دانشگاه پیام نور مشهد

عنوان پایان نامه:

نتایجی روی زیر مدول های اول و اولیه از مدول ها روی حلقه ی جابه جایی

استاد راهنما:

جناب آقای دکتر سعید رجایی

نگارش:

نسرین چکنه

شهریور ۹۰

چکیده

تعمیم مفهوم ایده آل های اول از رسته ی حلقه ها به زیر مدول های اول از رسته ی مدولها مولفین مقالات در این مبحث را تهییج کرد تا به تعمیم روابط و قضایای مربوط به ایده ال های اول به زیر مدول های اول بپردازند.در این پایان نامه به بررسی بعضی از این روابط و قضایا می پردازیم. در سراسر این پایان نامه حلقه ها جا به جایی و یکدار و مدول ها یکانی می باشند.

کلمات کلیدی:

زیر مدول های اول، رادیکال یک زیر مدول، دامنه ددکیند، دامنه پروفر، مدول های آزاد، موضعی سازی.

فهرست مطالب

پیشگفتار ۱

فصل اول: تعاریف و نمادگذاری ۳

۱-۱ تعاریف ومفاهیم اولیه ٤

۲-۱ تعاریف مربوط به مدول ها و زیر مدول ها ۱۰

فصل دوم: زیر مدول های اول واولیه ۱۹

۱-۲ بررسی شرایطی معادل با اول بودن یک زیر مدول ۲۰

۲-۲ بررسی غیر تهی بودن طیف یک مدول غیر صفر ۲٦

فصل سوم: زیر مدول اول در مدولهای کسری و مدول های آزاد ٤۳

۱-۳ بررسی $Spec(M), Spec(M_S)$ ٤٤

۲-۳ بررسی شرایط عدم تساوی N_S و M_S ٤۷

۳-۳ زیر مدول های اول از مدول های آزاد ۵۵

٤-۳ زیر مدول دوری از مدول آزاد $R^{(n)}$ ٦۷

فهرست علایم ۷۸

واژه نامه انگلیسی به فارسی ۷۹

واژه نامه فارسی به انگلیسی ۸٤

منابع ۸۷

پیشگفتار

از حدود سال ۱۹۸۰ به بعد شاخه ای از جبر بنام زیر مدول های اول از رسته ی مدول ها ظهور پیدا کرد. دانشمندان زیادی در این زمینه به پژوهش و تحقیق و ارائه مقالات پرداختند. یکی از دلایل گسترش چشمگیر این شاخه از جبر در حقیقت این است که مفهوم زیر مدول های اول تعمیم ایده آل های اول است لذا پژوهشگران همواره سعی کردند قضایای مربوط به ایده آل های اول را به زیر مدول ها اول تعمیم دهند یا با گذاشتن شرایطی بر روی مدول ها زمینه را برای برقراری این قضایا فراهم سازند.

در این پایان نامه که مشتمل بر سه فصل است، به نتایجی از زیر مدول های اول و اولیه می پردازیم. از آن جا که بحث در رابطه با زیر مدول های اول نیازمند مفاهیم اولیه در مباحث حلقه، ایده آل، مدول و زیر مدول است لذا فصل اول این پایان نامه به این مفاهیم و قضایا اختصاص دارد.

در فصل دوم با زیر مدول های اول واولیه یک مدول آشنا می شویم، سپس شرایطی که یک زیر مدول، اول شود را بررسی می نمائیم. در ادامه خواهیم دید اگرچه یک حلقه ی غیر صفر R همواره $Spec(R) \neq \varnothing$ و $Max(R) \neq \varnothing$ اما با ارائه مثال هایی خواهیم دید رفتار مدول ها این گونه نیست پس به دنبال مدول های غیر صفر خواهیم بود که طیف غیر تهی دارند.

در پایان همین فصل حلقه ای که مدول بر روی آن تعریف شده به قلمرو صحیح، دامنه ی پروفر، دامنه ی ددکیند تغییر داده و شرایط اول شدن یک زیر مدول را بر روی آن ها بررسی می کنیم.

در فصل سوم زیر مدول های اول یک مدول کسری را بررسی می کنیم و تناظری۱-۱ بین زیر مدول های $p-$ اول یک مدول M و زیر مدول های p_S- اول از مدول M_S می یابیم. سپس شرایطی را بررسی می کنیم که هسته ی یک همریختی غیر صفر اول شود. در ادامه با گرفتن Rبه عنوان قلمرو صحیح و Kبه عنوان میدان کسرهای قلمرو صحیح R نقش میدان کسرهای R در پیدا کردن زیر مدول های اول را پیدا می کنیم و در پایان، بحث زیر مدول های اول را به مدول های آزاد و در نهایت به مدول های آزاد متناهی مولد خواهیم برد.

