وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه فیزیک

پایان‌نامه مقطع کارشناسی ارشد
رشته فیزیک گرایش نظری- بنیادی

عنوان

مسائل محاسبات کوانتومی حل پذیر با استفاده از تحول آدیاباتیک

استاد راهنما
دکتر اسفندیار فیضی

استاد مشاور
دکتر یحیی اکبری

پژوهشگر
شکوه بلوری

تیر ماه ۱۳۸۹
تبریز– ایران

تقدیم به:

مادر و پدر عزیزتر از جانم که ،

دستم را گرفتند

و

پشتیبانم بودند .

تشکر و قدردانی

((پروردگارا،
به من آرامش ده، تا بپذیرم آنچه را که نمی‌توانم تغییر دهم؛
دلیری ده، تا تغییر دهم آنچه را که نمی‌توانم تغییر دهم؛
بینش ده، تا تفاوت این دو را بدانم؛
مرا فهم ده، متوقع نباشم دنیا و مردم آن مطابق میل من رفتار کنند.))

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که به ما هستی بخشید و همنشینی رهروان علم و دانش را نصیب ما کرد. اینک که در آستانه راهی نو می‌باشم، بر خود وظیفه می‌دانم تا از تمامی عزیزانی که راهگشای این پروژه بوده‌اند، تشکر و قدردانی نمایم. امید است که سپاس بی‌دریغ اینجانب را بپذیرند.
استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر اسفندیار فیضی که گنجینه‌های دانش خود را در نهایت صبوری و سخاوت در اختیار اینجانب قرار دادند و مرا در انجام این پروژه همراهی کردند.
جناب آقای دکتر یحیی اکبری که استاد مشاور اینجانب بودند.
جناب آقای دکتر آرش فیروزنیا که داوری این پروژه را پذیرفتند.
سایر اساتید محترم که در طول دوران تحصیلم افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام.
همچنین شاهد و شادی و وحیده عزیزم که همواره مشوق من بوده‌اند .
برای تمام این عزیزان، سربلندی و سلامتی و موفقیت در تمام مراحل زندگی آرزو می‌کنم.

شکوه بلوری

تیر ۱۳۸۹
تبریز—ایران

فهرست مندرجات

چکیده

اخیراً نظریه‌ی آدیاباتیک برای طراحی نوع جدیدی از الگوریتم‌های کوانتومی استفاده شده است ؛ جایی که کامپیوتر کوانتومی به اندازه‌ی کافی به آرامی تحول می یابد تااینکه نزدیک حالت پایه‌ی لحظه‌ای‌اش که منجر به جواب می‌شود، می‌ماند. در این پایان‌نامه برخی از الگوریتم‌های آدیاباتیک کوانتومی مانند الگوریتم آدیاباتیک کوانتومی برای جستجوی نامنظم و الگوریتم جستجوی آدیاباتیک برای مسائل منظم و تحول آدیاباتیک برای مسأله دوچ و دوچ – جوزا را مطالعه می کنیم .

واژه‌های کلیدی: محاسبات کوانتومی ؛ نظریه‌ی بی‌درروی کوانتومی ؛ الگوریتم‌های آدیاباتیک کوانتومی .

