بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به:

همسر عزیزم

به پاس محبت های بی‌دریغش

دانشگاه یاسوج، دانشکده علوم

مدارهایی از نوع عملگر چزارو

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد ریاضی محض (گرایش آنالیز)

لاله اسلامی‌زاده

استاد راهنما

دکتر حمید رضایی

۱۳۹۰

دانشگاه یاسوج، دانشکده علوم

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد ریاضی محض (گرایش آنالیز) خانم لاله اسلامی‌زاده

تحت عنوان

مدارهایی از نوع عملگر چزارو

در تاریخ ۱۳۹۰/۴/۶ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ــ استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر حمید رضایی	
۲ــ استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر محمدتقی حیدری	
۳ــ استاد داور خارج از دانشکده	دکتر بهمن یوسفی	(دانشگاه پیام‌نور شیراز)
۴ــ استاد داور داخل دانشکده	دکتر حسن آزادی کناری	

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده　　　　دکتر ابراهیم صادقی

فهرست مطالب

چکیده:

عملگر خطی و کراندار T روی فضای باناخ، جدایی‌پذیر و نامتناهی‌البعد X، ابردوری گفته می‌شود هرگاه بردار $x \in X$ طوری موجود باشد که مدار آن تحت x یعنی $\{T^n x : n \geq 0\}$ در X چگال باشد. عملگر T را بی‌نظم گوییم هرگاه T ابردوری بوده و مجموعه بردارهای تناوبی آن در X چگال باشد. هدف اصلی این پایان‌نامه بررسی خاصیت ابردوری بودن عملگر چزارو بربعضی از فضاهای تابعی می‌باشد. عملگر چزارو اولین بار توسط ایوجن چزارو در قرن ۱۹ معرفی شد. عملگر چزارو بر فضای دنباله‌ای ℓ^p برای $1 < p < \infty$ بصورت

$$C_0(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \cdots)$$

و بر فضای $L^p([0,1])$ برای $1 < p < \infty$ و $\mathcal{C}([0,1])$ بصورت

$$(C_1 f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(s) ds$$

تعریف می‌شود. فصل اول را به مقدمات و قضایای کلی در ارتباط با عملگرهای ابردوری اختصاص داده‌ایم. در فصل دوم عملگرهای چزارو، کرانداری و خواص طیفی آن مطالعه می‌شود. در فصل سوم خواص دینامیکی عملگرهای چزارو بررسی می‌شود. نشان می‌دهیم این عملگر بر $L^p([0,1])$ برای $1 < p < \infty$ ابردوری و بی‌نظم است. درحالیکه بر $\mathcal{C}([0,1])$ حتی سوپر دوری هم نیست. همچنین ثابت می‌کنیم عملگر چزارو بر فضای گسسته ℓ^p برای $1 < p < \infty$، سوپر دوری نیست. و در پایان خواص مشابه برای عملگرهای چزاروی وزندار را مطالعه می‌کنیم.

فصل ۱

پیش نیازها

۱−۱ قضیه بئر

قضیه ۱.۱ (قضیه بئر): فرض کنیم X یک فضای متری کامل باشد و $\{V_i\}$ خانواده‌ای شمارا از مجموعه‌های باز و چگال در X باشد آنگاه $\bigcap V_i$ در X چگال است.

تعریف ۲.۱ (فضای $L^p(\mu)$): فرض کنیم (X, m, μ) یک فضای اندازه باشد و $1 < p < \infty$ تعریف می‌کنیم:

$$L^p(\mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{C} : \|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \text{اندازه پذیر } f \right\}$$

اگر $0 < p < \infty$ آنگاه L^p از دنباله‌هایی مثل $x = (x_1, ..., x_n)$ تشکیل شده‌است به طوری که $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. در این حالت داریم $\|x\|_p = (\sum |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ به همین ترتیب L^∞ فضای برداری همه دنباله‌های کراندار مجهز به نرم sup است و$L^\infty(\mu)$ گردایه همه توابع اندازه‌پذیر به طور اساسی کراندار است.

