بسم الله الرحمن الرحیم

۱۴۲۲۰۵

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته ریاضی
گرایش جبر

زیرمدول‌های نیم‌اول و رادیکال آنها

استاد راهنما :

دکتر رضا نکویی

استاد مشاور :

دکتر سمیه کریم‌زاده

دانشجو :

مجتبی اندام

۱۳۸۹/۹/ ۱۴

مهر ۱۳۸۹

۱۴۶۶۰۵

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج. مطالعات. ابتکارات و
نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلق
به دانشگاه ولی‌عصر (عج) رفسنجان است..

مدیر تحصیلات تکمیلی
دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

دانشکده‌ی علوم ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی‌ارشد رشته‌ی ریاضی آقای مجتبی اندام

تحت عنوان:

« زیر مدول‌های نیم-اول و رادیکال آنها »

در تاریخ ۸۹/۷/۱ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ......عالی..... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه آقای دکتر رضا نکویی با مرتبه‌ی علمی دانشیار — امضاء

۲- استاد مشاور پایان‌نامه خانم دکتر سمیه کریم‌زاده با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۳- داور خارج از گروه آقای دکتر سینا هدایت با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۴- داور داخل از گروه خانم دکتر فیروزه جهانشاهی با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۵- - نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی، آقای دکتر مهدی ضیاءالدینی با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

تقدیر و تشکر

سپاس لطف بیکران خدایی که قدرت نوشتن را به انسان آموخت و او را به همان قلمی که می نویسد، قسم داد. به او قوه ادراک بخشید و سپس از روح خود در آن دمید تا امانت دار بزرگترین اثر خلقتش در عالم ناسوت باشد و بیاموزد از گهواره تا گور، که لاحوتی شود.

ستایش او را که در این راه بزرگ من را یاری نمود تا توانستم گامی کوچک، اما مشتاق در راهی بردارم که او برایم گشوده بود.

بدینوسیله مراتب قدردانی و تشکر عمیق خود را از جناب آقای دکتر رضا نکویی به خاطر راهنمایی های ارزنده و مساعدت های گرانبهای ایشان در تهیه و تدوین این پایان نامه ابراز می دارم.

از استاد مشاور محترم سرکار خانم دکتر سمیه کریم زاده که از شروع تا پایان جمع آوری مطالب مرا یاری نمودند تشکر می نمایم.

از اساتید محترم آقای دکتر سینا هدایت و خانم دکتر فیروزه جهانشاهی که زحمت داوری این پایان نامه را تقبل نمودند صمیمانه سپاس گزاری می نمایم.

در آخر از کلیه اساتیدی که در مراحل مختلف تحصیل از محضر ایشان کسب علم نموده ام و همچنین از دوستان عزیزم که از هر گونه کمک به بنده دریغ نکرده اند تقدیر و تشکر را دارم.

تقدیم به

پیشگاه آفتاب امامت حضرت ولی عصر(ع) که جهان در انتظار

عدالت اوست و

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

بزرگوارانی که تمام موفقیت های دور و نزدیک من، مرهون

زحمات همیشگی آنان است و هرگز نخواهم توانست ذره ای از

دریای لطف بیکرانشان را جبران کنم.

بسمه تعالی

چکیده

در این پایان نامه ابتدا زیرمدول‌های نیم‌اول در حلقه‌های ناجابه‌جایی را تعریف کرده و ارتباط آنها را با زیرمدول‌های رادیکال بررسی می‌کنیم. سپس حلقه‌های جابه‌جایی نوتری R را به قسمی مشخص می‌کنیم که هر زیرمدول نیم‌اول از یک $R-$ مدول، به صورت اشتراکی از زیرمدول‌های اول باشد.