مقدمه

الگوریتم‌های کوانتومی در سال‌های اخیر توجه زیادی را به خود جلب کرده اند . چرا که برخی از الگوریتم های کوانتومی ، کارایی محاسبات را به مقدار زیادی افزایش داده اند بطور مثال : الگوریتم شُر [۱۶] ، الگوریتم گرور [۱۷, ۱۸] و . . . اخیراً نمونه‌ی جدیدی از محاسبات بر پایه‌ی تحول آدیاباتیک پیشنهاد شده است [۲۳] در الگوریتم آدیاباتیک کوانتومی حالت حافظه‌ی کوانتومی تحت یک هامیلتونین که بطور پیوسته و به آرامی تغییر می‌کند ، تحول می‌یابد . در شروع ، حالت سیستم در حالت پایه‌ی هامیلتونین اولیه است اگر هامیلتونین سیستم به اندازه‌ی کافی به آرامی متحول شود ؛ نظریه‌ی آدیاباتیک تضمین می‌کند که حالت نهایی سیستم ، حالت پایه‌ی هامیلتونین نهایی است . اگر ما جواب را در حالت پایه‌ی هامیلتونین نهایی رمزنگاری کنیم بعد از تحول آدیاباتیک کوانتومی با اندازه‌گیری ، حالت نهایی با احتمال بالا به جواب می‌رسیم . برخی از الگوریتم‌های کوانتومی ، با تحولات آدیاباتیک مجدداً تولید شده‌اند . در این پایان‌نامه به بررسی این الگوریتم‌ها می‌پردازیم . این پایان‌نامه از سه فصل تشکیل شده است : در فصل اول ابتدا مفاهیم محاسبات کوانتومی بیان شده است و در ادامه الگوریتم‌های کوانتومی دوچ [۱۳] ، دوچ – جوزا [۱۴] ، سایمون [۱۵] ، شُر [۱۶] و الگوریتم گرور [۱۷, ۱۸] بررسی می‌کنیم . در فصل دوم نظریه‌ی آدیاباتیک کوانتومی شده و به طریقی که در فصل بعدی استفاده خواهد شد اثبات خواهیم کرد و شرط آدیاباتیک را بدست خواهیم آورد . در فصل سوم الگوریتم‌های کوانتومی آدیاباتیک را معرفی می‌کنیم از تحول آدیاباتیک برای حل مسأله‌ی گرور (جستجوی نامنظم

)استفاده خواهیم کرد و در ادامه با استفاده از تودرتویی و تحول آدیاباتیک ، الگوریتمی را برای حل مسائل منظم و همچنین الگوریتم کوانتومی آدیاباتیک برای مسأله دوچ و دوچ – جوزا معرفی می‌کنیم .

فصل ۱

مروری برمحاسبات کوانتومی والگوریتم‌های کوانتومی

۱.۱ مقدمه

در چندین سال اخیر مطالعه‌ی سیستم‌های کوانتومی برنامه‌های جالبی را بدست داده است . از جمله اینکه سیستم‌های کوانتومی به‌جای اختراعات محاسباتی بکار برده می‌شوند .توانایی پردازش کوانتومی متکی به برخی از اصول و قوانین دنیای کوانتومی چون دامنه‌ی احتمال مختلط ، تداخل کوانتومی ، **توازی کوانتومی** [۱] ، **بهم‌تافتگی کوانتومی** [۲] و یکانی بودن تحول کوانتومی ،این نوع پردازش را از پردازش کلاسیک متفاوت می‌گرداند . کامپیوترهای کوانتومی به عنوان ابزار قدرتمند محاسباتی‌اند که توانایی اجرای کارهایی را دارند که برای کامپیوترهای کلاسیکی غیر ممکن است به همین خاطر این موضوع اکنون توجه تمام فیزیکدانان (چه نظری و چه عملی) و مهندسان را به خود جلب کرده است . این فصل از دو بخش تشکیل شده‌است : در بخش اول به بیان مفاهیم محاسبات کوانتومی که برای استفاده در طراحی الگوریتم‌های کوانتومی ، شبکه‌ها و پردازشگرها لازم هستند می‌پردازیم . در

[۱] Quantum Parallelism

[۲] Entangelement

بخش دوم الگوریتم‌های کوانتومی را معرفی خواهیم کرد و در ادامه الگوریتم گرور را به صورت جزئی‌تر بررسی می‌کنیم .

۲.۱ کامپیوتر کلاسیک

یک کامپیوتر کلاسیک ماشینی است که تعداد مشخصی از اطلاعات را می‌خواند و به صورت صفر و یک‌ها رمزنگاری کرده و محاسبات را انجام می‌دهد و در پایان خروجی اطلاعات را به صورت صفر ویک‌ها چاپ می کند.در کامپیوتر کلاسیک تمامی اطلاعات به شکل رشته‌ای از متغییرهای ۰ ,۱ ذخیره می شوند . پردازش داده‌ها از هر نوع که باشد چیزی نیست جز اعمال منطقی روی این رشته‌ها. هر متغییر دو حالته می تواند دو مقدار ۰ یا ۱ را اختیار کند که یک بیت نامیده می‌شود . اگر یک بیت را با متغییر x نشان دهیم یک رشته n بیتی به صورت $x_۰, x_۱, ..., x_{n-۱}$ خواهد بود . مجموعه تمام متغییرهای n بیتی را با B_n نشان می‌دهیم این مجموعه ۲^n عضو دارد که ارزش عددی آنها بین ۰ و $۲^n - ۱$ تغییر می‌کند گاهی از نماد $\{۰, ۱\}^n$ نیز استفاده می‌شود :

