بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده‌ی علوم ریاضی

گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی ریاضی محض، گرایش آنالیز

عنوان:

مطالعه‌ی مشخصه‌های فشردگی ضعیف مرتب عملگرهای نیم - فشرده

استاد راهنما:

دکتر کاظم حق‌نژاد آذر

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا عبداله‌پور

پژوهشگر:

فاطمه حاجی‌زاده

شهریور۱۳۹۳

تعهدنامه‌ی اصالت اثر و رعایت حقوق دانشگاه

تمامی حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایج، ابتکارات، اختراعات و نوآوری‌های ناشی از انجام این پژوهش، متعلق به **دانشگاه محقق اردبیلی** می‌باشد. نقل مطلب از این اثر، با رعایت مقررات مربوطه و با ذکر نام دانشگاه محقق اردبیلی، نام استاد راهنما و دانشجو بلامانع است.

اینجانب فاطمه حاجی‌زاده دانش‌آموخته مقطع کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه محقق اردبیلی به شماره‌ی دانشجویی ۹۱۲۲٤۰۳۲۰۲ که در تاریخ ۹۳/۰٦/۱۵ از پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود تحت عنوان "مطالعه‌ی مشخصه‌های فشردگی ضعیف مرتب عملگرهای نیم – فشرده " دفاع نموده‌ام، متعهد می‌شوم که:

۱) این پایان‌نامه را قبلاً برای دریافت هیچ‌گونه مدرک تحصیلی یا به عنوان هرگونه فعالیت پژوهشی در سایر دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزشی و پژوهشی داخل و خارج از کشور ارائه ننموده‌ام.

۲) مسئولیت صحّت و سقم تمامی مندرجات پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود را بر عهده می‌گیرم.

۳) این پایان‌نامه، حاصل پژوهش انجام شده توسط اینجانب می‌باشد.

٤) در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران استفاده نموده‌ام، مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه و با رعایت اصل امانتداری علمی، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در متن و فهرست منابع و مآخذ ذکر نموده‌ام.

۵) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده یا هر گونه بهره‌برداری اعم از نشر کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان‌نامه را داشته باشم، از حوزه‌ی معاونت پژوهشی و فنّاوری دانشگاه محقق اردبیلی، مجوزهای لازم را اخذ نمایم.

٦) در صورت ارائه‌ی مقاله‌ی مستخرج از این پایان‌نامه در همایش‌ها، کنفرانس‌ها، سمینارها، گردهمایی‌ها و انواع مجلات، نام دانشگاه محقق اردبیلی را در کنار نام نویسندگان (دانشجو و اساتید راهنما و مشاور) ذکر نمایم.

۷) چنانچه در هر مقطع زمانی، خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن (منجمله ابطال مدرک تحصیلی، طرح شکایت توسط دانشگاه و ...) را می‌پذیرم و دانشگاه محقق اردبیلی را مجاز می‌دانم با اینجانب مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه رفتار نماید.

نام و نام خانوادگی دانشجو: فاطمه حاجی زاده

امضا

تاریخ

تقدیم به پدر و مادرم

که از نگاهشان صلابت و از رفتارشان محبت و از صبرشان ایستادگی را آموختم

تقدیم به همسرم

او که اسوه صبر و تحمل است و مشکلات مسیر را برایم هموار کرد

و تقدیم به فرزندانم

جواد و هادی و محدثه

که کودکی گمشده ام را در چهره معصومشان پیدا کردم.

سپاس گزاری...

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه‌چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت. اکنون که در سایه الطاف الهی این پایان‌نامه به اتمام رسید بر خود واجب می‌دانم که از همه‌ی خوبانی که در این امر مرا یاری کردند تشکر کنم تا شاید از این طریق بتوانم ذره‌ای از زحمات بی‌کران آنان را جبران کرده باشم.

از استاد ارجمند جناب آقای دکتر حق‌نژاد که در کمال سعه‌ی صدر، با حسن خلق و فروتنی از هیچ گونه کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و بنده را با تمام مزاحمت‌های تلفنی و حضوری تحمل نمودند.

از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر محمدرضا عبداله‌پور که همیشه با روی گشاده بنده را به حضور پذیرفتند و از هیچ کوششی دریغ نورزیدند.

از کلیه اساتیدی که در دوران تحصیل از محضرشان تلمذ نمودم.

