به نام خدای

قادر احدی که رضایش تمنای دل طاهران است،

همانی که دل عارفان اسیر کمند نظرش می باشد.

۱۲۸۸۸۵

دانشگاه شهید بهشتی
دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی‌ارشد آموزش ریاضی

استدلال متبحرانه درباره اعداد گویا

پژوهشگر

عادل بالاپورکورعباسلو

استاد راهنما

دکتر احمد شاهورانی

استاد مشاور

دکتر امیرحسین اصغری

تابستان ۱۳۸۸

تقدیم به امام زمان (عج)

تقدیر و تشکر

بر خود لازم می‌بینم از پدر و مادر مهربانم که با دعاها و محبت‌های خود کمال همراهی را برای به ثمر رسیدن این اثر انجام دادند، قدردانی نمایم.

از برادران و خواهران عزیزم به خصوص کیوان که در مراحل مختلف برنامه‌ریزی و تدوین پایان‌نامه نهایت مساعدت و همکاری را با برادرشان داشتند، صمیمانه سپاسگذاری می‌کنم.

از مدیر و عوامل اجرایی و دانش‌آموزان مدرسه شهید بهشتی شهر اصلاندوز که در انجام مصاحبه پژوهشی، همکاری لازم را داشتند، تشکر می‌نمایم.

و در پایان از اساتید عزیزم آقایان دکتر شاهورانی و دکتر اصغری و خانم دکتر گویا که در طول دوره کارشناسی‌ارشد و تهیه این پایان‌نامه از راهنمایی و مشاوره و نظرات ارزشمند آنها استفاده نموده‌ام، تشکر و قدردانی می‌کنم.

دانشگاه شهید بهشتی

«بسمه تعالی»

«صورتجلسه دفاع از پایان نامهٔ دانشجویان دوره کارشناسی ارشد»

تهران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین
تلفن: ۲۹۹۰۱

بازگشت به مجوز دفاع شماره **۹۷۲۴/ ۲۰۰/د** مورخ **۸۸/۶/۲۳** جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان‌نامه آقای **عادل بالاپور کورعباسلو** به شماره شناسنامه **۱۳** صادره از **حوزه ۳ مقان** متولد **۱۳۶۳** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد پیوسته آموزش ریاضی

با عنوان:

استدلال متبحرانه درباره اعداد گویا

به راهنمایی:

آقای دکتر احمد شاهورانی

طبق دعوت قبلی در تاریخ **۸۸/۶/۲۲** تشکیل گردید و بر اساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمرهٔ ۱۷/۷۵ (هفده و هفتاد و پنج) با درجه بسیار خوب مورد تصویب قرار گرفت.

	مرتبه علمی	نام دانشگاه
۱- *استاد راهنما:* آقای دکتر احمد شاهورانی	استادیار	شهید بهشتی
۲- *استاد مشاور:* آقای دکتر امیرحسین اصغری	استادیار	شهید بهشتی
۳- *استاد داور:* خانم دکتر زهرا گویا	دانشیار	شهید بهشتی
۴- *استاد داور:* آقای دکتر اسمعیل بابلیان	استاد	تربیت معلم
۵- مدیر گروه: آقای دکتر سهرابعلی یوسفی	دانشیار	شهید بهشتی

چکیده

هدف این مطالعه، سنجش شناخت و آگاهی دانش‌آموزان نسبت به ویژگی‌های تساوی و ترتیب اعداد گویا بود. با توجه به پیچیدگی‌های خاص نمایش کسری اعداد گویا، تمرکز این پژوهش به روی استدلال دانش‌آموزان درباره نمایش کسری اعداد گویا قرار گرفت. ۳۱ دانش‌آموز از دوره متوسطه، چهار تکلیف را حل نمودند که برای سنجش شناخت و آگاهی آنها از تساوی و ترتیب کسرها طراحی شده بودند. از بین این دانش‌آموزان ۱۷ دانش‌آموز با توجه به معیاری که تعریف شده بود، متبحر شناخته شدند. بعد از انتخاب گروه متبحر، تحلیل مفصل راه‌حل‌های آنها، بر اساس چهار دیدگاه مربوط به اعداد گویا انجام گرفت: روابط کل- جزء درون شکل‌ها و واحدهای افراز شده، روابط بین مؤلفه‌های عددی (صورت و مخرج‌ها)، موقعیت‌های مکانی نسبت به اعداد مرجع مشهور، و تبدیل کردن به قالب‌های عددی معادل.