فصل اول

تعاریف و نماد گذاری

مقدمه:

این فصل مشتمل بر دو بخش است که در بخش ۱–۱ مفاهیم و تعاریف مقدماتی نظریه ی حلقه ها مورد بررسی قرار می گیرد. تعاریف و نمادهایی که در این بخش ذکر شده عموماً بر اساس کتاب گام هایی در جبر تعویض پذیر رودنی شارپ[۱] و کتاب جبر توماس هانگر فورد[۲] می باشد.

بخش ۱–۲ آن به بیان مفاهیم، تعاریف و قضایا در مورد مدول ها، زیر مدول ها و زیر مدول های اول و اولیه می پردازد.

Rodney Sharp1-

2-Thomas Hunger Ford

۱-۱تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱-۱-۱

اگر I یک ایده آل از حلقه ی R باشد، اشتراک تمام ایده آل های اول P شامل I را**رادیکالایدهآل** I گویند و با $\sqrt{I}$ نمایش می دهند. نماد $rad_R I$یا به اختصار $rad\ I$نماد دیگری برای $\sqrt{I}$ می باشد.

هرگاه مجموعه ی ایده آل های اول شامل I تهی باشد آن گاه $rad\ I = R$ است.

قضیه ۱-۱-۲

هرگاه I ایده آلی در حلقه ی تعویض پذیر Rباشد آن گاه

$$\sqrt{I} = \left\{ r \in R \,\middle|\, r^n \in I ,\ \exists n \in N \right\} = \bigcap_{P \in Var(I)} P = \bigcap_{P \in Spec(R), P \supseteq I} P$$

کــــه در آن $Spec(R)$مجموعــــه ی همــــه ی ایــــده آل هــــای اول حلقــــه ی Rو $Var(I) = \{P \in Spec(R) | P \supseteq I\}$ می باشد.

اثبات:[*۱٤، لم ۱-۲-۱٤*]

تعریف۱-۱-۳

رادیکال پوچ از حلقه ی R، که با $N(R)$ نمایش داده می شود عبارت است از اشتراک همه ی ایده آل های اول حلقه ی R یعنی

$$N(R)=\sqrt{0}=\{a\in R \mid \exists n\in N, a^n=0\}=\bigcap_{P\in Spec(R)} P$$

تعریف ۱-۱-٤

فرض کنیم Q یک ایده آل سره از حلقه ی R باشد آن گاه Q***ایده آل اولیه*** است هرگاه

$$:ab\in Q \Rightarrow a\in Q \;\; \forall a,b\in R \text{ یا } b\in\sqrt{Q}$$

تعریف ۱-۱-٥

فرض کنیم Rقلمرو صحیح باشد. عضو $p\in R$ را ***عضو تحویلناپذیر*** R می گوییم اگر

الف) $p\neq 0$ و p وارونپذیر نباشد.

ب) هرگاه p به صورت $p=ab$ با $a,b\in R$ نوشته شود آن گاه a یا b یک عضووارون پذیر R باشد.

تعریف ۱-۱-٦

فرض کنید Rقلمرو صحیح باشد. R***دامنه ی تجزیه ی یکتا*** (به اختصار[1] UFD) است اگر

الف) هر عضو نا صفر وارون ناپذیر R را بتوان به صورت $p_1p_2\dots p_s$ نوشت، که در آن p_1، ⋯، p_s عضوهایی تحویل ناپذیر از Rهستند.

ب) هرگاه $s,t \in \mathbb{N}$ و p_1، ⋯، p_s، q_1، ⋯، q_t عضوهایی تحویل نا پذیر از R باشند، که

$$p_1p_2\dots p_s = q_1q_2\dots q_t$$

آن گاه $s = t$ و عضوهای وارون پذیری چون $u_1,\dots,u_s \in R$ وجود داشته باشند، که پس از شماره گذاری مجدد مناسب q_iها داشته باشیم که $p_i = u_iq_i$ به ازای هر $i = 1,\dots,s$.

تعریف ۱–۱–۷

فرض کنید Rقلمرو صحیح و $p \in R$ باشد. p***عضو اول*** Rاست، اگر p عضو ناصفر و وارون ناپذیری از R باشد که هرگاه $a,b \in R$و $p \mid ab$آن گاه $p \mid a$ یا $p \mid b$.

یادآوری می کنیم که هر عضو اول قلمرو صحیح تحویل ناپذیر است و در هر UFD هر عضو تحویل ناپذیر اول است.

