و کاملاً منظم است.

قضیه زیر به لم چسب معروف است.

(۱-۱-۱۲) قضیه: فرض کنید که X یک فضای توپولوژیک باشد و $X = \bigcup_{i=۱}^{n} U_i$ که در آن U_i ها زیر مجموعه های باز (بسته) در X هستند و $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که برای هر $۱ \le i \le n$، $f|U_i$ پیوسته است، آنگاه f روی X پیوسته است.

(۱-۱-۱۳) لم: هر فضای هاسدروف صفر بعدی، کاملاً منظم است.

برهان:

فرض کنید که F مجموعه ای بسته در X باشد و $x \notin F$ ، آنگاه $X - F$ مجموعه ای باز شامل x است. چون X صفر بعدی است، پس دارای پایه ای است که عناصر آن مجموعه های هم باز و هم بسته اند. بنابر این یک عضو پایه مانند U (که مجموعه ای کلوپن است) وجود دارد به طوری که $x \in U \subseteq X - F$. حال تابع f را چنین تعریف می کنیم:

$$f(t) = \begin{cases} ۱ & t \in U \\ ۰ & t \in X - U \end{cases}$$

طبق لم چسب واضح است که f پیوسته است. از طرفی $f(x)=1$ و $f(F)=0$ زیرا $F \subseteq X - U$. بنابر این X کاملاً منظم است. □

حال به ارائه چند مثال از فضاهای توپولوژیک می پردازیم.

مثال: هر فضای گسسته X یک فضای صفر بعدی است. زیرا هر فضای گسسته بوضوح T_1 است، و $B=\{\{x\} \mid x \in X\}$ یک پایه از مجموعه های هم باز و هم بسته برای X است.

(۱-۱-۱٤) تعریف: فضای فشرده، هاسدروف و صفر بعدی X را فضای بولی می نامیم.

فشرده سازی استون- چک

فرض کنید X یک فضای کاملاً منظم و $\{f_i\}_{i \in J}$ گردایه همه توابع حقیقی کراندار بر X باشدکه به وسیله مجموعه اندیس J اندیسگذاری شده است. به ازای هر $i \in J$ بازه بسته ای مانند I_i در R انتخاب می کنیم که حاوی $f_i(X)$ باشد. برای آنکه این انتخاب بدون ابهام باشد، فرض می کنیم $I_i=[\mathrm{Inf}_i(X), \mathrm{Max} f_i(X)]$ باشد. حال نگاشت $h: X \longrightarrow \prod_{i \in J} I_i$ را با ضابطه $h(x)=(f_i(x))_{i \in J}$ تعریف می کنیم. چون $\prod_{i \in J} I_i$ فشرده و X کاملاً منظم است، گردایه $\{f_i\}$ در X ، نقاط را از مجموعه های بسته جدا می سازد پس h یک نشاننده است. فشرده ای از X را که بوسیله h القا می شود را فشرده استون- چک می نامیم و با β_X نشان می دهیم.

(۱-۲) مقدمات جبری

(۱-۲-۱) تعریف: یک عنصر حلقه R را پاک می نامیم اگر آن عنصر مجموع یک خودتوان و یک عنصر یکه باشد و یک زیر مجموعه مانند A از حلقه R پاک نامیده می شود اگر هر عنصر آن پاک باشد.

(۱-۲-۲) تعریف: فرض کنید R یک حلقه و I یک ایدال آن باشد.

۱) ایدال I از حلقه R را پوچ توان می نامیم هرگاه عدد طبیعی n موجود باشد به طوری که $I^n = \{0\}$.

۲) ایدال I از حلقه R را یک ایدال پوچ گوییم هرگاه هر عضو آن پوچ توان باشد.

۳) ایدال I از حلقه R را خود توان نامیم هرگاه $I^2 = I$.

٤) رادیکال جیکوبسن حلقه R را اشتراک همه ایدالهای ماکزیمال R تعریف می کنیم و با $Jac(R)$ نمایش می دهیم. یعنی:

$$Jac(R) = \bigcap Max(R)$$

۵) حلقه R را نیمه اولیه نامیم، هرگاه $Jac(R) = \{0\}$.

٦) رادیکال I که با $\sqrt{I}$ نمایش داده می شود عبارتست از

$$\sqrt{I} = \{x \in R \mid x^n \in I \text{ ،} n \text{ به ازای یک عدد طبیعی}\}$$

۷) ایدال I رادر حلقه R نیمه اول گوییم، هرگاه $I = \sqrt{I}$.

۸) ایدال I در حلقه R، یک جمعوند مستقیم حلقه R نامیده می شود، هرگاه ایدال J در R وجود داشته باشد به گونه ای که $I \oplus J = R$. یعنی $I + J = R$ و $I \bigcap J = (0)$.

