به نام خدا

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

گروه آمار

عنوان پایان نامه:

قضیه حد مرکزی تقریباً حتمی و نرخ دقیق همگرایی بر اساس قانون لگاریتمی، برای متغیرهای تصادفی پیوندی مثبت و منفی

ارائه شده جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته آمار ریاضی

استاد راهنما:

جناب آقای دکتر هادی جباری نوقابی

استادمشاور:

جناب آقای دکتر محمد امینی

نگارنده:

بهاره قنبری

شهریورماه ۱۳۸۸

پیشگفتار

بدون شک، استقلال متغیرهای تصادفی یکی از مفاهیم مهم آماری است که تا حد زیادی در آمار و احتمال کاربرد دارد. فرض استقلال بین متغیرهای تصادفی به دو دلیل مناسب به نظر می رسد. اول اینکه: تحت این فرض محاسبات و تجزیه و تحلیل‌ها ساده تر می شود و دوم اینکه: تمام روش‌ها و مفاهیم قوی ریاضی تئوری احتمال تحت این فرض موجود می باشد. ولی با وجود این فرض استقلال بین متغیرهای تصادفی فرضی است که بسیار قوی بوده و در عمل بندرت برقرار است. در بسیاری از مسائل کاربردی به ویژه زمانی که با فرآیندهای تصادفی روبرو هستیم با نوعی از متغیرهای تصادفی سروکار داریم که با افزایش برخی مقادیر متغیرها، مقادیر سایر متغیرها کاهش می یابند.

این عدم استقلال متغیرها گاهی به صورت مثبت و گاهی به صورت منفی ظاهر می شود که بر این اساس، متغیرها را به دو دسته وابسته مثبت و وابسته منفی تقسیم می کنیم. بررسی شکل های مختلف متغیرهای غیر مستقل، سالیان متمادی مسأله قابل توجهی بوده است ولی از آنجایی که تحت شرط عدم استقلال، تئوری و روش های احتمال به اثبات نرسیده بودند، در عمل کاربردی نداشتند.

لی من (١٩٦٦)، مفاهیم گوناگونی از وابستگی های مثبت و منفی را در حالت دو بعدی مورد بررسی قرار داد. اساری و همکاران (١٩٦٧) یک شکل قوی از وابستگی مثبت برای متغیرهای پیوندی ارائه کردند. همچنین مفاهیم قوی از وابستگی مثبت و منفی توسط اساری و همکاران (١٩٧٢) معرفی شد و این مفهوم به خوبی توسط ابراهیمی و قوش (١٩٨١)، بلاک و همکاران (١٩٨٢)، جاج داو و پروشان (١٩٨٣) و ماتولا (١٩٩٢) مورد استفاده قرار گرفت. در چند سال اخیر نیز مؤلفین بسیاری، قوانین اعداد بزرگ را برای انواع مختلف متغیرهای تصادفی وابسته مورد مطالعه و بررسی قرار داده اند. از آن جمله می توان به امینی (١٩٩٩)، نیلی ثانی (٢٠٠٣)، نزاکتی (٢٠٠٣)، زارعی (٢٠٠٥)، فکور (٢٠٠٥) و جباری (٢٠٠٧) اشاره کرد. دوستی (٢٠٠٥) و افشاری (٢٠٠٧) نیز

به ترتیب برخی از خواص متغیرهای تصادفی پیوندی منفی و آمیخته[1] را به روش موجک[2] بررسی نموده اند.

در این پایان نامه ابتدا به بررسی قضیه حد مرکزی تقریباً حتمی برای متغیرهای تصادفی پیوندی مثبت می پردازیم و سپس از نتایج آن در رابطه با متغیرهای تصادفی پیوندی منفی استفاده می‌کنیم. بعد از آن به بیان نرخ لگاریتمی می پردازیم و چگونگی کاربرد آن را در بدست آورن نرخ‌های همگرایی قوی برای سری های وزنی متغیرهای تصادفی پیوندی مثبت توضیح می دهیم. سپس این نتایج برای متغیرهای تصادفی پیوندی منفی نیز بررسی می‌شود.