از همه‌ی خواهرانم و برادرانم که همیشه حامی و مایه‌ی دلگرمی من بوده‌اند.

از جناب آقای دکتر وانک ($Wunk$) به خاطر ارسال مقاله برای تکمیل این پایان‌نامه.

از جناب آقای دکتر علی بهزاد به خاطر کمک در تهیه منابع مورد نیاز.

از سرکار خانم اعظم شکاری به خاطر همکاری‌هایشان در این پایان‌نامه

و از همه‌ی همکلاسی‌هایم که مرا یاری نمودند.

امیدوارم این پایان‌نامه آغازی برای بهتر زیستن و تلاش بیشتر باشد.

فاطمه حاجی زاده

تابستان ۱۳۹۳

نام خانوادگی: حاجی‌زاده نام: فاطمه

عنوان پایان‌نامه: مشخصه‌ی فشردگی ضعیف مرتب عملگرهای نیم - فشرده

استاد راهنما: دکتر کاظم حق‌نژاد آذر

استاد مشاور: دکتر محمدرضا عبداله‌پور

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد

رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز

دانشگاه: محقق‌اردبیلی دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ دفاع:۹۳/۶/۱۵ تعداد صفحات: ۹۹

چکیده

در این پایان‌نامه، روابط بین کلاس عملگرهای نیم - فشرده و کلاس عملگرهای فشرده ضعیف مرتب را بررسی می‌کنیم و نتایج جالبی در این مورد بدست می‌آوریم.

کلیدواژه‌ها: عملگر نیم - فشرده، عملگر فشرده ضعیف مرتب، نرم پیوسته مرتب.

فهرست مطالب

مقدمه

عملگرهای فشرده اولین بار توسط هیلبرت[۱] (۱۹۰۶) مطرح گردید و بعد از آن ریس [۲] (۱۹۱۸) خواص عملگرهای فشرده را بررسی کرد. از آن جا که عملگرهای فشرده دارای خواص بسیار جالبی هستند، این سوال به وجود آمد که آیا این خاصیت‌ها در فضاهای توپولوژیک ضعیف هم برقرار است. بنابراین کاکوتانی [۳] (۱۹۳۸) و یوسیدا[۴] (۱۹۳۸) عملگرهای فشرده ضعیف را تعریف کرده و به مطالعه‌ی خواص این عملگرها پرداختند. همچنین عملگرهای فشرده ضعیف مرتب نیز برای اولین بار توسط میر - نیبرگ[۵] (۱۹۷۴) و دادس [۶] (۱۹۷۵) معرفی شده است.

در سالهای ۱۹۸۳ و ۱۹۹۱ توسط زانن[۷] و میر - نیبرگ، مطالعاتی درباره‌ی عملگرهای نیم - فشرده بعمل آمد. در این پایان‌نامه، روابط بین عملگرهای نیم - فشرده و عملگرهای فشرده ضعیف مرتب بررسی شده است که در زیر به برخی از روابط بین این عملگرها اشاره شده است.

عملگر T از یک فضای باناخ E به توی مشبکه‌ی باناخ F نیم - فشرده گفته می‌شود اگر برای هر $\varepsilon > 0$، $u \in F^+$ وجود داشته باشد به طوری که

$$T(B_E) \subset [-u, u] + \varepsilon B_F.$$

B_E و B_F به ترتیب گویهای واحد بسته از E و F و $F^+ = \{y \in F \,:\, y \geqslant 0\}$ می‌باشند.

همچنین عملگر T از مشبکه‌ی باناخ E به توی فضای باناخ F فشرده ضعیف مرتب گفته می‌شود اگر برای هر $x \in E^+$، زیرمجموعه‌ی $T([0, x])$ فشرده ضعیف نسبی در F باشد. واضح است که کلاس عملگرهای نیم - فشرده (فشرده ضعیف مرتب) در خاصیت الحاقی صدق نمی‌کند. به عبارت بهتر، الحاقی یک عملگر نیم - فشرده (فشرده ضعیف مرتب) ممکن است نیم - فشرده (فشرده ضعیف مرتب) نباشد. و برعکس اگر الحاقی یک عملگر، نیم - فشرده (فشرده ضعیف مرتب) باشد، خود عملگر لازم نیست نیم - فشرده

[۱] Hilbert
[۲] Riesz
[۳] Kakutani
[۴] Yosida
[۵] Meyer-Nieberg
[۶] Dodds
[۷] Zaanen

(فشرده ضعیف مرتب) باشد.