تعریف ۳.۱ (**$F-$ فضا**): E یک $F-$ فضااست هرگاهE یک فضای برداری متری تام باشد هر فضای باناخ یک $F-$ فضا است به ویژه فضای هیلبرت یک $F-$ فضا است.

تعریف ۴.۱ (**عملگر ابردوری**): فمرض کنیم $T : X \to X$ یک عملگر خطی کراندار باشد و X یک فضای باناخ جدایی‌پذیر باشد حال عملگر T را ابردوری گوییم هرگاه بردار $x \in X$ باشد به طوری که مدار آن تحت T یعنی $orb(x,T) = \{T^n x : n \geq 0\}$ در X چگال باشد. مجموعه همه بردارهای ابردوری T را با $HC(T)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۱ (**عملگر سوپردوری**): عملگرT را روی فضای باناخ جدایی‌پذیر X سوپردوری گوییم هرگاه به‌ازای یک $x \in X$ مدار تصویری آن یعنی $\{\lambda T^n x : \lambda \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$ در X چگال باشد.

تعریف ۶.۱ (**عملگر دوری**) : فرض کنیم X یک فضای باناخ جدایی‌پذیر باشد عملگرT را دوری می‌نامیم هرگاه به‌ازای یک $x \in X$ $span\ orb(T,x)$ که همان مولد خطی مدار T است در X چگال باشد.

تعریف ۷.۱ (**عملگر بی‌نظم**) : عملگر T را بی‌نظم گوییم هرگاه اولاً T ابردوری بوده و ثانیاً مجموعه نقاط تناوبی آن یعنی

$$X_p := \{x \in X | \exists n \in \mathbb{N}; T^n x = x\}$$

در X چگال باشد.

تعریف ۸.۱ (**طیف**) : طیف عملگر T را با نماد $\sigma(T)$ نشان می‌دهیم و عبارت است از:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{وارون‌پذیر نباشد } (\lambda - T)\}$$

۱—۲ عملگر چزارو

تعریف ۹.۱ (عملگر چزارو): این عملگر روی فضای دنباله‌ای l^p به این صورت تعریف می‌شود:

$$C_\circ(x_۱, x_۲, \cdots) = (x_۱, \frac{x_۱ + x_۲}{۲}, \cdots)$$

و روی فضای $L^p[\circ, ۱]$ به‌صورت:

$$(C_۱ f)(x) = \frac{۱}{x}\int_\circ^x f(s)ds$$

تعریف می‌شود.

۱—۳ قضیه انتقال بیرخوف

گزاره ۱۰.۱ (**قضیه انتقال بیرخوف**[۲۹]): فرض کنید X یک فضای جدایی‌پذیر و $F-$ فضا باشد و فرض کنید که $T \in L(X)$. حال گزاره‌های زیر معادلند:

۱) T ابردوری است؛

۲) T دارای خاصیت ترایایی توپولوژیکی است. یعنی اینکه به ازای هر جفت از مجموعه‌های باز و مخالف تهی مثل $(U, V) \subseteq X \times X$ وجود داشته باشد $n \in \mathbb{N}$ به طوری که: $T^n(U) \cap V \neq \phi$

اثبات. ابتدا می‌بینیم که اگر x یک بردار ابردوری برای T باشد آنگاه $orb(x,T) \subseteq HC(T)$ در واقع چون X نقاط تکین ندارد هر مجموعه چگال $A \subseteq X$ بعد از اینکه تعداد متناهی از نقاط آن را برداریم باز هم چگال باقی می‌ماند. با قرار دادن $A := orb(x,T)$ و چونکه

$$orb(T^p(x), T) = orb(T, x)\backslash\{x, T(x), \cdots, T^{p-۱}(x)\}$$

ما می‌بینیم که $T^p(x) \in HC(T)$ به‌ازای هر عدد صحیح مثبت است. بنابراین $HC(T)$ در X چگال است یا برابر با تهی است. فرض کنید که (۱) برقرار باشد و U و V دو مجموعه باز داده