نتایج این تحلیل، دیدگاهی را مورد تردید قرار می‌دهد که استدلال عددی متبحرانه را متکی به یادگیری چند روش عمومی از طریق آموزش و به کار بردن سازگارانه آنها برای حل مسایل می‌داند. بر اساس این نتایج، استدلال متبحرانه به پایه شناختی متنوع و غنی‌تری که راهبردهای خلاقانه و ویژه عددی را در بر می‌گیرد، به همان اندازه راهبردهای عمومی آموخته‌شده از طریق آموزش، وابسته است. این راهبردهای خلاقانه با حل مسایل، به طور زیادی رابطه داشته و قابل کاربرد هستند.

نتایج همچنین نشان می‌دهند که اغلب دانش‌آموزان متبحر به راهبردهای عمومی تأکید شده در مدرسه متکی نیستند (برای مثال: تبدیل به مخرج مشترک). اغلب اوقات آنها راهبردهایی را که برای دسته محدود شده‌ای از کسرها مناسب هستند، به کار می برند (برای مثال: کسرهایی با صورت مساوی) و راه‌حل‌هایی سریع و معتبر با حداقل کوشش محاسباتی ارایه می‌کنند. تحلیل کتاب‌های درسی حکایت از این دارد که بیشتر این راهبردها، دستاورد خلاقیت دانش‌آموزان هستند. همچنین اغلب دانش‌آموزان متبحر، راهبردهای عمومی را به عنوان آخرین چاره، هنگامی که یک راهبرد ویژه مناسب نمی‌توانند پیدا کنند، مورد استفاده قرار می‌دهند.

فهرست

فصل اول

کلیات تحقیق

۱-۱ معرفی مسأله اصلی پژوهش

زمانی‌ابیانه (۱۳۸۶) به نقل از هاشمیان‌نژاد (۱۳۸۰) بیان می‌کند که "تحقیقات شورای ملی برای تعالی در آموزش تفکر نقاد[۱] (NCECT) نشان دهنده آن است که هر چه در مراحل سنی پایین‌تر حساسیت ذهنی کودکان را نسبت به ملاک‌های استاندارد تفکر و تعقل منطقی و صحیح برانگیزیم، روش‌ها و نگرش‌های عقلانی مورد نظر در آنها بهتر توسعه یافته و به افراد آزاد اندیشی تبدیل می‌شوند که در مقابل مسائل عقلانی از خود واکنش نشان خواهند داد" (ص ۱۸۹).

از طرف دیگر به اعتقاد راس[۲] (۲۰۰۰)، استدلال [۳] تنها یک مهارت ریاضی نیست بلکه مهارتی بنیادی است و به همین جهت او تأکید می‌کند که معلم‌ها باید به ریاضی به عنوان یک موضوع درسی زنده مهیج و پرشور که نقش اساسی در آموزش مدرسه‌ای تک‌تک دانش‌آموزان دارد، نگاه کنند تا آنها به ماهیت نظری ریاضی که هم بسیاری از موقعیت‌ها را به صورت آرمانی تبدیل می‌کند و هم تفسیرهای کاربردی از مفاهیم مجرد می‌سازد، توجه کنند.

۱- National Council for Excellence in Critical Thinking Instruction

۲- Ross ۳- reasoning

در عین حال به اعتقاد شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا[1] (NCTM- ۲۰۰۰) استدلال ریاضی و اثبات روش‌هایی قدرتمند در جهت توسعه درک افراد از بسیاری از پدیده‌ها هستند و در حقیقت افرادی که خوب استدلال کرده و یا تجزیه و تحلیل فکر می‌کنند، قادر خواهند بود که الگوها و نظم‌های جهان واقعی و نیز دنیای نمادین ریاضی را به خوبی درک کرده و بیابند.

