بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی کاربردی (گرایش تحقیق در عملیات)

بهینه‌سازی تابع هدف خطی با محدودیت‌های دوقطبی

توسط:
شادی شهاب اردلان

استاد راهنما:
دکتر علی عباسی ملایی

استاد مشاور:
دکتر رضا پورقلی

شهریور ۱۳۹۳

به نام خدا

بهینه‌سازی تابع هدف خطی با محدودیت‌های دوقطبی

توسط:

شادی شهاب اردلان

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی کاربردی (گرایش تحقیق در عملیات)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **عالی**

دکترعلی عباسی ملایی استادیار ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر رضا پورقلی دانشیار ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر حنیف حیدری استادیار ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور اول)

دکترسید هاشم طبسی استادیار ریاضی کاربردی گرایش علوم کامپیوتر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر سید امین اصفهانی استادیار ریاضی محض گرایش نظریه معادلات دیفرانسیل دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

تقدیم به

مهربان فرشتگانی که:

نه می‌توانم موهایشان را که در راه عزت من سفید شده، سیاه کنم و نه برای دست‌های پینه بسته‌شان که ثمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم. پروردگارا توفیقم ده که هر لحظه شکرگزارشان باشم و ثانیه‌های عمرم را در عصای دست بودنشان بگذرانم.

و تقدیم به برادر گرانقدرم، که همواره در طول تحصیل متحمل زحماتم بود و تکیه‌گاه من در مواجهه با مشکلات، و وجودش مایه دلگرمی من می‌باشد.

سپاسگزاری

سپاس خدای را که هر چه دارم از اوست.

از استاد با کمالات و دلسوز، جناب آقای دکتر علی عباسی ملایی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننموده‌اند و زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند، سپاسگزارم.

از استاد صبور و شایسته، جناب آقای دکتر رضا پورقلی، که زحمت مشاوره این پایان‌نامه را متقبل شدند، تشکر می‌کنم.

از اساتید محترم، آقایان دکتر سید هاشم طبسی و دکتر حنیف حیدری که زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از استاد محترم، آقای دکتر سید امین اصفهانی که به عنوان نماینده تحصیلات تکمیلی در جلسه دفاعیه حضور یافتند، سپاسگزارم.

چکیده

بهینه‌سازی تابع هدف خطی با محدودیت‌های دوقطبی

به وسیله‌ی:
شادی شهاب اردلان

در این پایان‌نامه، قصد بر آن است که روش‌های حل مسایل مینیمم‌سازی یک تابع هدف خطی با محدودیت‌های معادلات رابطه فازی با عملگرهای ترکیبی ماکزیمم–مینیمم و ماکزیمم–ضرب و نامعادلات رابطه فازی و نیز محدودیت‌های ماکزیمم–مینیمم دوقطبی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. با توجه به اینکه مجموعه جواب‌های شدنی این نوع مسایل نامحدب است، لذا الگوریتم سیمپلکس و نقطه درونی برای حل آن‌ها ناکارا هستند. برای به‌دست آوردن جواب بهینه این مساله با عملگر ترکیبی ماکزیمم–مینیمم ابتدا آن را به یک مساله برنامه‌ریزی عدد صحیح صفر-یک تبدیل کرده و آن را به‌کمک روش شاخه و کران حل می‌کنیم. در ادامه، این مساله را با عملگر ترکیبی ماکزیمم–ضرب و نامعادلات رابطه فازی بررسی می‌کنیم. در نهایت این مساله با محدودیت‌های ماکزیمم–مینیمم دوقطبی ارایه می‌شود و الگوریتمی کارا برای به‌دست آوردن جواب بهینه طراحی می‌شود.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