شده‌باشند می‌توانیم یک $x \in U \cap HC(T)$ در نظر بگیریم آنگاه با توجه به ابردوری بودن T به ازای یک $N \in \mathbb{N}$، $T^N(x) \in V$

برعکس : برای اثبات طرف عکس چون X جدایی‌پذیر و متریک‌پذیر است پس در اصل دوم شمارایی صدق می‌کند یعنی اینکه فضای توپولوژی ما دارای پایه شمارایی از مجموعه‌های باز است. فرض کنیم که $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ یک پایه برای X باشد بردار $x \in X$ برای T ابردوری است اگر و فقط اگر مدار T هر مجموعه باز V_j را قطع کند یعنی اگر و فقط اگر به ازای هر $j \in \mathbb{N}$ یک عدد صحیح $n \geq 0$ موجود باشد به طوریکه $T^n(x) \in V_j$ بنابراین می‌توان $HC(T)$ را به این صورت تشریح کرد:

$$HC(T) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(V_j) \right)$$

به ویژه این نشان می‌دهد که $HC(T)$ یک مجموعه G_δ است علاوه بر این از قضیه کاتگوری بئر نتیجه می‌شود که $HC(T)$ در X چگال است اگر و فقط اگر هر مجموعه باز $W_j := \cup T^{-n}(V_j)$ در X چگال است به عبارت دیگر اگر و فقط اگر به ازای هر مجموعه باز غیر تهی مثل $U \subseteq X$ و هر $j \in \mathbb{N}$ بتوان n را طوری یافت که

$$U \cap T^{-n}(V_j) \neq \phi$$

یا به طور هم ارز با آن $T^{-n}(U) \cap V_j \neq \phi$. از آنجا که (V_j) یک پایه برای توپولوژی X است این هم‌ارز است با توپولوژی انتقالی از T.

گزاره **۱۱.۱** فرض کنیم T یک عملگر ابردوری روی فضای باناخ X باشد آنگاه: $\sigma_p(T^*) = \phi$

اثبات. فرض کنید T یک عملگر ابردوری باشد و $\lambda \in \sigma_p(T^*)$ بنابراین:

$$ker(T^* - \lambda) \neq \{0\}$$

پس بردار ناصفر $f \in X^*$ موجود است که:

$$T^*f = foT = \lambda f$$

فرض کنیم $x \in HC(T)$ چون f پیوسته است و $orb(T,x)$ در X چگال است و $f \neq 0$ پس $f\left(orb(T,x)\right)$ در $\mathbb{C}$ چگال است ولی داریم:

$$f\left(orb(T,x)\right) = \{\lambda^n f(x) : n = 0, 1, \cdots\}$$

که این مجموعه در $\mathbb{C}$ چگال نیست پس به تناقض می‌رسیم.

نتیجه **۱۲.۱** هیچ عملگرابردوری روی فضای باناخ با بعد متناهی وجود ندارد.

اثبات. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد با بعد متناهی. می‌دانیم که عملگرها روی فضای باناخ متناهی‌البعد همواره دارای مقادیر ویژه هستند چون بعد X^* نیز متناهی است پس $\sigma_p(T^*) \neq \phi$ لذا با استفاده از قضیه T ابردوری نیست.

گزاره **۱۳.۱** هیچ عملگر ابردوری روی فضای متناهی‌البعد $X \neq \{0\}$ وجود ندارد.