بنابراین با توجه به اهمیت موضوع استدلال، مطالعه حاضر تلاش می‌کند تا ضمن پرداختن به مقوله استدلال در زمینه اعداد گویا، به کمک یافته‌های پژوهشی انواع مهارت‌های استدلالی مورد نیاز برای این زمینه را در سطح ریاضیات مدرسه‌ای شناسایی نموده و چگونگی پرداختن به این مهارت‌ها را در کتاب‌های درسی و نحوه به کارگیری آنها توسط دانش‌آموزان متبحر را مورد بررسی قرار دهد.

۱- ۲ اهمیت و ضرورت مسأله

کرمیان (۱۳۸۶) به نقل از رامبرگ[2] (۱۹۹۴) بیان کرده است که گزارش شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM) با عنوان « استاندارد‌های برنامه درسی و ارزشیابی برای ریاضیات مدرسه‌ای[3]» تأکید دارد که سواد ریاضی چیزی بیشتر از آشنایی با اعداد و حساب است و منظور از سواد ریاضی با پنج هدف کلی برای دانش‌آموزان روشن شده است:

- تمام دانش‌آموزان باید یاد بگیرند تا برای ریاضی ارزش قایل شوند. یعنی از تکامل و نقش آن در جامعه و علوم آگاه گردند.

۱- National Council of Teachers of Mathematics ۲- Romberg

۳- Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics

- نسبت به قابلیت‌های خود در انجام کار ریاضی مطمئن شوند. یعنی با تکیه بر تفکر ریاضی، توانایی فهمیدن موقعیت‌ها و حل مسایل را داشته باشند.
- بتوانند مسایل ریاضی را حل کنند. زیرا عامل اصلی برای یک شهروند خلاق شدن، داشتن تجربه در حل کردن مسایل غیر روتین و بسط داده شده است.
- از طریق یادگیری علامت‌ها، نمادها و عبارت‌های ریاضی بتوانند ارتباط ریاضی‌وار برقرار کنند.
- با حدسیه‌سازی، گردآوری شواهد و تولید احکام ریاضی، بتوانند ریاضی‌وار استدلال کنند.

از طرفی، دیدگاه‌های نوین آموزش ریاضی بر این امر تأکید دارند که انتقال منفعلانه مفاهیم و مهارت‌های ریاضی توسط معلمان، یادگیری معناداری برای فراگیران به همراه ندارد و هرگز موجب رشد و پویایی تفکر آنها نخواهد شد، بلکه این فراگیران هستند که با مشارکت فعال خود در عرصه آموزش و یادگیری ریاضی بر مبنای دانش و تجربه های پیشین خود، ریاضیات را امری قابل فهم و لذت بخش می‌سازند.

در عین حال دانش ریاضی هم دانش مفهومی و هم دانش رویه‌ای را در بر می‌گیرد و لذا موفقیت در ریاضیات هم نیازمند فراگیری الگوریتم‌ها و هم محتاج فهم درست مفاهیم است. از منظر یادگیری ریاضی، این پرسش که چگونه می‌توان ایده‌های رویه‌ای را به یکدیگر متصل کرد، بسیار مهم‌تر از خود رویه‌هاست (کرمیان، ۱۳۸۶ به نقل از هیبرت[۱] و کارپنتر[۲]، ۱۹۹۲).

۱- Hiebert   ۲- Carpenter

بنابراین دانش‌آموزان باید بدانند که با وجود این که بخشی از کارهایی که انجام می‌دهند، مکانیکی است ولی قسمت عمده ریاضیات چالش برانگیز بوده و نیازمند استدلال و تفکر می‌باشد. از طرفی وقتی دانش‌آموزان مهارت‌ها را در راستای گسترش فهم و درک خود یاد می‌گیرند، نه تنها درکشان بالا می‌رود بلکه تسلط بر مهارت‌ها هم برای آنها آسان‌تر می‌شود ([۱۳]، صص۱۰و۱۱).

ماسون و جانستون-ویدلر[۱] (۲۰۰۴) به نقل از فرودنتال (۱۹۹۱) بیان کرده‌اند که یادگیرنده باید به جای ریاضیات، ریاضی ورزیدن[۲]؛ به جای تجریدها، مجردسازی[۳]؛ به جای طرحواره‌ها[۴]، طرحواره‌سازی[۵]؛ به جای فرمول‌ها، فرمول‌بندی؛ به جای الگوریتم‌ها، الگوریتم‌سازی و به جای زبان، به کلام آوردن را تجربه کند (ص۲۲۳).