پیش گفتار

بعد از معرفی زیرمدول‌های اول، موضوع رادیکال یک زیرمدول توجه علاقه‌مندان به این نظریه را به خود جلب کرد. با توجه به اینکه یک زیرمدول رادیکال، اشتراک تعدادی زیرمدول اول است، لذا این سئوال مطرح گردید که آیا هر زیرمدول نیم‌اول الزاماً زیرمدول رادیکال است؟ از این رو ارتباط زیرمدول‌های نیم‌اول و زیرمدول‌های رادیکال مورد توجه افراد بسیاری قرار گرفت. تا اینکه مان در [۹]، با ارائه‌ی یک مثال نقض نشان داد که هر زیرمدول نیم‌اول، الزاماً زیرمدول رادیکال نیست. این مطلب توسط اسمیت و مک‌کاسلند در [۷]، در مورد زیرمدول‌های تنها مورد بررسی قرار گرفت. پاره‌ای از محققین در این زمینه به بررسی این موضوع از دیدگاه رادیکال یک زیرمدول پرداخته‌اند که می‌توان به اسمیت در [۱۳]، اشاره کرد. در این پایان‌نامه که مربوط به [۹] و [۸] می‌باشد، به مطالعه‌ی زیرمدول‌هایی از مدول‌های نوتری می‌پردازیم که نیم‌اول و رادیکال می‌باشند.

این پایان‌نامه شامل چهار فصل است که بجز فصل دوم و بخش اول از فصل سوم که در آن‌ها، حلقه‌ها ناجابه‌جایی هستند، همه حلقه‌ها جابه‌جایی و یکدار و مدول‌ها یکانی می‌باشند. فصل اول شامل تعاریف و مفاهیم مقدماتی می‌باشد که در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرند. در فصل دوم به معرفی زیرمدول اول و زیرمدول رادیکال پرداخته و برخی از خصوصیات آنها را بیان می‌کنیم. در فصل سوم به معرفی زیرمدول‌های نیم‌اول در حلقه‌های ناجابه‌جایی و جابه‌جایی پرداخته و به بررسی ارتباط زیرمدول‌های نیم‌اول و زیرمدول‌های رادیکال می‌پردازیم. در فصل چهارم به بررسی حلقه‌های نوتری با این ویژگی می‌پردازیم که هر زیرمدول نیم‌اول از $R-$ مدول M به صورت اشتراکی از زیرمدول‌های اول M باشد.

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل به بیان تعاریف و مفاهیم مقدماتی پرداخته و سپس به بیان قضایایی می‌پردازیم که در ادامه مفید خواهند بود.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید A یک مجموعه‌ی خوش‌ترتیب باشد. $\alpha \subseteq A$ را عدد ترتیبی گوییم هرگاه برای هر $\beta \subseteq \alpha$، $\beta = \{\gamma \in A \mid \gamma \leq \beta\}$. عدد ترتیبی $\alpha \in A$ را عدد حدی ترتیبی گوییم هرگاه عدد ترتیبی $\beta \in A$ موجود نباشد به قسمی که $\alpha = \beta^+ = \beta + ۱$.

تعریف ۲.۱.۱ اصل استقرای ترامتناهی فرض کنید A یک مجموعه‌ی خوش‌ترتیب و S زیرمجموعه‌ای از A با این ویژگی باشد که برای هر $\alpha \in A$، اگر $\{\gamma \in A \mid \gamma < \alpha\} \subseteq S$ باشد، آنگاه $\alpha \in S$ باشد. در این صورت $A = S$.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد. رادیکال I را اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های اول R و شامل I تعریف کرده و آن را با $rad(I)$ نشان می‌دهیم. اگر ایده‌آل اولی از R شامل I وجود نداشته باشد، آنگاه قرار می‌دهیم $rad(I) = R$. رادیکال ایده‌آل صفر را رادیکال پوچ یا رادیکال اول حلقه R می‌نامیم.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید I ایده‌آلی سره از حلقه R باشد. گوییم ایده‌آل I اولیه است هرگاه برای $r, s \in R$، اگر $rs \in I$ ، آنگاه $r \in I$، یا عدد صحیح و مثبت n موجود باشد به قسمی که $s^n \in I$. در این صورت $P = rad(I)$، ایده‌آل اولی از حلقه R بوده و I را $P-$ اولیه می‌نامیم.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید I ایده‌آلی سره از حلقه R باشد. گوییم ایده‌آل I اول است هرگاه برای $r, s \in R$، اگر $rs \in I$ ، آنگاه $r \in I$ یا $s \in I$. مجموعه همه ایده‌آل‌های اول حلقه R را طیف R نامیده و با $Spec(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱ گوییم ایده‌آل I از حلقه R، اول مینیمال است هرگاه برای هر ایده‌آل اول J از R که $J \subseteq I$، $I = J$. مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های اول مینیمال حلقه‌ی R را با $Min(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷.۱.۱ رادیکال جیکوبسون حلقه‌ی R را با نماد $J(R)$ نشان داده و اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال R تعریف می‌کنیم.