اثبات. فرض کنید T یک عملگر ابردوری روی $\mathbb{C}^N, N \geq 1$ باشد. $x \in HC(T)$ را در نظر بگیرید مشاهده می‌کنیم که $\{x, T(x), ..., T^{N-1}(x)\}$ یک خانواده مستقل خطی است و بنابراین یک پایه برای $\mathbb{C}^N$ است اگر چنین نباشد واضح است که فضای خطی تولید شده از $orb(x,T)$ با بعد کمتر از N می‌شود. بنابراین نمی‌تواند در $\mathbb{C}^N$ چگال باشد.برای هر $\alpha \in \mathbb{R}^+$ می‌توان دنباله (n_k) از اعداد صحیح را طوری پیدا کرد که $T^{n_k}(x) \to \alpha_x$ پس برای هر $1 < i < N$:

$$T^{n_k}\left(T^i(x)\right) = T^i\left(T^{n_k}(x)\right) \to \alpha T^i(x)$$

پس برای هر $z \in \mathbb{C}^N$: $T^{n_k}(z) \to \alpha_z$ این نشان می‌دهد که $(T^{n_k}) \to \alpha^N$ که در آن منظور از T^{n_k} ماتریس عملگر T^{n_k} است. چون تابع دترمینان یک تابع پیوسته است: $det(T)^{n_k} \to \alpha^N$ بنابراین قرار دهید: $a := |det(T)|$ مشاهده می‌کنیم که مجموعه $\{a^n : n \in \mathbb{N}\}$ در $\mathbb{R}^+$ چگال است و این غیر ممکن است

۱—۴ محک ابر دوری

(**محک ابردوری**) : فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک و $T \in L(X)$ گوییم T در محک ابردوری صدق می‌کند هرگاه یک دنباله صعودی از اعداد صحیح (n_k) و دو مجموعه چگال

$D_۲, D_۱$ و یک دنباله از نگاشت‌های $S_{n_k} : D_۲ \to X$ موجود باشند به طوری که:

۱) برای هر $x \in D_۱$ $\quad T^{n_k}(x) \to ۰,$

۲) برای هر $y \in D_۲$ $\quad S_{n_k}(y) \to ۰,$

۳) برای هر $y \in D_۲$ $\quad T^{n_k} S_{n_k}(y) \to y,$

گاهی اوقات می‌گوییم T در محک ابر دوری نسبت به دنباله (n_k) صدق می‌کند. توجه کنید که در تعریف بالا نگاشت‌های S_{n_k} خطی و یا پیوسته فرض نشده‌اند.

مثال ۱۴.۱ عملگر مشتق $D : f \to f'$ روی $H(\mathbb{C})$ ابردوری است.

اثبات. محک ابردوری را روی دنباله کل اعداد صحیح $(n_k) := (k)$ به کار می‌بریم و مجموعه‌های چگال یکسان $D_۱ = D_۲$ ساخته شده از همه چندجمله‌ای‌های مختلط و نگاشت‌های $S_k := s^k$ که:

$$Sf(z) = \int_۰^z f(\xi) d\xi$$

به راحتی می‌توان نشان داد که شرایط محک ابردوری برقرار است.
شرط (۱) برقرار است زیرا برای هر چندجمله‌ای P داریم:

$$D^k(P) \to ۰$$

و شرط (۳) برقرار است زیرا روی $D_۲$ داریم:

$$DS = I$$

و در نهایت شرط (۲) نیز برقرار است ، کافی است نشان دهیم که $\{S_k(z^p)\}$ به طور یکنواخت به صفر میل می‌کند برای هر $p \in \mathbb{N}$:

$$S_k(z^p) = \frac{p!}{(p+k)!} z^{p+k}$$

پس اگر K یک مجموعه فشرده و $z \in K$ آنگاه $S_k(z^p)$ به طور یکنواخت به صفر میل می‌کند.