در فصل اول مفاهیم، تعاریف و برخی خواص پایه ای انواع وابستگی ها ارائه می شود. در فصل دوم، به تفصیل قضیه حد مرکزی را در رابطه با متغیرهای پیوندی منفی بیان می کنیم. در فصل سوم، نرخ های قوی بر اساس قانون لگاریتمی را در مورد متغیرهای تصادفی پیوندی مثبت به کار می بریم و در فصل چهارم تعمیم آن را در مورد متغیرهای تصادفی پیوندی منفی ارائه می دهیم.

بهاره قنبری

شهریور ماه ۱۳۸۸

---

[1] Mixing

[2] Wavelet

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱−۱ مقدمه

در این فصل، برخی مفاهیم وابستگی را برای متغیرهای تصادفی معرفی می‌کنیم و خواص آن ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. سپس به بیان برخی ویژگی‌های متغیرهای تصادفی پیوندی مثبت می‌پردازیم و مثال‌هایی را مرتبط با آن‌ها ارائه می‌دهیم. در نهایت نتایج این بررسی‌ها را در مورد متغیرهای پیوندی منفی نیز نشان خواهیم داد.

۱−۲ وابستگی ربعی

مفهوم وابستگی ربعی، اولین بار توسط لی من (۱۹٦٦) به همراه بررسی نتایج و کاربرد های آماری آن معرفی شد.

تعریف ۱.۱ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی باشند. اگر $Cov(X,Y) \geq 0$ آنگاه X و Y را همبسته مثبت نامند.

تعریف ۲.۱ دو متغیر تصادفی X و Y (یا توزیع توأم آن ها) را وابسته ربعی مثبت[۱] (PQD) گوییم هرگاه برای هر دو عدد حقیقی $x,y \in I\!R$ داشته باشیم:

$$P(X \leq x, Y \leq y) \geq P(X \leq x)P(Y \leq y). \qquad (۱-۱)$$

وابستگی را اکید گوییم هرگاه به ازای حداقل یک زوج (x,y) نامساوی (۱−۱) به طور اکید برقرار باشد.

باید توجه داشت که رابطه (۱−۱) معادل هر یک از نابرابری های زیر است:

$$P(X > x, Y > y) \geq P(X > x)P(Y > y)$$

[۱] Positively Quadrant Dependent

یا

$$P(X \leq x, Y \geq y) \leq P(X \leq x)P(Y \geq y)$$

یا

$$P(X \geq x, Y \leq y) \leq P(X \geq x)P(Y \leq y)$$

یا

$$P(X > x, Y > y) \geq P(X > x)P(Y > y)$$

به طور مشابه دو متغیر تصادفی X و Y را وابسته ربعی منفی[۲] (NQD) گوییم هرگاه جهت نابرابری (۱—۱) عوض شود. به عنوان مثال اگر a و b دو عدد حقیقی باشند به طوری که $ab < ۰$ ، آن گاه متغیرهای تصادفی ax و bx وابسته منفی هستند.

تعریف ۳.۱ دو تابع حقیقی f و g را هماهنگ[۳] گوییم هرگاه هردو نانزولی و یا ناصعودی باشند. این دو تابع را ناهماهنگ [۴] گوییم هرگاه یکی نانزولی و دیگری ناصعودی باشد.

تعریف ۴.۱ پیشامدهای A و B را وابسته ربعی مثبت (منفی) گوییم هرگاه توابع نشانگر آن ها وابسته ربعی مثبت (منفی) باشند.

لی من (۱۹٦٦) خواص زیر را در مورد این متغیرهای تصادفی ثابت نمود:

- برای هر متغیر تصادفی X، بدیهی است که X و X وابسته ربعی مثبت است.
- شرط لازم و کافی برای این که زوج (X, Y) وابسته ربعی مثبت باشد، این است که $(X, -Y)$ وابسته ربعی منفی باشد.
- اگر زوج (X, Y) وابسته ربعی مثبت باشد، آن گاه برای تمام توابع نانزولی (ناصعودی) f و g، زوج $(f(X), g(Y))$ نیز وابسته ربعی مثبت است. بنابراین می توان گفت مفهوم وابستگی ربعی مثبت، تحت تبدیلات نانزولی (ناصعودی) پایاست.

---

[۲] Negatively Quadrant Dependent

[۳] Concordant

[۴] Discordant

- اگر زوج (X,Y)، وابسته ربعی مثبت (منفی) و f و g هماهنگ (ناهماهنگ) باشند، آن گاه زوج $(f(X),g(Y))$، وابسته ربعی مثبت (منفی) است.