تعریف ۸.۱.۱ عنصر $a \in R$ را مقسوم علیه صفر گوییم هرگاه $0 \neq b \in R$ موجود باشد به قسمی که $ab = 0$.

تعریف ۹.۱.۱ عنصر $a \in R$ را پوچ‌توان گوییم هرگاه عدد صحیح و مثبت n موجود باشد به قسمی که $a^n = 0$. به وضوح هر عنصر پوچ‌توان، مقسوم علیه صفر است. مجموعه‌ی

همه‌ی عناصر پوچ‌توان حلقه‌ی R که ایده‌آلی از R است را رادیکال پوچ حلقه‌ی R نامیده و با $Nil(R)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۰.۱.۱ رادیکال پوچ حلقه‌ی R با اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R برابر است، لذا $Nil(R) = \bigcap_{p \in Spec(R)} p = rad(0)$.

اثبات : رجوع شود به [۱، قضیه ۱.۸]. ■

تذکر ۱۱.۱.۱ طبق قضیه‌ی ۱۰.۱.۱، $Nil(R)$ با اشتراک همه ایده‌آل‌های اول مینیمال R برابر است.

تعریف ۱۲.۱.۱ حلقه‌ی R را کاهش یافته گوییم هرگاه عنصر پوچ‌توان نداشته باشد. به عبارت دیگر $rad(0) = 0$.

تعریف ۱۳.۱.۱ بعد کرول حلقه‌ی R را با $dimR$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$dimR = sup\{n \in N \cup \{0\} \mid \exists P_i \in Spec(R)(1 \leq i \leq n) \ni P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n\}.$$

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنید $f : A \to B$ یک هم‌ریختی حلقه‌ای، I ایده‌آلی از A و J ایده‌آلی از B باشد. ایده‌آل تولید شده توسط $f(I)$ در B را توسیع I نامیده و آن را با I^e نمایش می‌دهیم. همچنین $f^{-1}(J)$ ایده‌آلی از A بوده که آن را انقباض J نامیده و با J^c نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۵.۱.۱ فرض کنید $f : A \to B$ یک هم‌ریختی حلقه‌ای، I ایده‌آلی از A و J ایده‌آلی از B باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

الف) $I \subseteq I^{ec}$ و $J^{ce} \subseteq J$..

ب) $I^e = I^{ece}$ و $J^{cec} = J^c$..

اثبات : رجوع شود به [۱، قضیه ۱.۱۷]. ■

تعریف ۱.۱.۱۶ $R-$ مدول $M \neq 0$ را ساده گوییم، هرگاه شامل هیچ زیرمدولی به جز زیرمدول صفر و خودش نباشد.

تعریف ۱.۱.۱۷ $R-$ مدول M را نیم‌ساده گوییم، هرگاه M به صورت مجموع مستقیمی از $R-$ مدول‌های ساده باشد.

تعریف ۱.۱.۱۸ حلقه‌ی R نیم‌ساده است هرگاه به عنوان $R-$ مدول، نیم‌ساده باشد.

قضیه ۱.۱.۱۹ اگر حلقه‌ی R نیم‌ساده باشد، آنگاه هر $R-$ مدول، نیم‌ساده است.

اثبات : رجوع شود به [۱۱، قضیه ۴.۵]. ■

قضیه ۱.۱.۲۰ $R-$ مدول M نیم‌ساده است اگر و تنها اگر هر زیرمدول M، جمعوند مستقیم M باشد.

اثبات : رجوع شود به [۱۱، قضیه ۴.۱]. ■

تعریف ۱.۱.۲۱ زیرمدول N از M را اساسی گوییم، هرگاه برای هر زیرمدول غیرصفر L از M، $N \cap L \neq 0$ و می‌نویسیم $N \leq_e M$.

قضیه ۱.۱.۲۲ الف) فرض کنید A، B و C سه $R-$ مدول باشند به قسمی که $A \subseteq B \subseteq C$. در این صورت $A \leq_e C$ اگر و تنها اگر $A \leq_e B$ و $B \leq_e C$.