$$B_n = \{(x_۰, x_۱, ..., x_{n-۱}) \mid x_i \in \{۰, ۱\}\} \qquad (۱)$$

پردازش اطلاعات به صورت یک سلسله توابع پشت سر هم بر روی یک رشته‌ی ورودی با طول معین انجام می‌شود . این توابع را می‌توان با ترکیب توابع مقدماتی که تنها روی یک بیت یا دو بیت اثر می‌کنند ، ساخت . به این توابع مقدماتی گیت می‌گویند . مثل گیت‌های NOT, OR, AND, XOR

۳.۱ محاسبات کوانتومی وکامپیوترهای کوانتومی

توسعه‌ی تکنولوژی سایز کامپیوترها را کوچکتر و سرعت آنها را افزایش می‌دهد در حقیقت تنها راه برای افزایش سرعت کامپیوترها کاهش دادن سایزشان است . آیا محدودیتی در این مورد هست ؟

در اواخر ۱۹۷۰ و اوایل ۱۹۸۰ برخی از فیزیکدانان و دانشمندان کامپیوتر تشخیص دادند که اگر این فرایند با این سرعت ادامه یابد ، سرانجام دسته‌های مداری روی تراشه‌های سیلیکونی در مقیاس اتمی خواهد بود ؛ در این مقیاس ،اثرات کوانتومی آشکار می‌شود و فیزیک کلاسیک نمی‌تواند چنین سیستمی

را توصیف کند . **فاینمن** [۳] اولین کسی بود که اثرات مکانیک کوانتومی را بر روی محاسبات بیان کرد . او معتقد بود که پدیده‌های کوانتومی نمی‌توانند بطور مؤثر روی کامپیوترهای کلاسیکی شبیه‌سازی شوند . فاینمن چنین استدلال کرده بود که سیستم‌های مکانیک کوانتومی برای شبیه سازی کردن سیستم‌های مکانیک کوانتومی دیگر بسیار مجهزتر اند [۱۱,۱۲] . از این رو ماشین های مکانیک کوانتومی جهانی باید قادر باشند تا بطور کارآمد چنین شبیه‌سازی‌هایی را انجام دهند . در اواخر ۱۹۸۵ ، **دوچ** [۴] سعی کرد تا مکانیک کوانتومی و اصل **چالز – تورینگ** [۵] را باهم تطبیق کند[۱۳] . دوچ تشخیص داد که ادعای فاینمن منجر به هدف عمومی کامپیوترهای کوانتومی می‌شود . در مقاله‌ای که منتشر کرد نشان داد که هر فرایند فیزیکی در اصل می‌تواند به‌صورت کامل با کامپیوتر کوانتومی مدل داده شود . بعد از انتشار این مقاله جستجو برای کاربردهای جالب از چنین ماشینی شروع شد . در حالیکه هنوز خواص کامپیوترهای کوانتومی در حال پیشرفت است و **محاسبات کوانتومی** [۶] (QC) یک چالش بزرگ و در حال رشد در علم و تکنولوژی است . فرایند پردازش و قوانین حاکم بر پردازش اطلاعات بر پایه‌ی قوانین دنیای کوانتومی ، اساساً جدید و قدرتمندتر خواهد بود . بنابراین محدودیّت‌های متفاوتی نسبت به پردازش اطلاعات براساس قوانین فیزیک کلاسیک دارد و فراتر از این ، بنظر می‌رسد پردازش کوانتومی توانایی این را دارد که درک ما را از طبیعت عمیق‌تر کرده و وسیله‌ی قدرتمندتری برای ارتباطات و پردازش اطلاعات باشد . در عین حال مفاهیم اصلی و نظری مکانیک کوانتومی برای بدست آوردن روش‌ها وایده‌های بنیادی (QC) بسیار ساده ، زیبا و قدرتمند است .