پیشگفتار

ایده اصلی معادلات رابطه فازی بر اساس عملگر ترکیبی ماکزیمم−مینیمم ابتدا توسط سانچز[1] [۲۰]در سال ۱۹۷۶ پیشنهاد شد. سپس توسط پریوات [2] [۱۹]در سال ۱۹۸۱ و زاگالا[3]، درینیاک و پدریج [۳]در سال ۱۹۸۲ برای مجموعه‌های متناهی مطالعه شد. هیگاشی و کلر [4] [۱۰]در سال ۱۹۸۴ الگوریتمی را برای حل سیستم معادلات رابطه فازی با عملگر ماکزیمم−مینیمم پیشنهاد کردند. البته، معادلات رابطه فازی برای سایر انواع عملگرهای ترکیبی نیز مورد مطالعه قرار گرفته‌اند که می‌توان به منبع [۱۵] اشاره کرد. یافتن جواب‌های معادلات رابطه فازی مربوط به موضوع معادلات رابطه فازی می‌شود که نقش مهمی در مدلبندی فازی دارد و به‌طور گسترده‌ای نیز توسط محققان زیادی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. یک نوع از این‌گونه مسایل، مساله برنامه‌ریزی رابطه فازی با عملگر ترکیبی ماکزیمم−مینیمم است که برای اولین بار توسط فنگ و لی[5] [۵] در سال ۱۹۹۹ مطرح شد. این مساله برنامه‌ریزی عبارت است از مینیمم‌سازی یک تابع هدف خطی تحت محدودیت‌های معادلات رابطه فازی با عملگر ماکزیمم− مینیمم. مساله برنامه‌ریزی رابطه فازی در بسیاری از رشته‌های مهندسی مانند نساجی و برق و علوم پزشکی و روانشناسی دارای کاربردهای متنوعی می‌باشد. مساله برنامه‌ریزی رابطه فازی تنها با دو عملگر ترکیبی ماکزیمم−مینیمم و ماکزیمم−ضرب مورد مطالعه قرار گرفته‌اند و الگوریتم‌هایی برای حل این مساله با این دو عملگر ویژه ارایه شده‌اند. در حالت کلی مجموعه جواب‌های شدنی مساله فوق یک مجموعه نامحدب است لذا الگوریتم‌های سیمپلکس و نقطه درونی

[1] Sanchez

[2] Prevot

[3] Czogala

[4] Higashi - Klir

[5] Fang - Li

برای حل آن‌ها ناکارا خواهند بود. بنابراین، ارایه یک روش کارا برای حل این نوع مسایل ضروری است. فنگ و لی نشان دادند که می‌توان این مساله را به یک مساله برنامه‌ریزی عدد صحیح صفر-یک تبدیل کرد و سپس آن را به کمک روش شاخه و کران حل کرد. لواتامون فنگ و فنگ [1] [۱۳] مساله فوق را با عملگر ماکزیمم–ضرب مطالعه کردند. آن‌ها مساله بهینه‌سازی فوق را به دو زیرمساله با ضرایب هزینه مثبت و منفی تابع هدف تبدیل کردند و نشان دادند که می‌توان زیرمساله با ضرایب منفی تابع هدف را به آسانی با به‌دست آوردن جواب ماکزیمم حل کرد. از طرف دیگر می‌توان زیرمساله تولید شده با ضرایب مثبت در تابع هدف را به یک مساله برنامه‌ریزی عدد صحیح صفر-یک تبدیل کرد و سپس آن را به کمک روش شاخه و کران حل کرد. گو و زیا [۸] یک مورد کلی‌تر از مساله فنگ و لی را ارایه دادند، که در آن یک مدل بهینه‌سازی با یک تابع هدف خطی با محدودیت‌های نامعادلات رابطه فازی مورد بررسی قرار می‌گیرد. یک روش جدید برای حل این مساله بر اساس شرط لازم بهینگی ارایه شده است که در مقایسه با روش‌های معمول، الگوریتم پیشنهادی ناحیه جستجو را کاهش می‌دهد و از این‌رو جواب بهینه را سریعتر به‌دست می‌آورد. فرسون، دیبیتز و دیمایر [۶] مساله برنامه‌ریزی رابطه فازی با عملگر ماکزیمم–مینیمم را به مساله برنامه‌ریزی با محدودیت‌های ماکزیمم–مینیمم دوقطبی گسترش دادند، که در هر طرفش یک تابع ماکزیمم–مینیمم را در بر دارد. برای حل این مساله به‌جای دو برابر کردن اعداد تابع ماکزیمم–مینیمم، متغیرهای دوقطبی را روی بازه واحد اعداد حقیقی معرفی می‌کنیم. با یافتن ماکزیمم‌کننده تابع هدف خطی n-قطبی متغیرهای حقیقی روی بازه واحد مشروط به m-محدودیت مساوی(نامساوی) ماکزیمم–مینیمم، این مساله را حل می‌کنیم. این پایان‌نامه از پنج فصل تشکیل شده است.