۹) عنصر $a \in R$ را پوچ توان نامیم هرگاه عددی طبیعی مانند n موجود باشد که $a^n = 0$ و مجوعه عناصر پوچ توان R را با $Nil(R)$ نمایش می دهیم.

(۱-۲-۳)لم: فرض کنید R یک حلقه و I ایدالی از آن باشد. در اینصورت:

۱) تنها عنصر خودتوان در $Jac(R)$، صفر می باشد.

۲) اگر $a \in R$ آنگاه $a \in Jac(R)$ اگر و تنها اگر برای هر $r \in R$ ، $1 - ra$ وارون پذیر باشد.

۳) اگر I ایدالی در R باشد، آنگاه $I \subseteq Jac(R)$ اگر و تنها اگر هر عضو از $1+I$ وارون پذیر باشد.

قضیه زیر روشی مناسب برای ساختن حلقه های نیمه اولیه را ارائه می دهد.

(۱-۲-٤)قضیه: برای هر حلقه R، حلقه $\frac{R}{Jac(R)}$ نیمه اولیه است و $Jac(R)$ کوچکترین ایدال R با خاصیت فوق است. یعنی اگر I ایدالی از R باشد به طوری که $\frac{R}{I}$ نیمه اولیه باشد، آنگاه $Jac(R) \subseteq I$.

برهان:

فرض کنیم $a + Jac(R) \in Jac(\frac{R}{Jac(R)})$. لذا طبق لم (۱-۲-۳)، به ازای هر $r + Jac(R) \in Jac(\frac{R}{Jac(R)})$ ، عضو $(1-ra) + Jac(R)$ در $\frac{R}{Jac(R)}$ وارون دارد. هرگاه $b + Jac(R)$ وارون آن باشد، پس $1-b+rab \in Jac(R)$ و در نتیجه عضو $b - rab = 1-(1-b+rab)$ در R وارون دارد. لذا $c \in R$ وجود دارد به طوری که داریم $(1-ra)bc = 1$ و بنابر این $(1-ra)$ در R وارون دارد. پس $a \in Jac(R)$ و لذا $a + Jac(R) = Jac(R)$، یعنی $Jac(\frac{R}{Jac(R)})$ عضو غیر صفر ندارد. □

لم زیر را بدون اثبات می آوریم

(۱-۲-۵)لم: در حلقه R داریم $Nil(R) = \bigcap Spec(R)$ و $Nil(R)$ یک ایدال نیمه اول است که مشمول در هر ایدال نیمه اول R است.

(۱-۲-٦)تعریف: حلقه R را کاهشی گوییم، هرگاه $Nil(R) = \{0\}$. یعنی ایدال صفر نیمه اول باشد.

قضیه زیر شرایط معادلی برای کاهشی بودن حلقه R را نشان می دهد.

(۱-۲-۷)قضیه: برای حلقه R شرایط زیر معادلند.

۱) $Nil(R)=\{0\}$ ،یعنی صفر ایدال نیمه اول است.

۲) ایدال صفر، تنها ایدال پوچ توان R است.

۳) صفر تنها جواب معادله $x^2=0$ در حلقه R است.

٤) برای هر دو ایدال I و J در حلقه R، از $IJ=\{0\}$ نتیجه می شود که $I\bigcap J=\{0\}$.

۵) ایدال صفر اشتراکی از ایدالهای اول است.

(۱-۲-۸)قضیه: اگر R حلقه ای کاهشی باشد، آنگاه $A\subseteq Spec(R)$ در $Spec(R)$ هم باز و هم بسته است اگر و تنها اگر عضو خودتوان $e\in R$ موجود باشد به طوری که $V(e)=A$.

برهان:

کفایت:

اگر عضو خودتوان e چنان باشد که $A=V(e)$ ، آنگاه $A=U(1-e)$ ، پس A هم باز و هم بسته است.

لزوم:

فرض می کنیم که A هم باز و هم بسته باشد. پس ایدالهای I و J از R وجود دارند به طوری که $A=V(I)=U(J)$ و لذا $A'=U(I)=V(J)$. بنابر این خواهیم داشت:

$$U(I)\bigcap U(J)=\phi\Rightarrow U(I\bigcap J)=\phi$$
$$\Rightarrow I\bigcap J\subseteq Nil(R)=\{0\}$$
$$\Rightarrow I\bigcap J=\{0\}$$

همچنین داریم

$$V(I)\bigcap V(J)=\phi\Rightarrow V(I+J)=\phi\Rightarrow I+J=R$$

پس عناصر خودتوان $e\in I$ و $e'\in J$ موجودند به طوری که $1=e+e'$ و بنابراین $A=V(e)$. □

(۱-۲-۹)لم: هر حلقه نیمه اولیه کاهشی است.