ب) فرض کنید $\{ A_i \mid i \in I\}$ و $\{ B_i \mid i \in I\}$ دو خانواده از $R-$ مدول‌ها باشند به قسمی که برای هر $i \in I$، $A_i \leq_e B_i$. در این صورت $\bigoplus_{i\in I} A_i \leq_e \bigoplus_{i\in I} B_i$.

اثبات : رجوع شود به [۲، قضیه ۲۱.۳]. ■

تعریف ۲۳.۱.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. پوچ‌ساز M را با نماد $Ann_R(M)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Ann_R(M) = \{ r \in R \mid rM = \circ \}.$$

به وضوح $Ann_R(M)$ ایده‌آلی از R است. اگر $Ann_R(M) = \circ$، آنگاه $R-$ مدول M را وفادار می‌نامیم.

تعریف ۲۴.۱.۱ حلقه‌ی R را ابتدایی گوییم، هرگاه یک $R-$ مدول ساده و وفادار موجود باشد. منظور از فاکتور ابتدایی، فاکتور $\frac{R}{I}$ برای ایده‌آل I از R است به قسمی که $\frac{R}{I}$ یک حلقه‌ی ابتدایی باشد.

تعریف ۲۵.۱.۱ حلقه‌ی R ($R-$ مدول M) را نوتری گوییم هرگاه هر زنجیر صعودی از ایده‌آل‌های R (زیرمدول‌های M) ایستا باشد. گوییم حلقه‌ی R در شرط زنجیر افزایشی روی ایده‌آل‌های دوطرفه صدق می‌کند هرگاه هر زنجیر صعودی از ایده‌آل‌های دوطرفه R، ایستا باشد.

قضیه ۲۶.۱.۱ حلقه‌ی R ($R-$ مدول M) نوتری است اگر و تنها اگر هر ایده‌آل R(زیرمدول M) با تولید متناهی باشد.

اثبات : رجوع شود به [۳، قضیه ۹.۱.۸]. ■

تعریف ۲۷.۱.۱ حلقه‌ی R ($R-$ مدول M) را آرتینی گوییم هرگاه هر زنجیر نزولی از ایده‌آل‌های R (زیرمدول‌های M) ایستا باشد.

تعریف ۲۸.۱.۱ منظور از یک سری ترکیبی برای $R-$ مدول M، زنجیر

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = 0$$

از زیرمدول‌های M است به قسمی که برای هر i $(1 \leq i \leq n)$، $\frac{M_{i-1}}{M_i}$ یک $R-$ مدول ساده باشد. در این حالت گوییم M دارای یک سری ترکیبی از طول n است ومی‌نویسیم $l(M) = n$.

قضیه ۲۹.۱.۱ فرض کنید M دارای یک سری ترکیبی از طول n و N زیرمدولی سره از M باشد. در این صورت $l(N) < l(M)$.

اثبات : رجوع شود به [۱، قضیه ۷.۶]. ■

لم ۳۰.۱.۱ (لم ناکایاما) فرض کنید M یک $R-$ مدول با تولید متناهی و $I \subseteq J(R)$ ایده‌آلی از R باشد. اگر $M = IM$، آنگاه $M = 0$ است.

اثبات : رجوع شود به [۱، قضیه ۶.۲]. ■

حال صورت دیگری از لم ناکایاما را بیان می‌کنیم.

لم ۳۱.۱.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول با تولید متناهی، N زیرمدولی از M و $I \subseteq J(R)$ ایده‌آلی از R باشد. اگر $M = IM + N$، آنگاه $M = N$ است.

اثبات : رجوع شود به [۱، قضیه ۷.۲]. ■

تعریف ۳۲.۱.۱ گوییم ایده‌آل I از R دارای تجزیه‌ی اولیه است، هرگاه $I = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$ که در آن هر q_i $(1 \leq i \leq n)$، P_i- اولیه است. یعنی $P_i = rad(q_i)$، برای هر $1 \leq i \leq n$. تجزیه‌ی

اولیه I، مینیمال است هرگاه برای هر $1 \leq j \leq n$، $I \neq \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} q_i$.

تعریف ۳۳.۱.۱ فرض کنید $I = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$ که $rad(q_i) = P_i$، یک تجزیه‌ی اولیه مینیمال از I باشد. در این صورت P_i ها را ایده‌آل‌های اول وابسته به I می‌نامیم.