و از سویی با توجه به تأکیدات آموزشگران و نیز تحقیقات آموزشی بر لزوم توسعه مهارت‌های استدلالی در دانش‌آموزان و از سوی دیگر تأکیدات صورت گرفته بالا برای نقش فعال دانش‌آموزان در یادگیری خود و همچنین احساس نیازی که پژوهشگر به عنوان یک معلم برای دانش‌آموزان در زمینه اعداد گویا حس می‌کرد سبب شد تا درک عمیق‌تر استدلال دانش‌آموزان متبحر درباره اعداد گویا و بررسی مؤلفه‌های شناختی مربوط به آن به عنوان یک دغدغه پژوهشگر در آید. به همین سبب و در ادامه تلاش خود، سؤالات زیر را تدوین نمود تا هدایتگر وی در این تحقیق باشند.

۱-۳ سؤالات پژوهش

این پژوهش را دو سؤال ذیل هدایت نمودند :

۱- Mason & Johnston-Wilder ۲- mathematising ۳- abstracting ۴- schemas
۵- schematising

سؤال اول پژوهش: مهارت‌های استدلالی متبحرانه‌ی مربوط به ویژگی‌های ترتیب و تساوی اعداد گویا چه نسبتی با مسایل آموخته‌شده رسمی در کلاس دارند؟

سؤال دوم پژوهش: دانش‌آموزانی که در مسایل اعداد گویا متبحر هستند، چگونه به استدلال می‌پردازند؟

۱-۴ مخاطبان و استفاده‌کنندگان از پژوهش

آشنایی با مبانی نظری این پژوهش و تحلیل استدلال دانش‌آموزان متبحر دوره دبیرستان به همراه راهکارهای ارایه شده برای توسعه مهارت‌های مذکور برای سیاست گذاران، محققان، آموزشگران ریاضی و نیز مؤلفین کتاب‌های درسی ریاضی لازم به نظر می‌رسد.

علاوه بر این از آن جا که معلمان مجریان سیاست‌های آموزشی هستند، آشنا شدن آنها با چنین تحقیقاتی که در آنها استدلال‌های دانش‌آموزان دقیق‌تر و موشکافانه‌تر مورد بررسی قرار گرفته‌اند موجب می‌شود تا نقش معلمی خود را بهتر ایفا کرده و در صورت نیاز با نوآوری‌های آموزشی همسویی بهتری پیدا کنند. پژوهشگر نیز در جریان این مطالعه با نکات ظریفی برخورد نمود که پیش از این به عنوان یک معلم کمتر به آنها توجه داشت و اکنون با دیدی دیگر به این موضوعات نگاه می‌کند.

و بالاخره از آنجا که برای رسیدن به یکی از اهداف اساسی آموزش یعنی توسعه مهارت‌های استدلالی در دانش‌آموزان، آگاهی و همراهی خود فراگیران ضروری است. شاید بتوان گفت که آشنا شدن دانش‌آموزان با بخش‌هایی از این پژوهش، می‌تواند موجب غنی‌تر شدن شناخت آنها از حوزه اعداد گویا شود.

۱–۵ تعریف واژگان کلیدی

۱–۵–۱ استدلال

استدلال مهارتی بشری است که جهت ارزیابی ایده‌ها و ادعاهای مختلف به کار می‌رود و استدلال ریاضی نوع خاصی از استدلال است که بر اساس شیوه‌های منطقی و مورد پذیرش ریاضی‌دانان بیان می‌شود.