۴.۱ کیوبیت

هدف محاسبات کوانتومی مطرح کردن متدهای ضروری برای حل مسائل ریاضیاتی است .محاسبات کوانتومی عیناً به‌صورت محاسبات کلاسیکی شامل ورودی ، محاسبات و خروجی است . در کامپیوترهای کلاسیکی هر نوع داده‌ای در بیت‌های کلاسیکی ذخیره می‌شوند ولی در این مورد از بیت

---

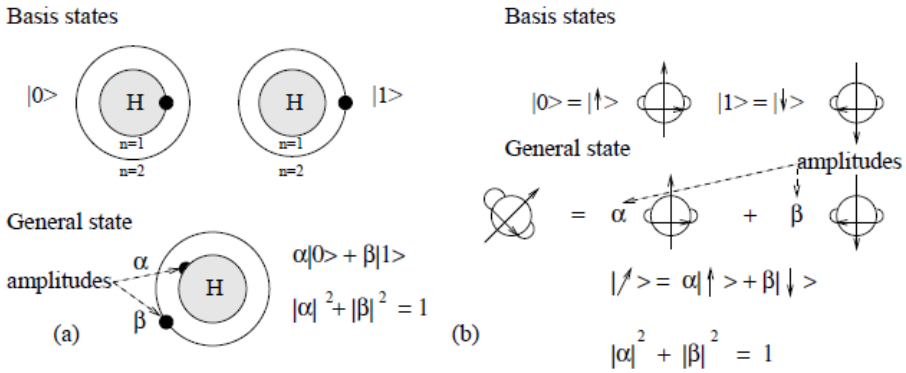
[۳] R.P.Feynman

[۴] Deutsch

[۵] Charch – Turing

[۶] Quantum Computing

کوانتومی [۷] یا بطور خلاصه از **کیوبیت** [۸] استفاده می‌کنیم . یک کیوبیت یک سیستم کوانتومی است که فضای هیلبرت آن دو بعدی است . بردارهای پایه این فضا را با $|۰\rangle = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}, |۱\rangle = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}$ نشان می‌دهند . بطوریکه این حالات متعامداند . یک بیت اطلاعات می‌تواند بوسیله‌ی ذره‌ای با اسپین $\frac{۱}{۲}$ ، به عنوان اسپین بالا متناظر با ۱ واسپین پایین متناظر با ۰ یا با جهت قطبش ساعتگرد متناظر با ۱ وپادساعتگرد متناظر با ۰ ویا به وسیله‌ی الکترون در اتم هیدروژن با اولین حالت برانگیخته متناظر با ۱ وحالت پایه متناظر با صفر ثبت شود . نه‌تنها می‌توان اطلاعات را روی چنین بیت کوانتومی ثبت کرد بلکه می‌توان آن را پردازش کرد . علاوه براین یک کیوبیت برخلاف بیت کلاسیکی می‌تواند در ترکیبی از حالت‌های فوق نیز قرار بگیرد .



شکل ۱.۱ : نمایش کیوبیت‌ها، (a) الکترون در اتم هیدروژن. (b) ذرهای با اسپین ۱/۲.

حالت یک کیوبیت با برداری در این فضای هیلبرت به‌صورت مقابل است : $|\psi\rangle = \alpha|۰\rangle + \beta|۱\rangle$

یک رشته‌ی n بیته‌ی کلاسیکی به صورت $(x_۰, x_۱, \ldots, x_{n-۱})$ است هر کدام از بیت‌های x_k مقادیر ۰ یا ۱ را می‌گیرند . اگر بیت‌های x_k را با فضای هیلبرت دو بعدی $H_{۲,k}$ توصیف کنیم برای رشته‌ی x ، یک حالت کوانتومی به صورت زیر درمی آید :

$$|x\rangle = |x_۰\rangle \otimes |x_۱\rangle \otimes \ldots \otimes |x_{n-۱}\rangle$$