در فصل اول تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز را بیان می‌کنیم. در فصل دوم مساله برنامه‌ریزی رابطه فازی با عملگر ترکیبی ماکزیمم–مینیمم معرفی می‌شود. مجموعه جواب‌های شدنی این مساله را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و در ادامه، به بررسی تاثیر بردار هزینه در تعیین جواب بهینه این مساله می‌پردازیم. همچنین، یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح صفر-یک برای حل مساله فوق ارایه می‌شود که این الگوریتم توسط فنگ و لی [۵] در سال ۱۹۹۹ پیشنهاد شده است. در فصل سوم، مساله برنامه‌ریزی رابطه فازی با یک تابع هدف خطی تحت محدودیت‌های معادلات رابطه فازی با عملگر ترکیبی ماکزیمم–ضرب مورد مطالعه قرار می‌گیرد و روش لواتامون فنگ و فنگ [۱۳] برای حل این مساله بیان می‌شود. مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح صفر-یک معادل با این مساله ارایه می‌شود. در فصل چهارم، مساله بهینه‌سازی با یک تابع هدف خطی با محدودیت‌های نامعادلات رابطه فازی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این مساله با تبدیل به دو زیرمساله که تابع هدف‌شان یکنواست، حل می‌شود.

---
[1] Loetamonphong - Fang

این دو زیرمساله مقدار بهینه‌شان را به‌ترتیب در یک نقطه ماکسیمال و یکی از نقاط مینیمال دامنه شدنی به‌دست می‌آورند. در این فصل یک شرط لازم بهینگی ارایه شده است و طبق این شرط، یک روش جدید برای حل مساله فوق پیشنهاد می‌شود و سپس در انتهای فصل دو مثال ارایه شده است. در فصل پنجم، مساله برنامه‌ریزی رابطه فازی با محدودیت‌های ماکزیمم–مینیمم دوقطبی ارایه می‌گردد، که این مساله به دو زیرمساله تجزیه می‌شود. در پایان، یک الگوریتم برای حل این دو زیرمساله ارایه می‌شود و با چند مثال توضیح داده می‌شود.

فصل ۱

مجموعه‌های فازی

۱-۱ مقدمه

برنامه‌ریزی خطی که اولین بار در سال ۱۹۴۷ توسط جورج ب.دانتزیک[۱] معرفی شده روش موثر در عرصه ریاضیات جهت فرمولبندی مسایل اقتصادی، صنعتی، نظامی و دیگر زمینه‌های فنی و تولید می‌باشد که با ابداع این روش گامی مهم در حل این‌گونه مسایل برداشته شد.

عدم ثبات در پارامترهای مساله برنامه‌ریزی‌خطی که ناشی از عدم قطعیت اطلاعات اولیه جهت تعریف مساله که در اثر وجود شاخصه‌هایی همچون تورم در اقتصاد، عدم آگاهی از هزینه‌های در حال تولید و دیگر پیشامدهایی از این قبیل می‌باشد که باعث شد تعریف قطعی مساله برنامه‌ریزی خطی[۲] در عرصه‌های گوناگون با تزلزل همراه باشد.