مطابق (قضیه‌ی ۳.۶.۱۸ از مرجع میر - نیبرگ، ۱۹۹۱)، اگر $T : E \to F$ عملگری باشد که الحاقی آن $T' : F' \to E'$ نیم - فشرده باشد، آنگاه T فشرده ضعیف مرتب خواهد بود و برعکس اگر عملگر $T : E \to F$ نیم - فشرده باشد، آنگاه الحاقی آن $T' : F' \to E'$ فشرده ضعیف مرتب خواهد بود.

از طرف دیگر زانن نیز دوگان عملگرهای نیم - فشرده را مطالعه کرده است. او اثبات کرد که اگر F و E دو مشبکه‌ی باناخ باشند به طوری که E' نرم پیوسته مرتب داشته باشد و F کامل مرتب (کامل ددکیند) باشد و $T : E \to F$ یک عملگر مثبت باشد به طوری که الحاقی آن یعنی $T' : F' \to E'$ نیم - فشرده باشد، آنگاه T نیم - فشرده است. و همچنین او اثبات کرد که اگر F نرم پیوسته مرتب داشته باشد، آنگاه هر عملگر مثبت نیم - فشرده‌ی $T : E \to F$ دارای الحاقی نیم - فشرده‌ی $T' : F' \to E'$ می‌باشد.

در این پایان‌نامه، ما روابط جدیدی را به دست می‌آوریم و از این نتایج برای به دست آوردن عکس قضیه‌های ۱۲۷.۱ و ۱۲۷.۲ (از مرجع زانن، ۱۹۸۳) روی دوگان عملگرهای نیم - فشرده استفاده خواهیم کرد و دقیقا نشان می دهیم هر عملگر نیم - فشرده‌ی T از یک مشبکه‌ی باناخ E به توی مشبکه‌ی باناخ کامل $\sigma-$ددکیند (کامل $\sigma-$ مرتب) F، فشرده ضعیف مرتب است اگر و فقط اگر نرم E یا F پیوسته مرتب باشد و با استفاده از این نتایج نشان می‌دهیم که اگر E و F مشبکه‌های باناخ باشند به طوری که F، کامل $\sigma-$ددکیند باشد (E نرم پیوسته مرتب باشد)، و هر عملگر نیم - فشرده‌ی مثبت $T : E \to F$، دارای الحاقی نیم - فشرده‌ی $T' : F' \to E'$ باشد، آنگاه E، $KB-$فضاست یا F نرم پیوسته مرتب دارد.

همچنین با توجه به مطلب بالا مثالی ارائه می‌دهیم که نشان دهد " E، $KB-$فضاست " شرط لازم برای مسئله‌ی بالا برقرار است ولی شرط کافی برقرار نیست. و در نهایت نشان می‌دهیم که اگر E و F دو مشبکه‌ی باناخ باشند، هر عملگر نیم - فشرده از F' به توی E' فشرده ضعیف مرتب است اگر و فقط اگر نرم F' یا E' پیوسته مرتب باشد.

این پایان‌نامه بر اساس مقاله‌ای با عنوان "مشخصه‌ی فشردگی ضعیف مرتب عملگرهای نیم - فشرده" از (اکزوزالبور، ۲۰۰۹) در چهار فصل تنظیم شده است:

فصل اول شامل تعاریف و مفاهیم مقدماتی است که در فصل‌های بعدی از آن استفاده شده است.

فصل دوم شامل مشبکه‌های باناخ و انواع مشبکه‌های باناخ می‌باشد.

در فصل سوم، عملگر و انواع آن مورد مطالعه قرار گرفته است.