---

[۷] Quantum bit

[۸] Qubit

که در فضای هیلبرت $H_N = H_{۲,۰} \otimes H_{۲,۱} \otimes \ldots \otimes H_{۲,n}$ قرار دارد و $N = ۲^n$. یک حالت دلخواه در فضای H_N فرم زیر را دارد :

$$|\psi\rangle = \sum_{x=۰}^{N-۱} \alpha_x |x\rangle$$

حالت $|\psi\rangle$ با n کیوبیت ، یک برهمنهی از ۲^n حالت $(|۰\rangle, |۱\rangle \ldots, |۲^n - ۱\rangle)$ است . پایه‌های متعامد $\{|۰\rangle, |۱\rangle \ldots, |۲^n - ۱\rangle\}$ پایه‌های محاسباتی اند . x به صورت باینری نوشته شده و شامل ۲^n دامنه مختلط α_x است که در شرط نرمالیزاسیون $\sum_x |\alpha_x|^۲ = ۱$ صدق می کنند .

۵.۱ توازی کوانتومی

شگفتی کامپیوترهای کوانتومی در خلق و ترکیب خطی حالتها به همراه عنصر احتمال است . بنابراین ، کامپیوترهای کوانتومی قادر به تحول دو حالت یا بیشتر بطور همزمان می‌باشند . بطوریکه یک حافظه‌ی کوانتومی می‌تواند در آن واحد در تمام حالتهای بالقوه‌ی خود قرار بگیرد ؛ این پدیده به توازی کوانتومی معروف است . پارالیسم کوانتومی نقش اساسی در طرح الگوریتم‌های کوانتومی ایفا می‌کند و کامپیوترهای کوانتومی را قادر می‌سازد تا با پذیرفتن تعداد زیادی ورودی در قالب یک حالت ، فقط با یک مرتبه عمل کردن ، خروجی‌های متناظر با این ورودی‌ها را در اختیار ما قرار می‌دهند . به این ترتیب کامپیوترهای کوانتومی با سرعت و قابلیت فوق‌العاده‌ی خود ، چشم اندازهای جدیدی را به روی دانشمندان می‌گشایند .

۶.۱ گیت کوانتومی

مدار کلاسیکی از سیم‌هایی تشکیل شده که مقادیر بیت‌ها را میان گیت‌های منطقی حمل می‌کنند ؛ در حالیکه مدار کوانتومی حامل حالات کیوبیت‌ها میان گیت‌های کوانتومی اند گیت کوانتومی برنامه‌ی کاربردی است که کیوبیت‌های ورودی را به کیوبیت‌های خروجی تبدیل می‌کند . در واقع اطلاعات در کیوبیت‌ها یعنی حالات کوانتومی ذخیره می‌شوند . پردازش اطلاعات نیز با عملگرهای یکانی که

تحول را نشان می‌دهند و یا با اندازه‌گیری انجام می گیرد معمولاً اصطلاح گیت کوانتومی برای عملگر یکانی بکاربرده می‌شود . از روش‌های مختلفی برای ساختن گیت‌های کوانتومی استفاده می‌شود مهمترین آنها عبارت اند از :

۱) یون – تله .

۲) تشدید مغناطیسی هسته .

واضح است که هر گیت کلاسیکی برگشت پذیر ممکن است به گیت کوانتومی تعمیم داده شود در واقع محاسبات برگشت پذیر مورد خاصی از محاسبات کوانتومی اند . بهر حال محاسبات کوانتومی بسیار عمومی تر اند بطوریکه گیت‌های کوانتومی وجود دارند که مشابه کلاسیکی ندارند .

۷.۱ الگوریتم کوانتومی

الگوریتم کوانتومی شامل مراحل زیر است :

۱) آماده کردن حافظه در یک حالت کوانتومی شامل n کیوبیت از پایه‌های محاسباتی .

۲) عمل یک مجموعه از گیت های کوانتومی روی حالت اولیه .

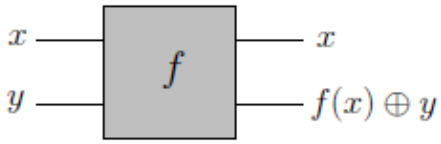
۳) اندازه گیری حالت خروجی .