زمانی‌ابیانه (۱۳۸۶) به نقل از وبستر[۱] (۱۹۸۲) استدلال را به عنوان توانایی تفکر مرتبط و منطقی و ترسیم نتایج یا استنباطها از میان حقایق مفروض یا آشنا معرفی می‌کند. به طور کلی استدلال ریاضی بخشی از فرایند تفکر ریاضی است و به همین دلیل نمی‌توان تعریف مشخصی از آن ارایه داد و وابسته به افراد، نوع تفکر آنها و برخی دیگر از سیاستها تعاریف متفاوتی از استدلال ریاضی توسط آموزشگران بیان شده است. به عنوان مثال راس[۲] (۲۰۰۰) "اساس ریاضیات" را استدلال می‌داند و یکی از مهم‌ترین اهداف تدریس ریاضی را آموزش استدلال منطقی به دانش‌آموزان معرفی می‌کند. او معتقد است که "اگر توانایی استدلال در دانش‌آموزی رشد نکرده باشد، ریاضیات برای او به مجموعه‌ای از رویه‌ها و مثال‌های تکراری فاقد تفکر این که چرا چنین هستند، تبدیل می‌شود "(صص ۳۲ و ۳۳).

به هر حال از شواهد تاریخی چنین به نظر می‌رسد که نیاز به دقت، استدلال را پدید آورده است و همان طور که شهریاری (۱۳۸۲) می‌گوید: پیشرفت داد و ستد کالا و صنعت سبب شد که هندسه و مفاهیم آن که برای اندازه‌گیری به کار می‌رفتند پیچیده‌تر شوند و نیاز به دقت، استدلال را پدید آورد. پس از آن مفهوم‌هایی که با تجربه به دست آمده بودند با منطق و استدلال توام شدند و دانشمندانی از یونان باستان

۱- Webster ۲- Ross

همچون تالس، دموکریت، اودکس، فیثاغورث، اقلیدس و دیگران، هندسه کاربردی پیش از خود را با منطق و استدلال همراه کردند و کم و بیش به صورت امروزی در آوردند (صص ۶۷ و ۶۸).

در اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای نیز شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا (NCTM – ۲۰۰۰) از استدلال به عنوان یکی از اصول اساسی آموزش ریاضیات مدرسه‌ای یاد می‌کند و آن را برای درک ریاضی ضروری می‌داند. در این استانداردها مثال‌هایی از انواع استدلال ریاضی بیان شده است.

۱-۵-۲ استدلال متبحرانه

هر تحلیل تجربی از استدلال متبحرانه، استانداردهایی برای قضاوت درباره آنچه که به عنوان تبحر شمرده می‌شود، نیاز دارد. رویکرد گرفته شده در این مطالعه، به کار بردن تکالیف– که نتایج مفهومی عمده در آن حوزه را استفاده می‌کرد– و تعریف کردن استانداردها برای عملکرد متبحرانه مربوط به این تکالیف، بود. تکالیف و ضوابط امتیازگیری در بخش روش تحقیق شرح داده می‌شوند، اما در اینجا به طور خلاصه تصور هدایت‌کننده‌ای از تبحر بیان می‌شود.

عبارت « متبحرانه» استفاده شده در این مطالعه با معنی روزمره آن تطابق دارد: مردم در یک زمینه از فعالیت متبحر هستند زمانی که آنها می‌توانند در آن زمینه ماهرانه کار کنند. تبحر درباره اعداد گویا، بوسیله عملکرد ماهرانه از روی دسته‌ای از موقعیت‌های تکلیفی که ویژگی‌های عمده ریاضیاتی‌شان را در بر دارند، نشان داده شده است. به طور ویژه‌تر، عملکرد متبحرانه به توانایی حل کردن هر دو نوع مسایل جدید و آشنا و هم پرداختن به همه کسرها و اعداد اعشاری که ممکن است در آن زمینه‌ها نمایان شوند، نیاز دارد. همچنین آن عملکرد درباره ساختار ریاضیاتی نهفته آن حوزه، بینشی اساسی طلب می‌کند. چنین دانش عمیقی برای حمایت از تصحیح خطا، برای ایجاد دانش جدید و برای احیا کردن آنچه که فراموش

شده است، ضروری می‌باشد. اما به عملکرد بی نقص نیاز ندارد. مردم در همه سطوح فهم و مهارت دچار اشتباه می‌شوند؛ آنهایی که متبحر هستند به سادگی اشتباه‌های کمتری انجام می‌دهند و از آنها سریع‌تر خلاص می‌شوند. این تعبیر از تبحر عددی به طور مستقیمی بر ساختار مفهومی حوزه‌های عددی خاص تاکید می‌کند.