ناتوانی مجموعه‌های کلاسیک در بیان کمیت‌ها و مفاهیم نادقیق همچون کوچکی، بزرگی، ارزانی، گرانی، جوانی،پیری و ... که در هر سیستم دارای معنی خاص هستند باعث شد تا نظریه مجموعه‌های فازی قدم به میان بگذارد. لذا پس از ارایه نظریه مجموعه‌های فازی از سوی پروفسور لطفی‌زاده دانشمند ایرانی‌تبار دانشگاه برکلی در سال ۱۹۶۵ ، رویکردی جدید در تعریف مساله برنامه‌ریزی خطی از دریچه مجموعه‌های فازی ایجاد شد و برخی از طراحان مساله برنامه‌ریزی خطی سعی کردند تا عدم قطعیت در پارامترهای این‌گونه مسایل را با پارامترهای فازی نمایش دهند.

این نظریه یک قالب جدید ریاضی برای صورت‌بندی و تجزیه و تحلیل این مفاهیم و ویژگی‌هاست. در واقع نظریه مجموعه‌های فازی یک تعمیم و گسترش طبیعی نظریه مجموعه‌های معمولی است که

---

[۱] George B.Dantzik

[۲] Linear Programming

موافق با زبان و فهم طبیعی انسان‌ها نیز هست. در این فصل، تعاریف و مفاهیم مقدماتی نظریه مجموعه‌های فازی مطرح و بررسی می‌شوند.

۱-۲ مفاهیم اولیه و تعاریف مقدماتی

تعریف ۱-۲.۱. [۱] فرض کنید X یک مجموعه مرجع دلخواه باشد، تابع نشانگر[۱] هر زیر مجموعه معمولی A از X، یک تابع از X به $\{۰, ۱\}$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X_A(x) = \begin{cases} ۱ & if \quad x \in A, \\ ۰ & if \quad x \notin A, \end{cases} \tag{۱.۱}$$

تعریف ۱-۲.۲. [۱] اگر برد تابع نشانگر را از مجموعه دوعضوی $\{۰, ۱\}$ بربازه $[۰, ۱]$ توسعه دهیم یک تابع خواهیم داشت که به هر $x \in X$، عددی را از بازه $[۰, ۱]$ نسبت می‌دهد، این تابع را تابع عضویت A می‌نامیم. اکنون A دیگر یک مجموعه معمولی نیست بلکه چیزی است که آن را مجموعه فازی[۲] می‌نامیم. (به طور دقیق‌تر A زیرمجموعه فازی X است). تابع عضویت این مجموعه را با $\mu_A(x)$ نشان می‌دهیم. نزدیکی مقدار $\mu_A(x)$ به عدد یک نشانگر تعلق بیشتر عضو x به مجموعه A است و بالعکس نزدیکی آن به صفر نشان دهنده تعلق کمتر x به A است. چنانچه x کاملاً در A باشد، داریم $\mu_A(x) = ۱$ و چنانچه اصلا در A نباشد داریم $\mu_A(x) = ۰$.

تعریف ۱-۲.۳. [۱] فرض کنید X یک مجموعه مرجع و A یک زیرمجموعه فازی از آن باشد. مجموعه نقاطی از X که برای آن نقاط $\mu_A(x) > ۰$، تکیه‌گاه A نامیده می‌شود و با $suppA$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱-۲.۴. [۱] مقدار $h = supp_x \mu_A(x)$ ارتفاع مجموعه A نامیده می‌شود اگر ارتفاع مجموعه فازی A برابر یک باشد، آنگاه A را نرمال گوییم. در غیر این‌صورت A را زیرنرمال گوییم. هر مجموعه فازی زیرنرمال A را می‌توان با تقسیم μ ها بر ارتفاع A، نرمال کرد.

اگر x عضوی باشد که برای آن $\mu_A(x) = ۱/۲$ باشد، x را یک نقطه گذر(معبر) A گوییم.