۸.۱ اوراکل

فرض کنید جعبه‌ی سیاهی تابع f را روی ورودی خود اعمال می‌کند ، ما تنها می‌توانیم به این جعبه‌ی سیاه ورودی‌های مختلف دهیم و خروجی های آن را ثبت کنیم ، به این کار فراخوانی تابع می گویند . در اصطلاح علم کامپیوتر چنین جعبه‌ی سیاهی **اوراکل** [۹] نامیده می‌شود . خواهیم دید که برای مسائل مشخص یک الگوریتم کوانتومی اساساً به فراخوانی‌های کمتری (پرسش‌های کمتری) نسبت به

[۹] Oracle

الگوریتم کلاسیکی نیاز خواهد داشت . در حالت کلاسیک ورودی یک رشته‌ی x ، n بیته است و خروجی با یک رشته‌ی $f(x)$ ، m بیته داده می شود . چنین جعبه‌ای به صورت کوانتومی تنها زمانی موجود است که برگشت پذیر باشد ؛ برای ساختن جعبه‌ی برگشت پذیر ، ورودی y ، m بیته نیز اضافه می‌شود تا نتیجه‌ی خروجی $f(x) \oplus y$ باشد . نماد $\oplus$ جمع در مد ۲ است . بطور خاص اگر y به $y = ۰۰\ldots۰$ فیکس شده باشد خروجی $f(x)$ خواهد بود[۹] .



شکل ۱.۱: جعبه‌ی سیاه برگشت‌پذیر برای تابع $f : \{۰,۱\}^n \to \{۰,۱\}^m$.

۹.۱ الگوریتم دوچ

الگوریتم دوچ [۱۰] اولین الگوریتم کوانتومی است[۱۳] . مسأله از این قرار است که تابعیت جعبه‌ی سیاه f داده شده $f : B_۱ \to B_۱$ (با فرض تابع یک بیتی) چند بار تابع را فراخوانی کنیم تا ثابت یا متوازن بودن آن پی ببریم .

منظور از تابع ثابت ، تابعی است که خروجی اش همواره مقدار ثابت و مستقل از ورودی است $(f(۰) = f(۱))$ و منظور از تابع متوازن ، تابعی است که خروجی‌اش به ازای نیمی از مقادیر برابر ۰ و به ازای نیمی دیگر برابر با ۱ است .

f_1	
0	0
1	0

f_2	
0	0
1	1

f_3	
0	1
1	0

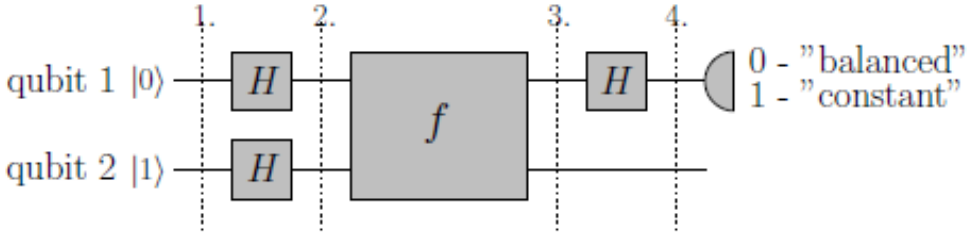
f_4	
0	1
1	1

شکل ۲.۱: انواع توابع یک بیتی $f_۱, f_۲$ ثابت $f_۳, f_۴$ متوازن .

به صورت کلاسیکی با دو بار فراخوانی تابع می توان به نوع تابع پی برد . ابتکار دوچ استفاده از تداخل

[۱۰] Deutsh's algorithm

دامنه های حالت کوانتومی است ؛ بطوریکه فقط به یک پرسش از جعبه‌ی سیاه نیاز است . مدار شکل (۴.۱) بر روی دو کیوبیت ، الگوریتم کوانتومی دوچ را نشان می دهد :



شکل ۳.۱: مدار دوچ .

۱) به کیوبیت ها مقادیر اولیه $|۰\rangle, |۱\rangle$ داده شده ، اولین کت به کیوبیت ۱ و دومین کیوبیت به کیوبیت ۲ اشاره می کند .