برهان:

چون $Nil(R)\subseteq Jac(R)$، پس حکم بدیهی است. □

(۱-۲-۱۰) تعریف: حلقه R را یک حلقه بولی نامیم، هرگاه هر عنصر آن خودتوان باشد.

(۱-۲-۱۱)قضیه: اگر I ایدالی از حلقه بولی R باشد، شرایط زیر معادلند.

۱) I ماکزیمال است.

۲) $\frac{R}{I} \cong \mathbb{Z}_۲$

۳) برای هر $a \in R$، $a \in I$ یا $۱-a \in I$.

برهان:

(۱⇐۲) فرض می کنیم I ایدال ماکزیمال R باشد، پس $\frac{R}{I}$ یک میدان است واز طرفی $\frac{R}{I}$ خود یک حلقه بولی است. حال فرض می کنیم $x+I \in \frac{R}{I}$ و $x+I \neq I$ ، یعنی $x \notin I$. از اینکه $x(x-۱) \in I$ خواهیم داشت $x-۱ \in I$ و لذا $x+I = ۱+I$ (برای هر $x \in R-I$.)

بنابراین میدان $\frac{R}{I}$ دو عضوی است پس $\frac{R}{I} \cong \mathbb{Z}_۲$.

(۲⇐۳) فرض می کنیم که $\frac{R}{I} \cong \mathbb{Z}_۲$ و $a \in R$، پس $a+I = ۰+I = I$ یا $a+I = ۱+I$ و بنابر این $a \in I$ یا $۱-a \in I$.

(۳⇐۱) فرض می کنیم که ایدال J از R موجود باشد که $I \subset J \subseteq R$. عضو $a \in J-I$ را انتخاب کنید، در این صورت $۱-a \in I$ و در نتیجه $۱-a \in J$. پس $۱ = a + (۱-a) \in J$ و بنابر این $J = R$ و در نتیجه I ماکسیمال است. □

(۱-۲-۱۲)لم: فرض کنید که ایدالهای $(e_۱)$ و $(e_۲)$ دو جمعوند مستقیم حلقه R باشند، آنگاه اشتراک و جمع این دو ایدال جمعوند به ترتیب عبارتند از: $(e_۱e_۲)$ و $(e_۱+e_۲-e_۱e_۲)$.

برهان:

روشن است که:

$$(e_۱e_۲) \subseteq (e_۱) \bigcap (e_۲) \qquad\qquad I$$

حال فرض می کنیم که $a \in (e_۱) \bigcap (e_۲)$ لذا عناصر $x, y \in R$ وجود دارند که:

$$a = e_۱x = e_۲y$$

بنابراین

$$a = e_1 x = e_1^2 x = e_1(e_1 x) = e_1 a = e_1 e_2 y$$

در نتیجه

$$(e_1) \bigcap (e_2) \subseteq (e_1 e_2) \qquad II$$

از روابط (I) و (II) خواهیم داشت که

$$(e_1) \bigcap (e_2) = (e_1 e_2)$$

برای اثبات تساوی دوم فرض می کنیم $I = (e_1 + e_2 - e_1 e_2)$ در اینصورت داریم:

$$e_1 + e_2 - e_1 e_2 = e_1 + e_2(1 - e_1) \in (e_1) + (e_2)$$

از این رو خواهیم داشت:

$$(e_1 + e_2 - e_1 e_2) \subseteq (e_1) + (e_2) \qquad (III)$$

از طرفی داریم که:

$$(1 - e_2)(e_1 + e_2 - e_1 e_2) = e_1 - e_1 e_2 \in I$$

اما $e_2 = (e_1 - e_1 e_2) - (e_1 + e_2 - e_1 e_2)$ پس $(e_2) \subseteq I$ و به همین ترتیب $(e_1) \subseteq I$ در نتیجه خواهیم داشت که:

$$(e_1) + (e_2) \subseteq I = (e_1 + e_2 - e_1 e_2) \qquad (IV)$$

از روابط (III) و (IV) نتیجه می شود که :

$$(e_1) + (e_2) = (e_1 + e_2 - e_1 e_2)$$

به این ترتیب اثبات قضیه به پایان می رسد. □

(۱-۲-۱۳)لم: برای هر عنصر خودتوان e در حلقه R ، ایدال (e) یک جمعوند مستقیم R است.

برهان:

چون $R = (e) + (1 - e)$ و $(e) \bigcap (1 - e) = \{0\}$، پس حکم بدیهی است. □

(۱-۲-۱) نتیجه: فرض کنید که e_1 و e_2 عناصر خود توان در حلقه R باشند، آنگاه ایدالهای $(e_1) + (e_2)$ و $(e_1) \bigcap (e_2)$ جمعوند R هستند.

برهان:

$$(e_1 e_2)^2 = e_1^2 e_1^2 = e_1 e_2$$