در فصل چهارم، روابط بین عملگر فشرده ضعیف مرتب و عملگر نیم - فشرده بررسی شده است.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱.۱ تعاریف

تعریف ۱.۱.۱. فضای برداری[۱] روی $\mathbb{F}$ مجموعه‌ای مانند X می‌باشد که عناصرش را بردار می‌نامند و در آن دو عمل به نام‌های جمع از $X \times X$ به توی X و ضرب اسکالر از $\mathbb{F} \times X$ به توی X تعریف شده‌اند که دارای خواص جبری زیر هستند:

۱) به ازای هر $x, y, z \in X$ داریم: $x + y = y + x$ و $x + (y + z) = (x + y) + z$؛

۲) بردار صفر متعلق به X وجود دارد بطوریکه به ازای هر $x \in X$، $x + 0 = x$؛

۳) به ازای هر $x \in X$ بردار منحصر بفردی مانند $-x$ وجود دارد بطوریکه: $x + (-x) = 0$؛

۴) به ازای هر اسکالر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ و به ازای هر بردار $x, y \in X$ داشته باشیم:

الف) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ ب) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ ج) $\alpha(\beta.x) = (\alpha\beta).x$؛

۵) به ازای هر بردار $x \in X$ داشته باشیم: $1.x = x$.

تعریف ۲.۱.۱. تابع $d : X \times X \to [0, +\infty[$ را یک متر بر X می‌نامند هرگاه به ازای هر x, y, z متعلق به X خواص زیر برقرار باشد:

۱) به ازای هر $x, y \in X$، $d(x, y) \geqslant 0$ و $d(x, y) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y$.

۲) $d(x, y) = d(y, x)$.

۳) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

اگر d یک متر باشد آنگاه زوج (X, d) را فضای متریک[۲] می‌نامند.

مثال ۱.۱.۱. *فرض کنید* $X = (0, \infty)$ *. بنابراین* $d(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$ *به ازای هر* $x, y \in X$ *یک متر روی* X *می‌باشد.*

---

[۱] Vector space
[۲] Metric space

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد اگر $x \in X$ باشد گوی باز[۱] در x به شعاع $r > ۰$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B(x,r) = \{y \in X \ : \ d(x,y) < r\}.$$

تعریف ۴.۱.۱. دنباله‌ی $\{x_n\}$ از فضای متریک (X,d) را دنباله‌ی کوشی[۲] می‌نامند هرگاه:

$$\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists N > ۰ \quad \forall m,n > N \quad \Rightarrow \quad d(x_n,x_m) < \varepsilon.$$

تعریف ۵.۱.۱. فضای متریک (X,d) را کامل[۳] گویند هرگاه هر دنباله‌ی کوشی در X به نقطه‌ای از آن همگرا باشد.

تعریف ۶.۱.۱. زیرمجموعه‌ی A از فضای متریک (X,d) چگال[۴] در X نامیده می شود هرگاه $X = \overline{A}$.

تعریف ۷.۱.۱. فضای برداری X را فضای خطی نرمدار گویند هرگاه نگاشتی مانند $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ در X موجود باشد بطوریکه به ازای هر $x,y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{F}$ خواص زیر برقرار باشند:

۱) به ازای هر $x \in X$، $\|x\| \geqslant ۰$ و $\|x\| = ۰$ اگر و فقط اگر $x = ۰$؛

۲) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$؛

۳) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

فضای برداری X را به همراه $\|.\|$ یک فضای برداری نرم‌دار یا فضای نرم‌دار[۵] می‌نامیم. اگر X یک فضای برداری باشد و نگاشت $p : X \to [۰,\infty)$ در خاصیت ۲ و ۳ بالا صدق کند آنگاه p را یک نیم نرم [۶] می‌نامیم.

تعریف ۸.۱.۱. نرم های $\|.\|_۱$ و $\|.\|_۲$ در فضای برداری X هم ارز [۷] گفته می‌شود اگر مقدارهای ثابت

---
[۱] Open ball
[۲] Cauchy sequence
[۳] Complete
[۴] Dense
[۵] Normed vector space
[۶] Seminorm
[۷] Equivalent

$\alpha > 0$ و $\beta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\alpha\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta\|x\|_1 \quad \forall x \in X.$$

مثال ۲.۱.۱. *با تعریف $d(x,y) = \|x-y\|$، d در شرایط متر بودن صدق می‌کند لذا هر فضای نرمدار یک فضای متریک می‌باشد.*

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد در این صورت دنباله‌ی (x_n) در X را همگرا[1] به x گویند هرگاه $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

تعریف ۱۰.۱.۱. زیرمجموعه‌ی A از فضای نرم‌دار را نرم کراندار[2] (کراندار نرمی) گویند هرگاه $M \geqslant 0$ای موجود باشد به طوری که برای هر $x \in A$ داشته باشیم $\|x\| \leqslant M$.