[۱] Indicator Function

[۲] Fuzzy Set

۱-۳ نمایش مجموعه‌های فازی

روش متداول دیگر برای توصیف یک مجموعه فازی به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به‌صورت زیر است:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \;:\; x \in X\}. \tag{۲.۱}$$

هنگامی‌که X یک مجموعه متناهی (ویا نامتناهی شمارا) به‌صورت $\{x_۱, \dots, x_n\}$ باشد، به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$A = \{\frac{\mu_A(x_۱)}{x_۱}, \frac{\mu_A(x_۲)}{x_۲}, \dots, \frac{\mu_A(x_n)}{x_n}\}, \tag{۳.۱}$$

ویا به‌صورت زیر:

$$A = \frac{\mu_A(x_۱)}{x_۱} + \frac{\mu_A(x)}{x} + \dots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \Sigma_{i=۱}^{n} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}, \tag{۴.۱}$$

که در رابطه اخیر منظور از $+$، اجتماع است نه جمع جبری.

اگر X یک مجموعه پیوسته باشد، از نماد زیر استفاده می‌شود:

$$A = \int_X \frac{\mu_A(x)}{x}, \tag{۵.۱}$$

که در آن منظور از علامت $\int$، اجتماع است.

در بعضی موارد، برای اختصار به جای $\mu_A(x)$ می‌نویسیم $A(x)$.

تعریف ۱-۳.۱. [۱] مجموعه فازی A را تهی گوییم اگر برای هر $x \in X$، $A(x) = ۰$.

تعریف ۱-۳.۲. [۱] مجموعه فازی A را تام گوییم اگر برای هر x متعلق به X، $A(x) = ۱$.

تعریف ۱-۳.۳. [۱] گوییم مجموعه فازی A زیرمجموعه فازی B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$ اگر برای هر $x \in X$، $A(x) \leq B(x)$ باشد.

تعریف ۱-۳.۴. [۱] دو مجموعه فازی A و B را مساوی گوییم و می‌نویسیم $A = B$ اگر برای هر $x \in X$، $A(x) = B(x)$ باشد.

تعریف ۱-۳.۵. [۱] مجموعه فازی A'، متمم مجموعه فازی A، توسط تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$A'(x) = ۱ - A(x), \qquad \forall x \in X. \tag{۶.۱}$$

تعریف ۱-۳.۶. [۱] اشتراک دو مجموعه فازی A و B به‌صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$(A \cap B)(x) = min[A(x), B(x)], \qquad \forall x \in X. \tag{۷.۱}$$

و یا به بیان ساده‌تر

$$(A \cap B)(x) = A(x) \cap B(x). \tag{۸.۱}$$

و

$$(A \cup B)(x) = A(x) \cup B(x). \tag{۹.۱}$$

تعریف ۱-۳.۷. [۱] چنانچه k یک مجموعه اندیس‌گذار باشد و A_αها، $\alpha \in k$، زیرمجموعه‌های فازی از X باشد، آنگاه $\bigcup_{\alpha\in k} A_\alpha$ و $\bigcap_{\alpha\in k} A_\alpha$ به‌صورت مجموعه‌های فازی با توابع عضویت زیر تعریف می‌شوند:

$$(\bigcup_{\alpha\in k} A_\alpha)(x) = Sup\{A_\alpha(x)\ ,\ \ \alpha \in k\}. \tag{۱۰.۱}$$

و

$$(\bigcap_{\alpha\in k} A_\alpha)(x) = Inf\{A_\alpha(x)\ ,\ \ \alpha \in k\}. \tag{۱۱.۱}$$

تعریف ۱-۳.۸. [۱] اگر $A_۱, \ldots, A_n$ به‌ترتیب زیرمجموعه‌های فازی از $X_۱, \ldots, X_n$ باشند، حاصل‌ضرب دکارتی $A_۱, \ldots, A_n$ که با $A_۱ \times \cdots \times A_n$ نشان داده می‌شود، به‌صورت یک زیرمجموعه فازی از فضای حاصل‌ضرب $X_۱ \times \cdots \times X_n$ با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$(A_۱ \times \cdots \times A_n)(x_۱, \ldots, x_n) = min_{i=۱,\ldots,n}\{A_i(x_i)\}, \qquad x_i \in X_i. \tag{۱۲.۱}$$