۱-۵-۳ کسر و عدد گویا

به علت رابطه نزدیک بین کسرها و اعداد گویا، این عبارت‌ها اغلب به جای هم استفاده می‌شوند که سبب اشتباه احساسی می‌شود. برای هماهنگی در این پژوهش، « کسر» در زمینه هایی که شامل نمادهای عددی ویژه می‌شوند، (مانند $\frac{۸}{۱۱}$) استفاده خواهد شد. عبارت « عدد گویا» در بحث‌هایی از روابط عددی استفاده خواهد شد که به وسیله کسرهای ویژه اما بسیار کلی‌تر نمایش داده می‌شوند.

فصل دوم

مبانی نظری و ادبیات موضوع

۲-۱ مقدمه

در حال حاضر موضوع اعداد گویا، چه نمایش داده شده به صورت کسر و چه نمایش اعشاری، یک موضوع اصلی در ریاضیات مدرسه‌ای می‌باشد که بیشتر دانش‌آموزان حتی با یادگیری اساسی‌ترین ویژگی آنها مشکل دارند. ارزیابی‌های ملی دستاورد[۱] ریاضیاتی، به طور هماهنگی عملکرد ضعیف با کسرها و اعداد اعشاری را بخصوص در قیاس با تکالیف مشابه با اعداد کامل، برجسته کرده اند (کوربیت[۲]،۱۹۸۱؛ کوبا[۳] و همکاران،۱۹۸۸؛ ارزیابی ملی از توسعه آموزشی[۴] [NAEP]،۱۹۸۳؛ پست[۵]،۱۹۸۱). آموزشگران، اعداد گویا را اگر سخت‌ترین موضوع نباشد، به عنوان یکی از موضوعات سخت، در ریاضیات ابتدایی برای تدریس و یادگیری برگزیده‌اند (ویلیامز[۶]،۱۹۸۴). این در حالی است که حتی آموزش آزمایشی به دقت طراحی شده نیز نتایج مختلفی به دنبال داشته اند (بهر[۷]، واچزموت[۸]، پست، و لش[۹]،۱۹۸۴؛ پست، واچزموت، لش،و بهر،۱۹۸۵). اگر چه کسرها و اعداد اعشاری هر دو برای دانش‌آموزان مشکلاتی را سبب می‌شوند، اما نمایش کسری اعداد گویا به طور ویژه مشکل‌آفرین می‌باشد (کوربیت،۱۹۸۱).

برخلاف لحن بدبینانه بیشتر تحقیقات درباره یادگیری اعداد گویا (بریت[۱۰]، بهر، پست، و واچزموت،۱۹۸۸؛ هارت[۱۱]،۱۹۸۱؛ هیبرت[۱۲] و ویرن[۱۳]،۱۹۸۶؛ پست، هارل[۱۴]، بهر، و لش،۱۹۸۸)، این مطالعه با توجه ویژه به دانش عددی نهفته در استدلال متبحرانه، برای شناسایی یادگیری موفق طراحی شده است.

۱- achievement ۲- Corbitt ۳- Kouba ۴- National Assessment of Educational Progress
۵- Post ۶- Williams ۷- Behr ۸- Wachsmuth ۹- Lesh ۱۰- Bright ۱۱- Hart ۱۲- Hiebert
۱۳- Wearne ۱۴- Harel

فراهم کردن گزارشات پایه‌ای به روش تجربی و روشن از استدلال متبحرانه در حوزه‌های پرمساله ریاضیات مدرسه‌ای، به طور شناختی کمک مهمی است که تحقیق جهت‌دار، برای آموزش ریاضی می‌تواند انجام دهد.