لم ۱۵.۱ اگر Y یک منیفلد خطی در H باشد آنگاه داریم:

$$\bar{Y} = H \longleftrightarrow Y^{\perp} = \langle \circ \rangle$$

اثبات. اگر $Y^{\perp} =< \circ >$ آنگاه $(Y^{\perp})^{\perp} =< \circ >^{\perp}$ و در نتیجه $\bar{Y} = H$.
برعکس: اگر $\bar{Y} = H$ آنگاه $\bar{Y}^{\perp} = H^{\perp} =< \circ >$ اما $\bar{Y}^{\perp} = Y^{\perp}$ بنابراین $Y^{\perp} =< \circ >$.

۱–۵ فضای دوگان

تعریف ۱۶.۱ (فضای دوگان): فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد. مجموعه‌ای متشکل از تابعک‌های خطی پیوسته روی X را با X^* نشان می‌دهیم و آن را دوگان X می‌نامیم. توجه کنید که X^* با نرم زیر یک فضای باناخ است.

$$\|\Lambda\| = sup\{|\Lambda x| : \|x\| \leq ۱\}$$

۱–۶ قضیه‌نمایش ریس

گزاره ۱۷.۱ (قضیه نمایش ریس) : اگر X یک فضای موضعاً فشرده باشد و $\mu \in M(X)$. تعریف می‌کنیم:

$$F_{\mu} : C_{\circ}(X) \to \mathbb{F} \quad by \quad F_{\mu}(f) = \int f d\mu$$

آنگاه $F_{\mu} \in C_{\circ}^{*}(X)$ و نگاشت $\mu \to \mathbb{F}_{\mu}$ یک نگاشت ایزومتری ایزومورفیسم از $M(X)$ به $C_{\circ}^{*}(X)$ است.

قضیه ۱۸.۱ فرض کنید (X, m, μ) در شرایط قضیه ریس صدق کند آنگاه به ازای هر $1 \leq p < \infty$ ، $C_c(X)$ در $L^P(\mu)$ چگال است.

تبصره ۱۹.۱ فرض کنید (X, Ω, μ) یک فضای اندازه باشد برای $1 < p < \infty$ اگر $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ آنگاه

$$[L^p(X, \Omega, \mu)]^* = L^q(X, \Omega, \mu)$$

گزاره ۲۰.۱ فرض کنید (X, Ω, μ) یک فضای اندازه باشد برای $1 < p < \infty$ که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ و $g \in L^q(X, \Omega, \mu)$ تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} F_g : L^p(\mu) \to F \\ F_g(f) = \int (f\bar{g}) d\mu \end{cases}$$

آنگاه $F_g \in L^p(\mu)^*$ نگاشت $F_g \longleftrightarrow g$ یک نگاشت ایزومتری ایزومورفیسم از $L^q(\mu)$ به $L^p(\mu)^*$ است.

تعریف ۲۱.۱ فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد و $M \leq X$ آنگاه:

$$M^{\perp} = \{f \in X^* : f(x) = 0 \quad \forall x \in M\}$$

۱–۷ قضیه استون – وایرشتراس

گزاره ۲۲.۱ (قضیه استون – وایرشتراس) : فرض کنید A یک جبر از توابع حقیقی پیوسته بر مجموعه فشرده K باشد هرگاه A نقاط K را جدا کند و در هیچ نقطه‌ای از K صفر نشود آنگاه بست یکنواخت B از A از تمام توابع حقیقی پیوسته بر K تشکیل شده‌است.

تعریف **۲۳.۱** (**عملگر ابرنرمال**) : عملگر کراندار T را ابرنرمال گوییم هرگاه به ازای هر بردار مثل $f \in H$ داشته‌باشیم: $\|Tf\| \geq \|T^*f\|$

گزاره **۲۴.۱** فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد. یک عملگر T روی H را:

(۱) ایزومتریک یا ایزومتری می‌نامیم هرگاه $A^*A = I$

(۲) $AA^* = A^*A = I$ آنگاه A یکه است.