تعریف ۱۱.۱.۱. اگر X یک فضای نرم‌دار تام باشد، X را فضای باناخ[3] می‌نامند. بعبارت دیگر X را فضای باناخ گویند اگر و فقط اگر به ازای هر دنباله‌ی کوشی مانند $\{x_n\}$ از X عضوی مانند $x \in X$ وجود داشته باشد بطوریکه $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

مثال ۳.۱.۱. *فرض کنید ℓ^1 مجموعه‌ای از دنباله‌های حقیقی $x = (x_1, x_2, \dots)$ باشد بطوریکه $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$ به سادگی می‌توان بررسی کرد که ℓ^1 تحت اعمال جبری زیر*

$$x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots) \quad , \quad \alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots) \quad x, y \in \ell_1 \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

یک فضای برداری می‌باشد.

همچنین به ازای هر $x \in \ell^1$ تعریف می‌کنیم: $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$. بنابراین $\|.\|_1$ یک نرم روی ℓ^1 می‌باشد. فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله‌ی کوشی در ℓ^1 باشد، در این صورت به ازای هر $\varepsilon > 0$، kای وجود دارد بطوریکه به ازای هر $m, n > k$ رابطه‌ی $\|x_n - x_m\|_1 < \varepsilon$ برقرار می‌باشد. بنابراین $M > 0$ وجود

[1] Convergent
[2] Norm bounded
[3] Banach space

دارد بطوریکه به ازای هر n، $\|x_n\|_1 \leqslant M$. فرض کنید به ازای هر n، $x_n = (x_1^n, x_2^n, \ldots)$. رابطه‌ی

$$|x_i^n - x_i^m| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n - x_i^m| = \|x_n - x_m\|_1 < \varepsilon \qquad \forall m, n > k$$

ایجاب می‌کند که به ازای هر ثابت i، دنباله‌ای از عضوهای حقیقی $\{x_i^n\}$ یک دنباله‌ی کوشی باشد.

فرض کنید به ازای هر i داشته باشیم:

$$x_i = \lim_{n\to\infty} x_i^n$$

چون به ازای هر $n > k$ و هر p داریم:

$$\sum_{i=1}^{p} |x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{p} |x_i - x_i^n| + \sum_{i=1}^{p} |x_i^n| \leqslant \sum_{i=1}^{p} |x_i - x_i^n| + \|x_n\|_1 = \lim_{m\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^{p} |x_i^m - x_i^n| \Big) + \|x_n\|_1$$

$$\leqslant \varepsilon + M < \infty$$

بنابراین $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^1$ و چون به ازای هر $m, n > k$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{p} |x_i^m - x_i^n| \leqslant \|x_n - x_m\|_1 < \varepsilon$$

بنابراین به ازای هر p و به ازای هر $n > k$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{p} |x_i - x_i^n| = \lim_{m\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^{p} |x_i^m - x_i^n| \Big) \leqslant \varepsilon$$

بنابراین به ازای هر $n > k$، $\|x - x_n\|_1 \leqslant \varepsilon$ می‌باشد، پس $\{x_n\}$ همگرا به x در ℓ^1 می‌باشد. پس ℓ^1 یک فضای باناخ می‌باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد. گردایه‌ی τ از زیرمجموعه‌های X را توپولوژی[1] بر X می‌نامند هرگاه دارای خواص زیر باشد:

۱) $X \in \tau$ و $\varnothing \in \tau$؛

۲) اگر U و V عضو τ باشند آنگاه $U \cap V \in \tau$؛

[1] Topology

۳) اگر $\{V_i\}_{i\in I}$ گردایه‌ای دلخواه (متناهی، شمارش‌پذیر یا شمارش‌ناپذیر) از اعضای τ باشد آنگاه $\cup_{i\in I}V_i \in$ τ.

هرگاه τ یک توپولوژی بر X باشد آنگاه زوج (X,τ) را فضای توپولوژیک[۱] می‌نامند. اعضای τ را مجموعه‌های باز X می‌نامند.

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنید (X,τ) فضای توپولوژیک باشد و Y زیرمجموعه‌ای از X باشد. زیرمجموعه‌های Y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tau_Y = \{V \cap Y \,:\, V \in \tau\}.$$

بنابراین (Y,τ_Y) فضای توپولوژیک می‌باشد. توپولوژی τ_Y، توپولوژی القایی[۲] توسط τ روی Y نامیده می‌شود.