تعریف ۱–۱–۸

---

*Unique factorization domain*1-

فرض کنیم $\sum$ یک مجموعه نا تهی باشد، رابطه $\le$ را روی $\sum$ یک ***رابطه ی ترتیب جزئی***می نامیم هرگاه انعکاسی و متعدی و پاد متقارن باشد. $\sum$ را با رابطه ی ترتیب جزئی $\le$ در نظر می گیریم. عضوی از $\sum$ مثل a را ***عضو ماکسیمال*** $\sum$ می نامیم هرگاه به ازای هر عضو از $\sum$ مثل c ، اگر $a \le c$ آن گاه $c = a$. عضوی از $\sum$ مثل d را ***کران بالا***ی زیر مجموعه ی نا تهی Λ از $\sum$ می نامیم هر گاه به ازای هر عضو از Λ مثل b ، $b \le d$.

زیر مجموعه ای مثل Λ از $\sum$ را ***زنجیر***[1] می نامیم هرگاه به ازای هر دو عضو از Λ مثل b_1 و b_2 همواره داشته باشیم $b_1 \le b_2$ یا $b_2 \le b_1$.

تعریف ۱-۱-۹

فرض کنیم S زیر مجموعه ی بسته ضربی از حلقه ی تعویض پذیر R باشد، رابطه ی هم ارزی $\sim$ را روی $R \times S$ به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\forall (a,s),(b,t) \in R \times S \ ; (a,s) \sim (b,t) \Leftrightarrow \exists \ u \in S \ ; u(ta - sb) = 0$$

مجموعه های رده های هم ارزی را با $S^{-1}R$ نمایش می دهیم و آن را ***حلقه ی کسرها***ی Rمی نامیم.$S^{-1}R$ تحت عمل های

$$\frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{ab}{st} \quad \text{و} \quad \frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}$$

Chain1-

حلقه ی تعویض پذیر است ،که عضو صفر آن $\frac{0}{1}$ و همانی ضربی آن $\frac{1}{1}$ است.

یک هم ریختی حلقه ای چون $f: R \to S^{-1}R$ وجود دارد، که به ازای هر $r \in R$ ، $f(r) = \frac{r}{1}$ است. این همریختی را همریختی حلقه ای طبیعی می نامیم.در حلقـه ی کسـرها غالبـاً میـدان بـه دست نمی آوریم، بلکه در حالت کلی حلقه ی کسرهای Rرابدست می آوریم و ممکن است این حلقه مقسوم علیه های صفری داشته باشند که خود صفر نیستند.

دیگر آن که همریختی طبیعی حلقه ای لزوماً یک به یک نیست.

یک حالت خاص از حلقه ی کسرها زمانی به دست می آید که P یک ایده آل اول از حلقه ی R باشد و زیر مجموعه ی بسته ی ضربی S را متمم Pاز R یعنی $R \setminus P$ در نظرمی گیریم. حلقه ی کسرها یعنی $S^{-1}R$ حلقه ای شبه موضعی (تنها یک ایده آل ماکسیمال دارد.) است که با R_P نمایش داده می شود، که به این کار موضعی سازی R[1] در P می گویند.

ایده آل ماکسیمال حلقه ی موضعی R_P ، $m = \left\{ \frac{a}{s} \middle| a \in p \right\}$ است.

در حالت خاص اگر Rقلمرو صحیح و$S = R \setminus 0_R$ در نظر بگیریم

$$R_s = \left\{ \frac{a}{s} \middle| a, s \in R, \quad s \neq 0 \right\}$$

Localization1-

یک میدان بوده که به آن میدان کسرهای قلمرو صحیح R گوییم.

تعریف ۱-۱-۱۰

مجموعه ی همه ی مقسوم علیه های صفر از حلقه ی R را $Zd(R)$ گوییم یعنی

$$Zd(R) = \{a \in R \mid \exists\, 0 \neq b \in R,\ ab = 0\}$$

اگر $Zd(R) = 0$ آن گاه R قلمرو صحیح است.

تعریف ۱-۱-۱۱

بعد کرول یا بعد از حلقه ی R عبارت است از

$$\dim R = K.\dim(R) = Sup\{ht(p) \mid\ P \in Spec(R)\}$$

که در آن $ht(p)$ عبارت است از

$$ht(p) = Max\,\{n \mid P = P_0 \supset \ldots \supset P_n\ ;\ P_i \in Spec(R),\ 0 \leq i \leq n\}$$

و اگر R حلقه ی شبه موضعی با ایده آل ماکسیمال M باشد قرار می دهیم $\dim R = ht(M)$.

