بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

دانشکده علوم ریاضی

تاییدیه اعضای هیات داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیئت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **خانم نازنین وزوائی** رشته **ریاضی محض** تحت عنوان: «**درخصوص تک مقداری بودن و ستاره گونی برخی تبدیلات تعریف شده توسط پیچش توابع تحلیلی**» از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آنرا برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تائید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیداحمد موسوی	دانشیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر علاءالدین ملک	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	
٤- استاد ناظر خارجی	دکتر شهرام نجف زاده	استادیار	نجف‌زاده
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب نازنین وزوایی دانشجوی رشته ریاضی محض (جبر) ورودی سال تحصیلی ۱۳۸۷ مقطع کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی متعهد می شوم کلِیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:

تاریخ:

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد نگارنده در رشته **ریاضی محض (جبر)** است که در سال **۱۳۸۹** در دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی جناب آقای دکتر **سید احمد موسوی** ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر ——— و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر ——— از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب **نازنین وزوایی** دانشجوی رشته **ریاضی محض (جبر)** مقطع **کارشناسی ارشد** تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: **نازنین وزوایی**

تاریخ و امضا:

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه دوره کارشناسی‌ارشد ریاضی (محض)

عنوان :

در خصوص تک مقداری بودن وستاره‌گونی برخی تبدیلات تعریف شده توسط پیچش توابع تحلیلی

نگارش :

نازنین وزوایی

استاد راهنما :

دکتر سید احمد موسوی

شهریور ۱۳۸۹

تقدیم به

پدر مهربان و مادر عزیزم

تقدیر و تشکر

بر خود لازم می‌دانم پس از سپاس از یگانه آفریننـده جهـان، تشـکر و سپاسـگزاری قلبـی‌ام را بـه اسـتاد راهنمای خود، جناب آقای **دکتر سیداحمد موسوی** ابراز نمایم، هرچند این تشکر جبران راهنمایی‌هـای مداوم و پی‌گیر این عزیز نمی‌باشد.

از کلیه اساتید محترم و اعضای هیـات علمـی دانشـکده علـوم ریاضـی بـه خصـوص جنـاب آقـای دکتـر طهرانچی، جناب آقای دکتر ملک و جناب آقای دکتر حیدری که در مدت این دوره از محضرشـان کسـب فیض کرده‌ام، صادقانه قدردانی می‌نمایم.

همین‌طور از جناب آقای دکتر شهرام نجف زاده که محبت فرمـوده و داوری ایـن پایـان‌نامـه را بـه عهـده گرفتند، کمال تشکر را دارم.

همچنین وظیفه خود می‌دانم از کلیه مسئولین و کارکنان دانشکده علوم ریاضی تشکر نمایم.

در پایان، بی‌نهایت ترین سپاس را به

پدر و مادر عزیزم

ابراز می‌نمایم هرچند که این سپاس‌گذاری در مقایسه با انبوه مهربانی‌ها و

فداکاری‌هایشان بسیار ناچیز است

چکیده

فرض کنیم S کلاس تمام توابع تحلیلی و تک ارز به‌فرم

$$f(z) = z + \sum_{k=۲}^{\infty} a_k z^k \qquad (۱)$$

روی دیسک واحد $\Delta = \{z: z \in \mathbb{C}, |z| < ۱\}$ و $\mathcal{T}$ زیر کلاسی از S شامل توابع تک ارز به‌فرم

$$f(z) = z - \sum_{k=۲}^{\infty} a_k z^k \qquad (۲)$$

باشد که تحلیلی روی دیسک واحد Δ هستند.

در این پایان نامه کلاس‌های مختلفی را بررسی می‌کنیم. این کلاس‌ها از تأثیر عملگرهای خاص روی توابع تحلیلی ذکر شده و صدق کردن در شرایط ویژه تولید می‌شوند.

برای مثال کلاس $\mathcal{U}(\lambda)$ عبارت است از تمام توابع تحلیلی به فرم (۱) که در شرط زیر صدق کنند

$$\left| f'(z) \left(\frac{z}{f(z)} \right)^{۲} - ۱ \right| \leq \lambda \,, z \in \Delta$$

همچنین شرایطی را روی λ بدست می‌آوریم، به‌طوریکه کلاس $\mathcal{U}(\lambda)$ ستاره‌گون یا تک ارز باشد.