تعریف ۱۴.۱.۱. توپولوژی τ روی فضای برداری X را توپولوژی خطی[۳] گوییم هرگاه دو تابع زیر پیوسته باشند.

$$X \times X \to X \qquad , \qquad \mathbb{R} \times X \to X$$

$$(x,y) \to x+y \qquad , \qquad (\alpha,x) \to \alpha x.$$

تعریف ۱۵.۱.۱. دوگان جبری[۴] X^* از فضای برداری X، فضای برداری شامل تمام تابعک‌های خطی روی X است. (منظور از تابعک خطی روی X، نگاشت خطی از X به توی $\mathbb{R}$ است.) X^* با اعمال جمع و ضرب اسکالر معمولی یک فضای برداری است و X^{**} که دوگان جبری X^* می‌باشد مشابه بالا تعریف می‌شود.

نگاشت $\varphi : X \to X^{**}$ با ضابطه‌ی $\langle x^*, \varphi(x)\rangle = \langle x, x^*\rangle$ که در آن $x^* \in X^*$ و $\langle x, x^*\rangle = x^*(x)$ را یک نگاشت طبیعی می‌نامیم. می‌توان نشان داد که φ نگاشت خطی و حافظ نرم است. در این صورت می‌توان

[۱] Topological Space
[۲] Topology induced
[۳] Linear
[۴] Dual algebra

X را با $\varphi(X)$ یکی گرفت.

در صورتیکه φ پوشا باشد، X را فضای بازتابی [1] (انعکاسی) می‌نامند.

تعریف ۱.۱.۱۶. اگر τ توپولوژی خطی روی X باشد آنگاه دوگان توپولوژیکی[2] X' از (X, τ) زیرفضای برداری از X^* است که شامل تمام نگاشتهای خطی و $\tau-$ پیوسته روی X می‌باشد. به عبارت بهتر:

$$X' = \{f : X \to \mathbb{R} \ : \ \text{خطی و } \tau \text{ پیوسته است } f\}.$$

تعریف ۱.۱.۱۷. فرض می‌کنیم X یک فضای برداری باشد. در این صورت می‌گوییم X' نقاط X را جدا می‌کند[3] هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ به طوری که $x \neq y$، آنگاه $f \in X'$ وجود داشته باشد به طوری که $f(x) \neq f(y)$.

تعریف ۱.۱.۱۸. فرض می‌کنیم X یک مجموعه و $\tau \subseteq P(X)$ یک توپولوژی روی X باشد. آنگاه $B \subseteq \tau$ را یک پایه[4] برای توپولوژی τ می‌گوییم هرگاه هر عضو τ (یعنی هر مجموعه‌ی باز) اجتماعی از B باشد.

تعریف ۱.۱.۱۹. توپولوژی خطی τ روی فضای برداری X به طور موضعی محدب[5] نامیده می‌شود هرگاه τ پایه‌ای داشته باشد که همه‌ی اعضای آن محدب باشد. در این صورت جفت (X, τ) را فضای به طور موضعی محدب می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۲۰. سیستم دوگان[6] $< X, X' >$ زوجی از فضای برداری X و X' است به طوری که $<.,.>: X \times X' \to \mathbb{R}$ نسبت به هر متغیرش به صورت جداگانه خطی است (به این معنی که $(x, x') \to < x, x' >$ دو خطی است) به طوری که

۱. هرگاه به ازای هر $x \in X$، $< x, x' >= 0$، آنگاه $x' = 0$

۲. هرگاه به ازای هر $x' \in X'$، $< x, x' >= 0$، آنگاه $x = 0$

[1] Reflaxive space
[2] Dual topological
[3] Separate
[4] Basic
[5] Locally convex topology
[6] Dual system

اگر (X,τ) یک فضای موضعا محدب باشد، آنگاه $< X, X' >$ یک سیستم دوگان تحت دو خطی $< x, x' >= x'(x)$ است.

تعریف ۲۱.۱.۱. مجموعه‌ی ناتهی E را همراه با رابطه‌ی ترتیبی $\leqslant$ مجموعه‌ی مرتب[۱] می‌نامند هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱) به ازای هر $x \in E$ داشته باشیم $x \leqslant x$.

۲) هرگاه $x, y \in E$، $y \leqslant x$ و $x \leqslant y$ آنگاه $y = x$.

۳) اگر $x, y, z \in E$، $x \leqslant y$ و $z \leqslant y$، آنگاه $x \leqslant z$.