قضیه ۱-۱-۱۲

فرض کنید R، UFD و $P \in Spec(R)$ باشد آنگاه $ht(P)=1$ اگر و تنها اگر $P=Rp$ که در آن p عضو تحویل ناپذیری از R است.

اثبات: [۲۹،تمرین ۲۱.۱٤]

۱-۲ تعاریف مربوط به مدول ها و زیر مدول ها

تعریف ۱-۲-۱

هر R- مدولیکانی روی میدان، یک فضای برداری است.

تذکر ۱-۲-۲

چون در این پایان نامه، حلقه ی R تعویض پذیر است، پس هر حلقه ی بخشی یک میدان است بنابراین هر R- مدولیکانی روی یک حلقه ی بخشی R، یک فضای برداری است.

تعریف ۱-۲-۳

فرض کنید M یک R- مدول باشد. ***پایه ی*** M خانواده ای چون $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ از عضوهای M است که

۱) $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ مدول M را تولید کند.

۲) هر $m \in M$ به طور یکتا به صورت $m = \sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda e_\lambda$ قابل نمایش باشد، که در آن به ازای هر $\lambda \in \Lambda$ ، $r_\lambda \in R$ و تنها تعدادی متناهی از r_λ ها نا صفرند.

$R-$ مدول M را آزاد می گوییم، اگر پایه داشته باشد.

به عنوان مثال R خودش $R-$ مدول آزاد با پایه ای متشکل از عضو 1_R است. $R-$ مدولصفر، R $-$ مدول آزاد با پایه ای تهی است.

تذکر ۱-۲-٤ همانطور که در نظریه ی فضاهای برداری می توان با استفاده از پایه ها، نگاشت های خطی بینفضاهای برداری را به سهولت توصیف کردبا استفاده از پایه ی مدول آزاد F از حلقه ی R،نیز می توان $R-$ همریختی هایی از Fبه $R-$ مدول ها را به سهولت توصیف کرد.

تعریف ۱-۲-۵

فرض کنیم M یک $R-$ مدولو N زیر مدول M باشد داریم $(N:M) = \{r \in R \,|\, rM \subseteq N\}$

که $(N:M)$ یک ایده آل از حلقه ی Rاست.

همچنین داریم $Ann_R(M) = (0:M) = \{r \in R \,|\, rM = 0\}$که آن را ***پوچ ساز*** M [1]می نامیم.

همواره تساوی مقابل برقرار است $(N:M) = (0:\frac{M}{N}) = Ann(\frac{M}{N})$

1-*Annihilator*

$= \{ r \in$

$$= \{ r \in R \mid rm \in N \ ; \forall m \in M \} = (N : M) = \{ r \in R \mid rM \subseteq N \}$$

تعریف ۱-۲-۶

اگر M یک $R-$ مدولباشد و $Ann_R(M) = 0$ آن گاه M را $R-$ مدول ***وفادار***[1] گوییم.

تعریف ۱-۲-۷

فرض می کنیم M یک $R-$ مدول باشد. زیر مدول سره Nاز M را ***زیرمدول اول*** گوییم هرگاه

$$\forall r \in R, \ m \in M \ ; rm \in N \Rightarrow m \in N \ \text{یا} \ r \in (N : M)$$

تعریف ۱-۲-۸

مجموعه ی زیر مدول های اول M را که با $Spec(M)$ نمایش داده می شود ***طیف***[2] مدول M می نامیم.

تعریف ۱-۲-۹

Faithful1-

Spectrum2-

مجموعه ی زیر مدول های ماکسیمال M را با $Max(M)$ نمایش می دهند.

تعریف ۱-۲-۱۰

فرض کنیم N زیر مدول سره از R- مدول M باشد اگر

$$\forall r \in R,\ m \in M\ \ ; rm \in N \Rightarrow m \in N \ \text{یا}\ r^n \in (N:M)$$

$$\Rightarrow m \in N \ \ \text{یا}\ \ r \in \sqrt{(N:M)}$$

آن گاه N را ***زیر مدول اولیه*** ی M گویند.

تعریف ۱-۲-۱۱ فرض کنیم M یک R- مدولو N زیر مدولی از M باشد آن گاه اشتراک همهزیرمدولهایاول M شامل N را R- ***رادیکال*** N گویند و آن را با $rad_M(N)$ یا به اختصار با $rad(N)$ نمایش می دهند.

اگر زیر مدول اولی شامل N وجود نداشته باشد آن گاه $rad(N)=M$ قرار می دهیم.

تعریف ۱-۲-۱۲

$rad_M(0)$ را رادیکال اول M می نامیم.