در بخش‌های دیگر خواص ستاره‌گونی و تحدب یکسری از عملگرهای انتگرالی و دیفرانسیلی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

واژه های کلیدی: تحلیلی، تک ارز، تابع ستاره‌گون، تابع محدب.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱-۱ مقدمه

مطالعه بر روی توابع تک ارز، امروزه شامل بررسی خانواده‌های خاصی از توابع تحلیلی و تک ارز در دامنه‌های از پیش تعریف شده می‌شود. در بسیاری از موارد و کارهای انجام شده، توابع مورد استفاده در شرایط نرمالیزه $(f(\circ) = f'(\circ) - ۱ = \circ)$ صدق می‌کنند.کوبه[۱] در سال ۱۹۰۷ توانست نتایج واقعی و مورد اعتماد را از نظریه توابع تک ارز استخراج نماید. او توانست تخمین‌های بسیار شناخته شده‌ای را قبل از سایر ریاضیدانان قرن بیستم در مورد نظریه توابع تک ارز ارائه دهد.

اولین زیرکلاس اختصاصی متعلق به خانواده توابع تک ارز، توابع محدب می‌باشند که توسط استادی[۲] معرفی گردید. اینها توابعی هستند که فضای $|z| < ۱$ را به دامنه‌های محدب می نگارند. این توابع بعداً توسط گرونوال[۳] و لاونر[۴] و افراد دیگری مورد بررسی قرار گرفتند. پس از آن کلاسی از توابع ستاره‌گون توسط الکساندر[۵] و پس از او توسط نوانلینا[۶] و دیگران معرفی گردید. پس از آن روش‌های قدرتمند بسیاری توسط نویسندگان دیگری ارائه گردیده است. ارائه این نظریات موجب گردیده است که نظریه

---

[۱] Koebe
[۲] Study
[۳] Gronwall
[۴] Lowner
[۵] Alexander
[۶] Nevanlinna

توابع تک ارز به سمت توابع چند ارز گسترش پیدا کند. بسیاری از نویسندگان روش‌های قدیمی مورد استفاده در توابع تک ارز را در توابع p–ارز مورد استفاده قرار دادند.

در بخش دوم این فصل به تعاریف، قضایا و لم‌های مورد نیاز در کل پایان نامه پرداخته می‌شود.

در فصل دوم و سوم با استفاده از عملگرهای انتگرالی کوماتو[۱] و مشتقی راشویه[۲] خواص کلاسهایی از توابع تحلیلی و تک ارزی را مورد بررسی قرار داده‌ایم. فصل چهارم شامل دو بخش است، که بخش اول نتیجه‌ای از فصول ۲ و ۳ است و در بخش دوم با استفاده از ترکیب عملگرهای راشویه و سالاگن[۳] اپراتوری جدید معرفی کرده و با استفاده از آن به بررسی خواص کلاس تعریف شده می‌پردازیم.

این پایان نامه بر اساس مقالات

Obradovi´c, M., Ponnusamy, S. *Univalence and starlikeness of certain transforms defined by convolution of analytic functions,* J. Math. Anal. Appl. 336 (2007), 758–767.

و

Raina, R. K., Bapna, I. B. *On the Starlikeness and Convexity of a Certain Integral Operator,* Southeast Asian Bulletin of Mathematics. 33 (2009), 101–108.

در فصول ۵ و ۶ نوشته شده است.

از این پایان نامه مقاله

Radius of Starlike and Partial Sum Property for Holomorphic Functions Defined by Komatu Operator.

حاصل شده است که در چهل و یکمین کنفرانس ریاضی ارائه شده است.

---

[۱] Komatu Operator
[۲] Ruscheweyh Derivative
[۳] Salagean

۱-۲ تعاریف اولیه

در این بخش تعاریف مقدماتی، لم‌ها و قضایای مورد نیاز در طول پایان نامه را بیان می کنیم.

تعریف ۱-۲-۱ فرض کنیم Ω زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{C}$ و $f:\Omega \mapsto \mathbb{C}$ یک تابع مختلط باشد. گوییم f در نقطه‌ی $z_\circ \in \Omega$ مشتق پذیر است هرگاه حد زیر موجود باشد،

$$f'(z_\circ) = \lim_{z \to z_\circ} \frac{f(\mathrm{z}) - f(z_\circ)}{\mathrm{z} - z_\circ}.$$

هرگاه f در هر نقطه ی $z_\circ \in \Omega$ مشتق پذیر باشد، گوییم f در Ω تحلیلی[۱] است.