- اگر زوج (X,Y)، وابسته ربعی مثبت (منفی) و f و g ناهماهنگ (هماهنگ) باشند، آن گاه زوج $(f(X),g(Y))$، وابسته ربعی منفی (مثبت) است.

- شرط لازم و کافی برای آن که زوج (X,Y)، وابسته ربعی مثبت (منفی) باشد، آن است که برای هر دو تابع هماهنگ f و g داشته باشیم:

$$Cov(f(X),g(Y)) \geq ۰ \qquad (\leq ۰).$$

تعریف ۵.۱ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی باشند. اگر $Cov(X,Y) \leq ۰$ آنگاه X و Y را همبسته منفی نامند.

تعریف ٦.۱ دنباله $\{X_n,\ n \geq ۱\}$ از متغیرهای تصادفی را دو به دو ربعی مثبت[5] (PQD) [منفی[6] (NQD)] گوییم، هرگاه هر زوج از متغیرهای تصادفی این دنباله وابسته ربعی مثبت (منفی) باشد.

تعریف ۷.۱ دنباله $\{X_n,\ n \geq ۱\}$ را وابسته منفی گویند، اگر هر زیر مجموعه متناهی آن وابسته منفی باشد.

در مثال زیر نشان داده می شود که امکان دارد متغیرهای تصادفی دو به دو وابسته منفی باشند ولی توأماً وابسته منفی نباشند.

مثال ۱.۱ فرض کنید $a_۱$ و $a_۲$ دو عدد حقیقی باشند به قسمی که $a_۲ > a_۱ > ۰$ و بردار تصادفی $(X_۱,X_۲,X_۳,X_۴)$ مقادیر $(a_۱,a_۲,a_۲,a_۲)$، $(a_۱,a_۲,a_۲,a_۱)$، $(a_۲,a_۱,a_۲,a_۱)$، $(a_۲,a_۱,a_۲,a_۲)$، $(a_۲,a_۲,a_۱,a_۱)$، $(a_۲,a_۲,a_۱,a_۲)$، $(a_۱,a_۱,a_۱,a_۱)$، $(a_۱,a_۱,a_۱,a_۲)$ را با احتمال $\frac{۱}{۸}$ اختیار کند آن گاه برای هر $x,y \in I\!R$ و $i \neq j$، $i,j = ۱,۲,۳,۴$ داریم:

$$P(X_i > x, X_j > y) \leq P(X_۱ > x)P(X_۲ > y) \qquad (۲-۱)$$

[5] Pairwise Positively Quadrant Dependent

[6] Pairwise Negatively Quadrant Dependent

اما

$$P(X_1 \leq a_1, X_2 \leq a_1, X_3 \leq a_1) = \frac{1}{4} > P(X_1 \leq a_1)P(X_2 \leq a_1)P(X_3 \leq a_1) = \frac{1}{8}$$

۱—۳ متغیرهای تصادفی پیوندی مثبت

این مفهوم ابتدا توسط اساری و همکاران (۱۹٦۷) و سارکار (۱۹٦۹) در نظریه قابلیت اطمینان مورد مطالعه قرار گرفت. همچنین این مفهوم توسط هریس (۱۹٦۰) و فورتین و همکاران (۱۹۷۱)، لبویتس (۱۹۷۲)، سیمون (۱۹۷۳)، پرستون (۱۹۷۴) و کمپرمن (۱۹۷۷) در مکانیک آماری، فیزیک ریاضی و نظریه پرکولاسیون مورد توجه قرار گرفت. برای اطلاعات بیشتر در مورد کاربرد این مفهوم در آمار و سایر علوم، می توان به بارلو و پروشان (۱۹۸۱)، نیومن (۱۹۸۰)، (۱۹۸۳)، (۱۹۸۴) و (۱۹۹۰)، نیومن و رایت (۱۹۸۱) و (۱۹۸۲)، وود (۱۹۸۳) و (۱۹۸۵)، دابروسکی و دهلینگ (۱۹۸۸)، بیرکل (۱۹۸۷) و (۱۹۸۹) و کاکس و گریمت (۱۹۸۴) مراجعه نمود. تحت برخی محدودیت ها برای ساختار کواریانس متغیرهای تصادفی پیوندی، قضایای حدی بسیاری همانند قوانین اعداد بزرگ، اصل ناوردایی [۷]، قانون لگاریتم مکرر [۸] و نامساوی بری اسن [۹] ثابت شده است.