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض می‌کنیم E یک مجموعه‌ی مرتب با رابطه‌ی ترتیبی $\leqslant$ باشد. اگر به ازای هر دو عضو دلخواه $x, y \in E$ یکی از روابط $x \leqslant y$ یا $y \leqslant x$ برقرار باشد، E را مجموعه‌ی کاملا مرتب[۲] می‌نامند.

مثال ۴.۱.۱. *تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه همراه با رابطه‌ی ترتیبی $\subseteq$، یک مجموعه‌ی مرتب می‌باشد ولی مجموعه‌ی کلا مرتب نمی‌باشد.*

تعریف ۲۳.۱.۱. اگر E فضای برداری حقیقی و همچنین مجموعه‌ای مرتب باشد، در این صورت E را فضای برداری مرتب[۳] می‌گوییم هرگاه رابطه‌ی ترتیبی[۴] $\leqslant$ به ازای هر $x, y \in E$ در شرایط زیر صدق کند:

۱) اگر $x \leqslant y$، آنگاه رابطه‌ی $x + z \leqslant y + z$ به ازای هر $z \in E$ برقرار باشد.

۲) اگر $x \leqslant y$، آنگاه رابطه‌ی $ax \leqslant ay$ به ازای هر a حقیقی که $a \geqslant 0$ برقرار باشد.

تعریف ۲۴.۱.۱. عضو x از فضای برداری مرتب E را مثبت[۵] گوییم هرگاه $x \geqslant 0$. مجموعه‌ی تمام عضوهای مثبت E را با نماد E^+ نمایش می‌دهیم، یعنی

$$E^+ = \{x \in E \;:\; x \geqslant 0\}.$$

[۱] Ordered set
[۲] Totally ordered set
[۳] Ordered vector space
[۴] Order relation
[۵] Positive

تعریف ۲۵.۱.۱. فضای برداری مرتب E را یک فضای ریس[1] یعنی مشبکه برداری[2] می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in E$، $\sup\{x, y\}$ در E وجود داشته باشد. نمادهای جدید را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$x \vee y = \sup\{x, y\} \qquad x \wedge y = inf\{x, y\}.$$

یادآوری می‌کنیم که دو عنصر $x, y \in E$ دارای سوپریمم k در E است هرگاه $x \leqslant k$ و $y \leqslant k$ و اگر z یک کران بالای $\{x, y\}$ باشد، آنگاه $z \leqslant k$ برقرار باشد.

مثال ۵.۱.۱. *مجموعه‌ی اعداد حقیقی یک مشبکه برداری می‌باشد.*

مثال ۶.۱.۱. *فضای برداری $c_0 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ : \ \lim_n |f(n)| = 0\}$ یک مشبکه برداری می‌باشد. برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $f, g \in c_0$ رابطه‌ی ترتیبی را روی c_0 به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$f \leqslant g \quad \Leftrightarrow \quad f(n) \leqslant g(n). \quad (I)$$

حال برای هر $n \in \mathbb{N}$ و برای هر $f, g, h \in c_0$، رابطه‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$f \leqslant g \quad \Rightarrow \quad f(n) \leqslant g(n) \quad \Rightarrow \quad f(n)+h(n) \leqslant g(n)+h(n) \quad \Rightarrow \quad f+h \leqslant g+h. \quad (II)$$

همچنین برای اسکالر $\alpha \geqslant 0$ و $f, g \in c_0$ و هر $n \in \mathbb{N}$، رابطه‌ی زیر برقرار خواهد بود:

$$f \leqslant g \quad \Rightarrow \quad f(n) \leqslant g(n) \quad \Rightarrow \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \ \ \alpha f(n) \leqslant \alpha g(n) \quad \Rightarrow \quad \alpha f \leqslant \alpha g. \quad (III)$$

در ادامه اگر برای هر $f, g \in c_0$، h را سوپریمم f و g در نظر بگیریم، برای هر $n \in \mathbb{N}$، رابطه‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$|h(n)| = |(f \vee g)(n)| = |\sup\{f(n), g(n)\}| \leqslant \sup\{|f(n)|, |g(n)|\}. \qquad (IV)$$

در نتیجه با توجه به قسمت (IV)

$$\lim_n |h(n)| = 0 \Rightarrow \qquad h \in c_0.$$

[1] Riez space
[2] Vector lattice