۲-۲ ویژگی‌های اصلی ترتیب و تساوی در اعداد گویا

اشکالات فراگیری که بیشتر دانش‌آموزان با کسرها تجربه می‌کنند، می‌تواند روی ویژگی‌های اعداد گویایی که آنها ارائه می‌دهند، بخصوص در چگونگی تفاوت داشتن اعداد گویا با اعداد طبیعی، اثر بگذارد. به دلیل اینکه اعداد طبیعی از لحاظ تاریخی، ریاضیاتی (در اغلب نمایش‌ها)، و روانشناسی بر اعداد گویا مقدم هستند، حساسیتی برای مقایسه ویژگی‌شان ایجاد می‌شود. دو ویژگی عددی اساسی، ترتیب[1] (کدام عدد از دیگری بزرگتر است؟) و تساوی[2] (کدام‌ها مساوی با دیگری هستند؟) می‌باشد. برای اعداد طبیعی، ترتیب و تساوی به طور «طبیعی» و واضح نمایان می‌باشد. هر عدد با شماره مجزایی نمادگذاری شده است. نماد ۲ به طور یکتا عدد دو را تعیین می‌کند و «تالی[3]» یکتایی دارد. این ویژگی‌ها، به اعداد طبیعی این امکان را می‌دهند که در ترتیبی با روال آشنایی از شمارش، فهرست شوند. برخی خاصیت‌های اساسی اعداد طبیعی به طور حسابی روی این ویژگی‌ها ساخته می‌شوند. جمع و ضرب عملیاتی هستند که به طور یکتا معین می‌شوند و دارای ویژگی افزایشی هستند؛ همچنین تفریق و تقسیم نیز به طور یکتا معین می‌شوند و دارای ویژگی کاهشی هستند.

۱- order ۲- equivalence ۳- successor

از منظر اعداد طبیعی می‌توان گفت که ترتیب و تساوی اعداد گویا خیلی متمایز و پیچیده‌تر به نظر می‌رسند. اعداد گویا نمی‌توانند به طور یکتا حتی در چارچوب نمایش کسرها نمادگذاری شوند. هر عدد گویا با تعداد نامتناهی قالب عددی هم‌ارز بیان می‌شود. اگر چه کسرهای $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۸}{۱۲}$ مختلف به نظر می‌رسند، ولی آنها عدد گویای یکسانی (دو سوم) را نمایش می‌دهند. هر عدد گویا یک مجموعه نامتناهی از کسرهای هم‌ارز می‌باشد: مجموعه $\left\{\frac{۲}{۳}،\frac{۴}{۶}،\frac{۶}{۹}،\frac{۸}{۱۲}،...\right\}$، «مجموعه هم‌ارزی» برای دو سوم می‌باشد. این رابطه‌ی چند به یک بین کسرهای عددی و اعداد گویا که آنها را پشت سر هم نشان می‌دهد، قضاوت کردن درباره ترتیب را پیچیده می‌کند. اعداد گویا در خاصیت چگال صدق می‌کنند: برای هر دو عدد گویای مجزا، تعداد نامتناهی عدد گویای مختلف بین آنها وجود دارد. به علت وجود نداشتن « تالی» و یا همان عدد گویای « بعدی»، فهرست کردن مرتب اعداد گویا به طور قابل ملاحظه‌ای پیچیده‌تر می‌باشد. می‌توان مجموعه اعداد گویا را با یک رابطه ترتیبی دیگر به غیر از رابطه ترتیبی معمولی آن، به طور منظم و کامل مرتب کرد و چگونگی امکان این مرتب کردن را جورج کانتور[۱] نشان داده است (بویر[۲]،۱۹۹۱).

پیچیدگی افزایش‌یافته مربوط به تشخیص ترتیب و تساوی در میان کسرها، موجب می‌شود که تکالیف کسری مشکل‌تر باشند. در عین حال به این علت که مؤلفه‌های کسرها از اعداد طبیعی می‌باشند، آگاهی‌های موجود دانش‌آموزان از اعداد طبیعی، آنها را به مشکلات مفهومی زیادی سوق می‌دهد. بعضی کسرها بزرگتر «دیده می‌شوند» اما کوچکتر از دیگری می‌باشند ($\frac{۱}{۲}<\frac{۳}{۷}$)؛ یکی بزرگتر یا کوچکتر از دیگری به نظر می‌رسد اما مساویند ($\frac{۶}{۹}=\frac{۴}{۶}$) و بعضی نیز به نظر می‌رسد « درست بعد از» دیگری باشد،

۱- Georg Cantor ۲- Boyer