تعریف ۸.۱ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی باشند:

(الف) اگر برای هر تابع غیر نزولی f و g رابطه زیر برقرار باشد:

$$Cov(f(X), g(Y)) \geq 0 \qquad (۱—۳)$$

آن گاه X و Y را پیوندی مثبت نامند.

---

[۷] Invariance principles

[۸] Law of Iterated Logarithm

[۹] Berry-Esseen

(ب) اگر برای هر تابع f و g به طور مختصاتی غیر نزولی رابطه زیر برقرار باشد:

$$Cov(f(X,Y), g(X,Y)) \geq 0 \qquad (۱-۴)$$

آن گاه X و Y بطور قویتری نسبت به رابطه (۱-۳) ، پیوندی مثبت هستند. به سادگی می توان رابطهٔ (۱-۳) را از رابطهٔ (۱-۴) نتیجه گرفت.

قوی ترین تعریف به حالت چند متغیره تعمیم داده می شود:

تعریف ۹.۱ خانواده متناهی $\{X_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ از متغیرهای تصادفی، پیوندی مثبت[10] (PA) نامیده می شود، هرگاه برای هر دو تابع (مؤلفه وار) نانزولی[11] f و g روی $\mathbb{R}^n$،

$$Cov(f(X_i,\ 1 \leq i \leq n), g(X_j,\ 1 \leq j \leq n)) \geq 0,$$

باشد. دنبالهٔ $\{X_n,\ n \geq 1\}$ را پیوندی مثبت گوییم هرگاه هر زیر مجموعه متناهی آن، پیوندی مثبت باشد.

به عنوان نتیجه ای از تعریف بالا عبارت زیر را نیز به کار می برند:

تعریف ۱۰.۱ خانواده متناهی $\{X_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ از متغیرهای تصادفی را به طور ضعیف پیوندی مثبت (PA) می نامند، اگر برای هر زوج از زیر مجموعه های مجزای A_1 و A_2 از مجموعه $\{1, 2, \cdots, n\}$ و هر دو تابع غیر نزولی f و g نا مساوی زیر برقرار باشد:

$$cov(f(X_j,\ j \in A_1), g(X_k,\ k \in A_2)) \geq 0$$

که در آن $A_1 = \{i_1, \cdots, i_j\}$ ، $A_2 = \{i_{j+1}, \cdots, i_n\}$. در این حالت این مجموعه متناهی $\{X_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ از متغیرهای تصادفی بطور ضعیف پیوندی مثبت نامیده می شوند.

[10] Positively associated

[11] توابع نانزولی از مؤلفه iام، با ثابت نگه داشتن مؤلفه های دیگر

۱—۴ ویژگی های متغیرهای تصادفی پیوندی مثبت

قضیه ۱.۱ (قضیه هلی — بری [۱۲]) اگر g تابع پیوسته و حقیقی مقدار روی فاصله بسته و کراندار $[a,b]$ باشد و $\{F_n\}$ یک دنباله از توابع از راست پیوسته، غیر نزولی و کراندار باشد که به طور ضعیف به برخی توابع F روی $[a,b]$ همگراست، باشد، آن گاه

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b g dF_n = \int_a^b g dF$$

(الف) هر زیر مجموعه از متغیرهای تصادفی پیوندی مثبت نیز پیوندی مثبت است.

اثبات. با انتخاب مناسبی از توابع f و g غیر نزولی که فقط به متغیرهایی که در زیر مجموعه هستند بستگی دارند و با استفاده از تعریف (۹.۱) نتیجه مطلوب بدست می آید. □

(ب) اجتماع دو مجموعه مستقل از هم از متغیرهای تصادفی پیوندی مثبت، پیوندی مثبت است.

اثبات. اگر $X=(X_1,\cdots,X_n)$ و $Y=(Y_1,\cdots,Y_n)$ پیوندی مثبت باشند و X و Y از هم مستقل باشند و $f=f(x,y)$ و $g=g(x,y)$ توابع غیر نزولی باشند، آن گاه:

$$\begin{aligned}
Cov(f(X,Y),g(X,Y)) &= E_{x,y}(f.g)-(E_{x,y}(f))(E_{x,y}(g))\\
&= E_x.E_y(f.g)-E_x[E_y(f).E_y(g)]+E_x[E_y(f).E_y(g)]-E_xE_y(f).E_xE_y(g)\\
&= E_x[Cov_y(f,g)]+Cov_x(E_y(f).E_y(g))\geq 0. \qquad (۱—۵)
\end{aligned}$$

چون $Cov_y(f,g)\geq 0$ بنابراین $E_x(Cov_y(f,g))\geq 0$.