۱-۴ رابطه‌های فازی

مفهوم رابطه فازی یک تعمیم طبیعی برای مفهوم رابطه در حالت معمولی است. تعریف زیر، مفهوم رابطه فازی در حالت کلی n-بعدی ارایه می‌دهد. فرض کنید X حاصل‌ضرب دکارتی n مجموعه مرجع $X_1, \ldots, X_n$ باشد.

تعریف ۱-۴.۱. [۱] یک رابطه فازی n-بعدی R در X به‌صورت یک زیرمجموعه فازی از X تعریف می‌شود:

$$R = \int_{X_1,\ldots,X_n} \mu_R(x_1, \ldots, x_n)/(x_1, \ldots, x_n), \qquad (۱۳.۱)$$

که در آن μ_R تابع عضویت R است. در حالت خاص دوبعدی رابطه R در $X \times Y$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R = \int_{X\times Y} \frac{\mu_R(x, y)}{(x, y)}, \qquad (۱۴.۱)$$

که در آن μ_R تابع عضویت R است. در حالت خاص دوبعدی رابطه R در $X \times Y$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R = \int_{X\times Y} \frac{\mu_R(x, y)}{(x, y)}, \qquad (۱۵.۱)$$

در حالتی که X و Y دو مجموعه متناهی باشند، رابطه R را به‌صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$R = \{\frac{\mu_R(x, y)}{(x, y)} \mid (x, y) \in X\times Y\} = \{((x, y), R(x, y)) \mid (x, y) \in X\times Y\}, \qquad (۱۶.۱)$$

درجات عضویت رابطه R در حالت دوبعدی به‌صورت یک ماتریس نمایش داده می‌شود، یعنی:

$$R(x, y) = [\frac{\mu_R(x, y)}{(x, y)}]_{|X|\times|Y|}. \qquad (۱۷.۱)$$

حال به معرفی t-نرم‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۱-۴.۲. [۱] یک نرم مثلثی (t-نرم) یک تابع حقیقی $T : [۰, ۱]^۲ \longrightarrow [۰, ۱]$ است که برای هر $\alpha, \beta, \delta \in [۰, ۱]$ در خواص زیر صدق می‌کند:

(۱) جابه‌جایی یعنی $\quad T(\alpha, \beta) = T(\beta, \alpha)$

(۲) شرکت‌پذیری یعنی: $T(\alpha,(\beta,\delta)) = T(T(\alpha,\beta),\delta)$

(۳) یکنوایی یعنی: $If \beta \leq \delta \quad \Longrightarrow T(\alpha,\beta) \leq T(\alpha,\delta)$

(۴) $T(\alpha,1) = \alpha \qquad \forall\alpha \in [0,1]$

تعریف ۱-۳.۴. [۱] یک s-نرم یک تابع حقیقی $S : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ است که برای هر $\alpha,\beta,\delta \in [0,1]$ در خواص زیر صدق می‌کند:

(۱) جابه‌جایی یعنی: $S(\alpha,\beta) = S(\beta,\alpha)$

(۲) شرکت‌پذیری یعنی: $S(\alpha,(\beta,\delta)) = S(S(\alpha,\beta),\delta)$

(۳) یکنوایی یعنی: $If \beta \leq \delta \quad \Longrightarrow S(\alpha,\beta) \leq S(\alpha,\delta)$