قضیه ۳۴.۱.۱ فرض کنید I ایده‌آلی از R و $I = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$، که $rad(q_i) = P_i$، یک تجزیه‌ی اولیه مینیمال از I باشد. در این صورت

$$\bigcup_{i=1}^{n} P_i = \{x \in R \mid (I : x) \neq I\}.$$

به ویژه اگر ایده‌آل صفر تجزیه‌ی اولیه مینیمال داشته باشد، آنگاه مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم علیه‌های صفر حلقه‌ی R با اجتماع همه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته به صفر، برابر است.

اثبات : رجوع شود به [۱، قضیه ۷.۴]. ■

قضیه ۳۵.۱.۱ فرض کنید I ایده‌آلی ازحلقه‌ی نوتری R باشد. در این صورت ایده‌آل اول P از R، یک ایده‌آل اول وابسته به I است اگر و تنها اگر $a \in R$ موجود باشد به قسمی که $P = (I : a)$.

اثبات : رجوع شود به [۱، قضیه ۱۷.۷]. ■

فصل ۲

مدول‌های اول و زیرمدول‌های رادیکال

۱.۲ مدول‌های اول

در این فصل همه‌ی حلقه‌ها، یکدار و همه‌ی R− مدول‌ها، چپ یکانی می‌باشند. در این بخش به بیان و بررسی مدول‌های اول پرداخته و درباره مجموع مستقیم و ویژگی‌های آن توضیح می‌دهیم. به‌ویژه در قضیه۱۲.۱.۲، یکتایی جمع مستقیم مدول‌های اول با پوچ‌سازهای متمایز را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۲ فرض کنید M یک R− مدول باشد. زیرمدول سره N از M را اول گوییم هرگاه برای $r \in R$ و زیرمدول L از M اگر $rL \subseteq N$، آنگاه $L \subseteq N$ یا $rM \subseteq N$ باشد. اگر N یک زیرمدول اول از M باشد، آنگاه ایده‌آل $P = (N : M) = Ann_R(\frac{M}{N})$ یک ایده‌آل اول حلقه‌ی R است. در این حالت N را P− اول می‌نامیم. مجموعه‌ی همه‌ی زیرمدول‌های اول R− مدول M را طیف M نامیده و با $Spec(M)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۱.۲ ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R، زیرمدولی اول از $R-$ مدول R می‌باشند و برعکس.

مثال ۳.۱.۲ فرض کنید R یک قلمرو صحیح و K، میدان کسرهای حلقه‌ی R باشد. در این صورت زیرمدول $\{0\}$، تنها زیرمدول اول از $R-$ مدول K می‌باشد. به ویژه $\{0\}$ تنها زیرمدول اول از $Z-$ مدول Q است.

مثال ۴.۱.۲ فرض کنید V یک فضای برداری و W زیرفضای سره‌ای از V باشد. در این صورت $(V : W) = \{0\}$ است. لذا همه‌ی زیرفضاهای سره از V، $\{0\}$–اول می‌باشند.

تعریف ۵.۱.۲ $R-$ مدول M را اول گوییم هرگاه زیرمدول صفر از M، اول باشد. بنابراین زیرمدول N از $R-$ مدول M اول است اگر و تنها اگر $\frac{M}{N}$ یک $R-$ مدول اول باشد.

تذکر ۶.۱.۲ هرگاه M یک $R-$مدول اول باشد، آنگاه هر زیرمدول سره N از M به عنوان $R-$ مدول، اول است.

قضیه ۷.۱.۲ هرگاه M یک $R-$مدول اول باشد، آنگاه پوچ‌ساز M یک ایده‌آل اول حلقه‌ی R است.

اثبات : چون M یک $R-$ مدول اول بوده لذا صفر، زیرمدولی اول از M است. بنابراین $P = Ann_R(M) = (0 : M)$ یک ایده‌آل اول از حلقه‌ی R است. ■

لم ۸.۱.۲ اگر M یک $R-$ مدول اول و N زیرمدولی غیرصفر از M باشد، آنگاه $Ann_R(M) = Ann_R(N)$.

اثبات : چون $N \subseteq M$ است، لذا $Ann_R(M) \subseteq Ann_R(N)$ می‌باشد. حال فرض کنید $x \in Ann_R(N)$ باشد، در این صورت $xN = 0$ است. چون