(۳) A نرمال است هرگاه $A^*A = AA^*$

(۴) خود الحاق است هرگاه $A^* = A$

(۵) قرینه الحاقی است هرگاه $A^* = -A$

تعریف **۲۵.۱** (**طیف اساسی**) : فرض کنید $\pi : B \to \frac{B}{B_\circ}$ یک نگاشت طبیعی از $B(H)$ به جبر کالکین باشد(جبر کالکین جبر باناخ است همراه با عضو همانی) اگر $T \in B(H)$ باشد آنگاه طیف اساسی $T, \sigma_e(T)$ است که یک طیف از $\pi(T)$ به $\frac{B}{B_\circ}$ است یعنی $\sigma_e(T) = \sigma(\pi(T))$.

گزاره **۲۶.۱** (**قضیه سوپر دوری مثبت**) : فرض کنید $T \in L(X)$ و $(T-\mu)$ به ازای هر $\mu \in \mathbb{C}$ دارای برد چگال باشد. بردار $x \in X$ را بردار سوپر دوری برای T می‌نامیم اگر و فقط اگر مدار تصویری مثبت $\mathbb{R}^+.orb(T,x)$ در X چگال باشد. ($L(X)$ مجموعه همه توابع پیوسته مختلط بر X است.)

تعریف **۲۷.۱** **شعاع طیفی** : شعاع طیفی T را با نماد $r(T)$ نمایش می‌دهیم که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$r(T) = sup\{|\lambda| \ : \ \lambda \in \sigma(T)\} = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

تعریف ۲۸.۱ اصل مقایسه ابردوری : اگر $T: X \to X$ و $T_\circ : X_\circ \to X_\circ$ دو نگاشت پیوسته باشند که روی فضاهای توپولوژیک X و $X_\circ$ عمل می‌کنند نگاشت T یک عامل‌وار برای $T_\circ$ است اگر یک نگاشت پیوسته با برد چگال $J : X_\circ \to X$ موجود باشد به طوریکه:

$$TJ = JT_\circ$$

وقتی این تساوی با یک هومورفیسم $J : X_\circ \to X$ که $T = JT_\circ J^{-1}$ بدست می آید گوییم $T, T_\circ$ به طور توپولوژیک مزدوج هستند سرانجام هنگامی که $T, T_\circ$ عملگرهای خطی باشند نگاشت عاملگون (نسبت به هومورفیسم) J را می‌توان به صورت خطی به کار برد. گوییم T یک فاکتورگون (عاملگون) خطی از $T_\circ$ است. (با توجه به این که $T, T_\circ$ به طور خطی مزدوج هستند.)

ابردوری بودن توسط عاملگون‌ها پایدار می‌مانند و سوپردوری بودن نیز توسط فاکتورگون‌های خطی پایدار می‌مانند. به علاوه هر نگاشت عاملگون J نقاط ابردوری را به نقاط سوپردوری می‌نگارد با استفاده از نکته بالا روشن است که برای هر $x_\circ \in X_\circ$:

$$orb(J(x_\circ), T) = J(orb(x_\circ, T_\circ))$$

گزاره ۲۹.۱ اگر $T \in L(X)$ ابردوری باشد و $J \in L(X)$ برد چگال داشته باشد و با T جابجا شود آنگاه $HC(T)$ تحت J پایدار است.

فصل ۲

معرفی عملگر چزارو

۲—۱ آزمون شور

تعریف ۱.۲ عملگر چزارو روی فضای دنباله‌ای l^p به صورت زیر تعریف شده و آن را عملگر چزاروی گسسته می‌نامیم ؛

$$(C_0 f)(n) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f(i) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

عملگر چزارو روی فضاهای $L^p(0,1)$ و $L^p(0,\infty)$ به صورت زیر تعریف می‌شود و به ترتیب با نمادهای C_1 و C_∞ نشان داده می‌شود:

$$(C_1 f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(s)ds \qquad (0 < x < 1, f \in L^p(0,1))$$

$$(C_\infty f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(s)ds \qquad (0 < x < \infty, f \in L^p(0,\infty))$$