تعریف ۱-۲-۱۳

زیر مدول N از مدول M را ***زیر مدول رادیکال*** گوییم اگر $rad_M(N)=N$ باشد .

تعریف ۱-۲-۱٤

فرض کنیم M یک $R-$ مدولو S یک زیر مجموعه ی بسته ی ضربی از R باشد. رابطه ی هم ارزی $\sim$ را روی $M\times S$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(m,s)\sim(m',s')\Leftrightarrow \exists t\in S\ ;\ t(sm'-s'm)=0$$

مدول کسرها را با $S^{-1}M$ یا M_S نمایش می دهیم که $M_S=\left\{\ \frac{m}{s}\Big|\ m\in M\ ,\ s\in S\ \right\}$

با اعمال $\frac{r}{s}\frac{m}{s'}=\frac{rm}{ss'}$ و $\frac{m}{s}+\frac{m'}{s'}=\frac{s'm+sm'}{ss'}$ یک R_S مدول است.

تعریف ۱-۲-۱۵

اگر M یک $R-$ مدولباشد آن گاه داریم $Zd_R(M)=\{r\in R\big|\ \exists 0\neq m\in M,\ rm=0\}$.

تعریف ۱-۲-۱٦

اگر R قلمرو صحیح و M یک R-مدول باشد، آن گاه داریم

$$T(M)=\{m\in M\ \big|\exists 0\neq r\in R\ ,rm=0\}$$

زیر مدولی از M است که به آن ***زیر مدول تابی*** M می گویند.

اگر $T(M)=M$ آن گاه M یک***مدول تابی*** است.

اگر $T(M)=0$ آن گاه M یک ***مدول بی تاب***[1]است.

تعریف ۱-۲-۱۷

اگر R یک قلمرو صحیح باشد، که در آن هر ایده آل را بتوان به صورت حاصل ضرب تعداد متناهی ایده آل اول نوشت R را ***دامنه ی ددکیند***[2] گویند.

بنابراین هر دامنه ی ایده آل اصلی یک دامنه ی ددکیند است، اما عکس آن برقرار نیست.

تعریف ۱-۲-۱۸

فرض کنیم R یک قلمرو صحیح با میدان خارج قسمتی K باشد. هر ***ایده آل کسری*** R ، مانند I یک $R-$ زیر مدولنا صفر از K است به طوری که به ازای عنصر نا صفری چون $a \in R$ داشته باشیم $aI \subset R$.

تعریف ۱-۲-۱۹

---

*Torsion –**free**1-*

Dedekind domain2-

ایده آل کسری I از قلمرو صحیح R***معکوس پذیر*** است، اگر به ازای ایده آل کسری چون J از R ، $IJ = R$باشد .

مثال ۱-۲-۲۰هر ایده آل اصلی نا صفر در قلمرو صحیح R معکوس پذیر است، اگر K میدان خارج قسمتی R

بوده و $I = (b)$ که در آن $b \neq 0$. فرض می کنیم $J = Rc \subset K$ که در آن $c = \frac{1_R}{b}$ در این صورت J ایده آل کسری R است به طوری که $IJ = R$است.

قضیه ۱-۲-۲۱

هرگاه R یک دامنه ی ددکیند باشد، آن گاه هر ایده آل اول ناصفر R معکوس پذیر و ماکسیمال است.

اثبات: [*۱۷، قضیه ی ٦-۵ فصل ۸*]

تعریف ۱-۲-۲۲اگر R یک قلمرو صحیح باشدکه در آن هر ایده آل با تولید متناهی معکوس پذیر باشد آن گاه R یک***دامنه ی پروفر***[1] است.

قضیه ۱-۲-۲۳

1- Prufer Domain

یک قلمرو صحیح R ، پروفر است اگر و تنها اگر هر R - مدولبا تولید متناهی و بی تاب M تصویری باشد.

اثبات: [۲۷ - قضیه ٤. ۳۲]

نتیجه ۱-۲-۲٤

هر دامنه ی ددکیند، دامنه ی پروفر نوتری است، که هر ایده آل اول ناصفر آن ماکسیمال باشد.

تعریف ۱-۲-۲۵

زیر مدول S از M را ***نیمه اول***[1] گوییداگر S اشتراکی از زیر مدول های اول M باشد،بنابراین $rad_M(S) = S$است.

تعریف ۱-۲-۲٦

اگر R یک دامنه ی تجزیه ی یکتا باشد؛ یک عنصر غیر صفر r از R***بدون مجذور***[2] نام دارد هرگاه عدد اول p وجود نداشته باشد به طوری که $r = p^2 s$که در آن $s \in R$ است.

Semiprime2-

Square – free2-