$E_yf(x,y)$ و $E_yg(x,y)$ به ازای هر y توابع غیر نزولی نسبت به x هستند در نتیجه هماهنگ هستند. و

$$Cov_x(E_y(f),E_y(g))\geq 0$$

[۱۲] $Helly-Bray$

□

(ج) برای هر متغیر تصادفی X ، زوج (X,X) پیوندی مثبت است.

اثبات. بنا به ویژگی کوواریانس اثبات رابطه بیان شده واضح است. □

(د) توابع غیر نزولی از متغیرهای تصادفی پیوندی مثبت، پیوندی مثبت هستند.

اثبات. اگر $X_1,\cdots,X_n$ پیوندی مثبت باشند و f_i غیر نزولی و $S_i=f_i(X)$ و $i=1,\cdots,m$ و اگر f و g توابع به طور مختصاتی غیر نزولی باشند، آن گاه $f(f_1,\cdots,f_m)$ و $g(f_1,\cdots,f_m)$ غیر نزولی هستند و

$$Cov_s(f(S),g(S))=Cov_X[f(f(x)),g(f(x))]\geq 0$$

□

(ه) اگر $X_1^{(k)},\cdots,X_n^{(k)}$ برای هر k پیوندی مثبت باشند و $\mathbf{X}^{(k)}=(X_1^{(k)},\cdots,X_n^{(k)})\xrightarrow{d}\mathbf{X}$ آن گاه $X_1,\cdots,X_n$ پیوندی مثبت هستند.

اثبات. اگر u و v توابع غیر نزولی و پیوسته و کراندار باشند، چون $X_1^{(k)},\cdots,X_n^{(k)}$ پیوندی مثبت هستند، بنابراین:

$$Cov(u(\mathbf{X}^{(k)}),v(\mathbf{X}^{(k)}))\geq 0$$

از طرفی، $\mathbf{X}^{(k)}\xrightarrow{d}\mathbf{X}$ و بنا به قضیه هلی − بری :

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{k\to\infty} cov(u(X^{(k)}),v(X^{(k)}))\\
&= \lim_{k\to\infty}[Eu(X^{(k)}).v(X^{(k)})-Eu(X^{(k)}).Ev(X^{(k)})]\\
&= Eu(X).v(X)-Eu(X).Ev(X)\\
&= Cov(u(X),v(X)). \qquad (1-6)
\end{aligned}$$

پس $Cov(u(\mathbf{X}),v(\mathbf{X}))\geq 0$ و بنا به ویژگی (د) ، $X_1,\cdots,X_n$ پیوندی مثبت هستند. □

(و) متغیرهای تصادفی مستقل ، پیوندی مثبت هستند.

اثبات. بنا به ویژگی (ب) و (ج) ، واضح است. □

در ادامه به برخی از کاربردهای متغیرهای تصادفی پیوندی مثبت در آمار و احتمال می پردازیم و قبل از آن قضیه ای را به شکل زیر بیان می کنیم .

قضیه ۲.۱ اگر بردار $X=(X_۱,\cdots,X_n)$ پیوندی مثبت باشد و $S_i\equiv f_i(X)$ و f_i به طور مختصاتی غیر نزولی باشد برای $i=۱,\cdots,k$ و برای تمام مقادیر حقیقی $s_۱,\cdots,s_k$ داریم:

$$P(S_۱\leq s_۱,\cdots,S_k\leq s_k)\geq\prod_{i=۱}^{n}P(S_i\leq s_i) \tag{۱—۷}$$

و

$$P(S_۱> s_۱,\cdots,S_k> s_k)\geq\prod_{i=۱}^{n}P(S_i> s_i) \tag{۱—۸}$$

اثبات. از آنجا که S_i ها توابع غیر نزولی از متغیرهای پیوندی مثبت هستند، بنا به ویژگی (د) ، $S_۱,\cdots,S_k$ نیز پیوندی مثبت هستند. فرض کنید:

$$X_i(s)=\begin{cases}۱ & ;\quad S_i>s\\ \\ ۰ & ;\quad S_i\leq s\end{cases}$$

آن گاه $X_i(s)$ ، در S_i غیر نزولی است و از ویژگی (د) نتیجه می گیریم که، $X_۱(s_۱),\cdots,X_k(s_k)$ پیوندی مثبت هستند. بنابراین

$$P(X_۱=۱,\cdots,X_n=۱)\geq\prod_{i=۱}^{n}P(X_i=۱)$$

همچنین

$$P(X_۱=۰,\cdots,X_n=۰)\geq\prod_{i=۱}^{n}P(X_i=۰)$$

و اثبات کامل می شود. □

نتیجه ۱.۱ (مجموع های جزئی (رابین –۱۹۵۴)) فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند و $S_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$ ، $(i = 1, \cdots, n)$ آن گاه، چون متغیرهای تصادفی مستقل، پیوندی هستند و S_i نسبت به هر مولفه تابعی غیر نزولی است بنا به قضیه (۲.۱) برای تمام مقادیر حقیقی $S_1, \cdots, S_n$ داریم:

$$P(S_1 \leq s_1, \cdots, S_n \leq s_n) \geq \prod_{i=1}^{n} P(S_i \leq s_i)$$

نتیجه ۲.۱ (آماره های ترتیبی) فرض کنید $S_{(1)} \leq \cdots \leq S_{(n)}$ آماره های ترتیبی در نمونه $X_1, \cdots, X_n$ باشند. آن گاه چون هر S_i، یک تابع غیر نزولی از متغیرهای تصادفی مستقل $S_{(1)} \leq \cdots \leq S_{(n)}$ ، به شکل $S_i = \min\{X_{i1}, \cdots, X_{ik}\}$ که در آن $\{i_1, \cdots, i_k\} = A_k \subset \{1, \cdots, n\}$ است، بنابراین برای هر انتخاب $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ و $S_{i1} < \cdots < S_{ik}$

$$P(S_{i1} \leq s_{i1}, \cdots, S_{ik} \leq s_{ik}) \geq \prod_{j=1}^{k} P(S_{ij} \leq s_{ij})$$

و

$$P(S_{i1} > s_{i1}, \cdots, S_{ik} > s_{ik}) \geq \prod_{j=1}^{k} P(S_{ij} > s_{ij})$$

نتیجه ۳.۱ (آنالیز واریانس، کیمبال ،۱۹۵۱)

کیمبال حالتی از آنالیز واریانس را بررسی کرد که در آن دو فرضیه با استفاده از واریانس خطای یکسان ازمون می شود. به عنوان مثال می توان حالتی را ذکر کرد که اثر متقابل سطرها و ستون ها آزمون می شود. تحت روش معمول، سه شکل درجه دوم q_1, q_2 و q_3 به طور مستقل دارای توزیع کی دو[۱۳]، به ترتیب با n_1, n_2 و n_3 درجه آزادی هستند. q_1 نمایان گر مجموع مربعات بین سطرها، q_2 مجموع مربعات بین ستون ها و q_3 مجموع مربعات خطاهاست. آماره‌های آزمون نسبت درستنمایی برای آزمون اثرات سطرها و ستون ها عبارتند از:

[۱۳] chi-square

$$F_{1} = \frac{q_{1}/n_{1}}{q_{3}/n_{3}}$$

و

$$F_{2} = \frac{q_{2}/n_{2}}{q_{3}/n_{3}}$$

احتمال رخ ندادن خطای نوع اول برابر است با $P[F_{1} \leq F_{1\alpha}, F_{2} \leq F_{2\alpha}]$ که در آن $F_{1\alpha}$$(F_{2\alpha})$ نقطهٔ $\alpha \times 100$ درصد توزیع $F_{1}$$(F_{2})$ است. کیمبال ثابت کرد که :

$$P[F_{1} \leq F_{1\alpha}, F_{2} \leq F_{2\alpha}] > P[F_{1} \leq F_{1\alpha}].P[F_{2} \leq F_{2\alpha}]$$

به‌عبارت دیگر در روند آزمون فرضیات، احتمال رخ ندادن خطای نوع اول بیشتر از حالتی است که فرضیات به طور جداگانه آزمون شوند.