(۴) $S(\alpha,0) = \alpha \qquad \forall\alpha \in [0,1]$

لازم به ذکر است که این دو تابع حقیقی مقدار دومتغیره اخیر $T(x,y)$ و $S(x,y)$ با $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq 1$ درجات عضویت x در $A \cup B$ و در $A \cap B$ را که AوB دو مجموعه فازی هستند، برحسب درجات عضویت x در A و در B (و نه چیز دیگر) بیان می‌کند. یعنی، توابعی به‌صورت زیر هستند:

$$\mu_(A \cap B)(x) = S(\mu_A(x),\mu_B(x)). \tag{۱۸.۱}$$

و

$$\mu_(A \cup B)(x) = T(\mu_A(x),\mu_B(x)). \tag{۱۹.۱}$$

بونیس سون و دکر نشان دادند که برای عملگرهای مناسبی مانند عملگر متمم برای مجموعه‌های فازی که با $\zeta(\mu_A(x)) = 1 - \mu_A(x)$ تعریف می‌شود، t -نرم T و s-نرم S در قوانین دمورگان[۱]صدق می‌کند. یعنی بین t-نرم‌ها و s-نرم‌ها یک رابطه منطقی دوگان به‌صورت زیر برقرار است:

$$T(a,b) = 1 - S(1-a,1-b), \tag{۲۰.۱}$$

$$S(a,b) = 1 - T(1-a,1-b), \tag{۲۱.۱}$$

[۱] De Morgan’s Laws

۵-۱ ترکیب رابطه‌های فازی

رابطه‌های فازی در فضاهای ضربی مختلف می‌توانند با یکدیگر توسط عملگر "ترکیب" ترکیب شوند. مدل‌های مختلف "ترکیب" پیشنهاد شده است که در نتایج و همچنین نسبت به ویژگی‌های ریاضی‌شان با هم تفاوت دارند. ترکیب ماکزیمم-مینیمم معروف‌ترین آن‌هاست و بارها مورد استفاده قرار گرفته است. هرچند اغلب ترکیب‌هایی که ماکزیمم-ضربی[1] یا ماکزیمم-میانگین [2] نامیده می‌شود، منجر به نتایجی که مطلوب‌ترند، می‌شوند.

تعریف ۱-۵.۱. [۲۷] فرض کنید $R_1(x,y)$، $(x,y) \in X \times Y$، $R_2(y,z)$، $(y,z) \in Y \times Z$ دو رابطه فازی باشند. ترکیب ماکزیمم-مینیمم R_1 و R_2 مجموعه فازی زیر است:

$$R_1 \circ R_2 = \{[(x,z), max_Y\{min\{\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(y,z)\}\}] | x \in X, y \in Y, z \in Z\}. \tag{۲۲.۱}$$

یک تعریف کلی‌تر از ترکیب، ترکیب ماکزیمم- $*$ است که به‌صورت زیر می‌باشد.

تعریف ۱-۵.۲. [۲۷] فرض کنید R_1 و R_2 به‌صورت تعریف (۱-۵.۱)، تعریف شده باشند. ترکیب ماکزیمم- $*$ برای دو رابطه R_1 و R_2 به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_1 o R_2 = \{[(x,z), max_Y\{\mu_{R_1}(x,y) * \mu_{R_2}(y,z)\}\}] | x \in X, y \in Y, z \in Z\}. \tag{۲۳.۱}$$

اگر $*$ یک عملگر شرکت پذیر باشد که نسبت به هر مولفه آن یکنوای نانزولی باشد، آنگاه ترکیب ماکزیمم- $*$ در اصل مشابه با ترکیب ماکزیمم-مینیمم است.

عملگرهای فوق هر یک در زمینه‌ای خاص کارایی دارند و متناسب با نحوه عمل بشری در آن زمینه است. این‌که در هر زمینه چه نوع عملگری بهتر است به ملاک و معیارهای ما بستگی دارد. از لحاظ ریاضی و منطقی، داشتن یک پایه اصل موضوعی حایز اهمیت است. اما از لحاظ عملی و کاربردی نیز باید نکاتی مانند سازگاری با شرایط مساله، کارایی محاسباتی، به موفقیت درآوردن برازش‌های عملی و تجربی را باید در نظر گرفت.

[1] Max-Product

[2] Max-Ave