۲) بعد از بکار بردن تبدیل هادامارد [۱۱] روی هر یک از کیوبیت‌ها، حالت به صورت $\frac{۱}{۲}(|۰\rangle + |۱\rangle)(|۰\rangle - |۱\rangle)$ در می آید .

۳) بعد از فراخوانی جعبه‌ی سیاه حالت دو کیوبیت به صورت زیر خواهد بود :

$$\frac{۱}{۲}(|۰\rangle(|۰ \oplus f(۰)\rangle - |f(۰) \oplus ۱\rangle) + |۱\rangle(|۰ \oplus f(۱)\rangle - |f(۱) \oplus ۱\rangle))$$

حالت دومین کیوبیت در این عبارت $\pm(|۰\rangle - |۱\rangle)$ است ، علامت وابسته به مقدار $f(۱), f(۰)$ است پس عبارت بالا را می توانیم به صورت زیر بنویسیم :

$$\frac{۱}{۲}((-۱)^{f(۰)}|۰\rangle + (-۱)^{f(۱)}|۱\rangle)(|۰\rangle - |۱\rangle)$$

[۱۱] عملگر هادامارد ، گیت تک کیوبیته‌ای است که به صورت زیر داده می‌شود :

$$H = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{pmatrix}$$

۴) بعد از بکار بردن آخرین هادامارد ، حالت اولین کیوبیت به صورت زیر در می آید :

$$\frac{۱}{۲}((-۱)^{f(۰)}(|۰\rangle + |۱\rangle) + (-۱)^{f(۱)}(|۰\rangle - |۱\rangle))$$

که می توان به صورت مقابل نوشت :

$$\frac{۱}{۲}((-۱)^{f(۰)} + (-۱)^{f(۱)})|۰\rangle + ((-۱)^{f(۰)} - (-۱)^{f(۱)})|۱\rangle)$$

اگر تابع ثابت باشد ، این حالت $\pm|۰\rangle$ است و اگر تابع متوازن باشد این حالت $\pm|۱\rangle$ است . اندازگیری نهایی بطور کامل میان این دو حالت تمایز قائل می‌شود . به این ترتیب با یک بار فراخوانی تابع می‌توانیم به ثابت یا متوازن بودن تابع پی ببریم .

۱۰.۱ الگوریتم دوچ – جُوزا

مسأله‌ی دوچ – جُوزا تعمیمی از مسأله‌ی دوچ است[۱۴] . مسأله از این قرار است که :
جعبه‌ی سیاه با تابعیت f داده شده بطوریکه $f : B_n \to B_۱$ ، باید تعیین کنیم که این تابع ثابت است $(f(x) = f(y))$ ، یا متوازن است $(f(x) \neq f(y))$.

می دانیم که تعداد توابع ثابت برابر با ۲ است ؛ اما تعداد توابع متوازن به صورت نمایی زیاد است واین تفاوت مهم این مسأله با مسأله‌ی دوچ است . برای آنکه تعداد توابع متوازن را بشماریم دقت می کنیم که تعداد ورودی های مختلف این تابع و در نتیجه خروجی های آن برابر با ۲^n است . تعداد توابع متوازن برابر با تعداد طرقی است که می توان نیمی از ۲^n خروجی را برابر با صفر و نیمی دیگر را برابر با یک گرفت و این تعداد برابر است با $\frac{۲^n!}{(۲^{n-۱}!)^۲}$ و این عددی است که رابطه اش با n یک رابطه ی نمایی است . بنابر این تعداد کل توابع ممکن که می توانند ثابت یا متوازن باشند برابر است با $۲ + \frac{۲^n!}{(۲^{n-۱}!)^۲}$.
اگر بخواهیم یک الگوریتم تعینی (الگوریتمی که با قاطعیت پاسخ را مشخص کند .) برای مسأله بکار ببریم باید اعداد n بیتی $x = (x_۰, x_۱, ..., x_{n-۱})$ را یک به یک بدهیم (تابع را فرا خوانی کنیم) . هر گاه به ازای دو مقدار مختلف x مقادیر متفاوتی برای $f(x)$ بدست آوریم الگوریتم را متوقف کرده وحکم می کنیم که تابع متوازن است . اما اگر چنین نبود الگوریتم را ادامه می دهیم تا نیمی از اعداد