نتیجه ۴.۱ (نمایی چند متغیره مارشال –الکین، ۱۹۶۶) فرض کنید λ_i ثابتی مثبت و $S_i = \sum_{i=1}^{n} X_i$ و F تابع توزیع پیوسته باشد، داریم:

$$\begin{aligned} F(s_{1}, \cdots, s_{m}) &= 1 - exp(-\sum_{i=1}^{m} \lambda_i s_i - \sum_{i<j} \lambda_{ij} \max(s_i, s_j) \\ &- \sum_{i<j<k} \lambda_{ijk} \max(s_i, s_j, s_k) \\ &- \cdots - \lambda_{12\cdots m} \max(s_{1}, s_{2}, \cdots, s_{m})) \qquad (1-9) \end{aligned}$$

فرض کنید متغیرهای تصادفی $S_{1}, \cdots, S_m$ دارای توزیع F باشند، آنگاه متغیرهای تصادفی نمایی مستقل $X_{1}, X_{2}, \cdots, X_n$ وجود دارند به طوریکه $S_j = \min\{X_i, i \in A_j\}$ که در آن $A_j \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ است. چون $X_{1}, X_{2}, \cdots, X_n$ مستقل هستند و هر S_i تابعی غیرنزولی از $X_{1}, X_{2}, \cdots, X_n$ است. از رابطه (۱—۷) داریم :

$$F(s_{1}, s_{2}, \cdots, s_m) \geq \prod_{i=1}^{m} F_i(s_i)$$

همچنین از رابطه (۱—۸) داریم :

$$P(S_{1} > s_{1}, \cdots, S_m > s_m) \geq \prod_{i=1}^{m} P(S_i > s_i) = \prod_{i=1}^{m} [1 - F(s_i)]$$

با استقرأ رابطه زیر را می توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned}
&P(S_{1} > s_{1}, \cdots, S_m > s_m) = 1 - P(S_{1} \leq s_{1}, \cdots, S_m \leq s_m) \\
&- \sum_{i=1}^{m} P(S_{1} \leq s_{1}, \cdots, S_i > s_i, \cdots, S_m \leq s_m) \\
&- \sum_{i<j=2}^{m} P(S_{1} \leq s_{1}, \cdots, S_i > s_i, S_j > s_j, \cdots, S_m \leq s_m) - \cdots \\
&- \sum_{\underbrace{i<j<\cdots<l=m-1}_{m-1}}^{m} P(S_{1} \leq s_{1}, S_{2} > s_{2}, \cdots, S_i > s_i, \cdots, S_l > s_l, \cdots, S_m > s_m)
\end{aligned}$$

در نتیجه (F_i توزیع حاشیه ای s_i است.)

$$\begin{aligned}
&1 - P(S_{1} \leq s_{1}, \cdots, S_m \leq s_m) \\
&\geq P(S_{1} > s_{1}, \cdots, S_m > s_m) \\
&= 1 - F(s_{1}, \cdots, s_m)
\end{aligned}$$

$$\geq \prod_{i=1}^{m}(1-F_i(s_i)) \qquad (1\text{—}10)$$

۱—۵ متغیرهای تصادفی پیوندی منفی

تعریف پیوندی منفی، ابتدا توسط آلام و ساکسنا (۱۹۸۱) معرفی شد و به خوبی توسط جاج داو و پروشان (۱۹۸۳) مورد مطالعه قرار گرفت. اکثر خواص مجانبی متغیرهای تصادفی پیوندی منفی تقریباً در پانزده سال اخیر بررسی شده است. اکثر این مطالعات نشان می دهد که خواص مجانبی متغیرهای تصادفی پیوندی منفی، تقریباً شبیه خواص حدی متغیرهای تصادفی مستقل است (یوان و همکاران، ۲۰۰۳). این مفهوم یک صورت با کیفیت از مفهوم وابستگی منفی است (شائو، ۲۰۰۰). در بین انواع وابستگی های منفی، تنها مفهوم پیوندی منفی، خاصیت مهم پایا بودن تحت توابع نانزولی از مجموعه های جدا از هم را دارد. برخی از خواص متغیرهای تصادفی پیوندی منفی در این بخش ارائه می گردند.

تعریف ۱.۱۱ خانواده متناهی $\{X_i,\ 1\leq i\leq n\}$ از متغیرهای تصادفی، پیوندی منفی[۱۴] (NA) نامیده می شود، اگر برای هر دو زیر مجموعه جدا از هم A و B از $\{1,2,\cdots,n\}$ و توابع (مؤلفه وار) نانزولی f و g به ترتیب روی $I\!R^A$ و $I\!R^B$،

$$Cov(f(X_i,\ i\in A),g(X_j,\ j\in B))\leq 0$$

باشد. دنبالهٔ $\{X_n,\ n\geq 1\}$ را پیوندی منفی گوییم هرگاه هر زیر مجموعه متناهی آن، پیوندی منفی باشد.

واضح است که تعریف (۱.۱۱) برای دو تابع f و g که هر دو (مؤلفه وار) ناصعودی هستند، نیز درست است.

---

[۱۴] Negatively associated

قضیه ۳.۱ فرض کنید $X_1, \cdots, X_k$ متغیرهای تصادفی پیوندی منفی و $f_1, \cdots, f_n$ توابع مثبت غیرنزولی باشند. آن گاه:

$$E\prod_{i=1}^{m} f_i(X_j,\ j\in A_i) \le \prod_{i=1}^{m} Ef_i(X_j,\ j\in A_i) \qquad (1-11)$$

که در آن $A_1, \cdots, A_n$ زیر مجموعه های دو به دو مجزا از $\{1, \cdots, k\}$ هستند.

اثبات. چون f_i، $1 \le i \le m$ توابعی نامنفی و غیرنزولی هستند، پس حاصلضرب هر تعدادی از آن‌ها نیز تابعی نامنفی و غیرنزولی خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
&Cov(f_1(X_j;\ j\in A_1), \prod_{i=2}^{m} f_i(X_j;\ j\in A_i)) \le 0\\
&Cov(f_2(X_j;\ j\in A_2), \prod_{i=3}^{m} f_i(X_j;\ j\in A_i)) \le 0\\
&\qquad\vdots\\
&Cov(f_{m-1}(X_j;\ j\in A_{m-1}), f_m(X_j;\ j\in A_m)) \le 0 \qquad (1-12)
\end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از روابط (۱-۱۲) داریم:

$$\begin{aligned}
&E(\prod_{i=1}^{m} f_i(X_g;\ j\in A_i)) \le E(f_1(X_j;\ j\in A_1))E(\prod_{i=2}^{m} f_i(X_j;\ j\in A_i))\\
&\le E(f_1(X_j;\ j\in A_1))E(f_2(X_j;\ j\in A_2))E(\prod_{i=3}^{m} f_i(X_j;\ j\in A_i))\\
&\le \cdots \le \prod_{i=1}^{m} E(f_i(X_j;\ j\in A_i))
\end{aligned}$$

□

نتیجه ۵.۱ اگر $X_1, \cdots, X_k$ متغیرهای تصادفی NA باشند، آن گاه:

$$E(X_1 \cdots X_k) \leq EX_1 \cdots EX_k$$

قضیه ۴.۱ فرض کنید شرایط قضیه (۳.۱) برقرار باشد. آن گاه برای هر دو زیرمجموعه متمایز A_1 و A_2 از $\{1, 2, \cdots, k\}$ و اعداد حقیقی $x_1, \cdots, x_k$

$$P(X_i \leq x_i,\ i = 1, \cdots, k) \leq P(X_i \leq x_i,\ i \in A_1)P(X_j \leq x_j,\ j \in A_2) \qquad (۱۳-۱)$$

و

$$P(X_i > x_i,\ i = 1, \cdots, k) \leq P(X_i > x_i,\ i \in A_1)P(X_j > x_j,\ j \in A_2) \qquad (۱۴-۱)$$

در نتیجه، $X_1, \cdots, X_k$ وابسته منفی هستند.

اثبات. برای اثبات (۱-۱۳) فرض کنید

$$f_i(t_j;\ j \in A_i) = I(t_j \leq x_j;\ j \in A_i) \qquad i = 1, 2$$

واضح است که f_1 و f_2 توابع نامنفی و ناصعودی هستند. بنابراین با استفاده از(۱-۱۱) داریم:

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \cdots, X_k \leq x_k) = Ef_1(X_j;\ j \in A_1)f_2(X_j;\ j \in A_2)$$
$$= EI(X_j \leq x_j;\ j \in A_1)I(X_j \leq x_j;\ j \in A_2) \leq Ef_1(X_j;\ j \in A_1)Ef_2(X_j;\ j \in A_2)$$
$$= P(X_j \leq x_j;\ j \in A_1)P(X_j \leq x_j;\ j \in A_2)$$