تعریف ۱-۲-۲ دیسک واحد را در صفحه‌ی مختلط به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq ۱\}.$$

تعریف ۱-۲-۳ تابع $f(z)$ را در Δ تک ارز[۲](یک به یک) گوئیم، هرگاه برای هر $z_۱$ و $z_۲$ در Δ که $z_۱ \neq z_۲$ داشته باشیم $f(z_۱) \neq f(z_۲)$.

گاهی اوقات نشان دادن این‌که تابع مختلط f تک ارز است مشکل می‌باشد. در سال ۱۹۷۳ کادریاشف[۳] ماکزیمم مقدار M را چنان پیدا کرد که اگر نامساوی $\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leq M$ برقرار باشد، آنگاه f یک تابع تک ارز است. وی همچنین نشان داد اگر $M = M_\circ = ۳/۰۵ \ldots$ ریشه معادله ی زیر باشد،

$$۸[(M-۲)^۳]^{\frac{۱}{۲}} - ۳(۳-M)^۲ = ۱۲\,,$$

و

$$\left|\frac{f''(\mathrm{z})}{f'(\mathrm{z})}\right| \leq M_\circ = ۳/۰۵ \ldots,$$

---

[۱] Analytic
[۲] Univalent
[۳] Kudryashov

آنگاه f در Δ تک ارز است. ماکزیمم مقدار M نمی‌تواند بیشتر از π باشد، به‌عنوان مثال تابع $f\,(\mathrm{z}) = e^{\lambda \mathrm{z}}$، در شرط $\left|\frac{f''(\mathrm{z})}{f'(\mathrm{z})}\right| = |\lambda|$ صدق می کند، این تابع تک ارز است اگر و تنها اگر $|\lambda| < \pi$.

مثال ۱-۲-۴ تابع $f\,(\mathrm{z}) = \frac{z}{(1-\mathrm{z})^{2}} = z + 2z^{2} + \cdots$ را در نظر می‌گیریم. این تابع در Δ تحلیلی و تک ارز است. این تابع اهمیت خاصی در نظریه‌ی توابع تحلیلی دارد و به تابع کوبه[1] معروف است.

قضیه ۱-۲-۵ (حدس بایبر باخ[2]) اگر f یک تابع تحلیلی و تک ارز باشد آنگاه،

$$|a_2| \leq 2.$$

برهان. به مرجع [۱۹] مرا جعه شود.

تعریف ۱-۲-۶ (نگاشت همدیس[3]) نگاشت پیوسته ای که اندازه‌ی زاویه‌ی بین خم های مار بر یک نقطه مفروض z_0 را حفظ نماید، را حافظ زاویه در z_0 گوییم. اگر $f(z)$ در z_0 حافظ زاویه باشد و بعلاوه جهت زوایای بین خم‌های مار بر نقطه ی z_0 را نیز حفظ نماید، گوییم $f(z)$ در z_0 همدیس است.

مثال ۱-۲-۷ نگاشت $f(z) = z^2$ در هر نقطه‌ی $z \neq 0$ همدیس است، زیرا مشتق آن یعنی $f'(z) = 2z$ در z_0، مخالف صفر است. اما $f(z) = z^2$ در نقطه‌ی $z = 0$، که f' صفر می‌شود، همدیس نیست. زیرا در واقع

$$arg f(z) = arg z^2 = 2 arg z.$$

این نگاشت هر زاویه به رأس مبدأ مختصات را دو برابر می‌کند.

تعریف ۱-۲-۸ مجموعه‌ی $E \subseteq \mathbb{C}$ را نسبت به نقطه ی ω_0 ستاره‌گون[4] گوئیم هرگاه هر پاره خطی که نقاط E را به ω_0 وصل می‌کند دقیقاً داخل E باشد.

[1] Koebe Function
[2] Bieberbach's Theorem
[3] Conformal Map
[4] Starlike

تعریف ۱-۲-۹ تابع تحلیلی f را در Δ ستاره‌گون نامیم، هرگاه $f(\Delta)$ نسبت به مبدأ ستاره‌گون باشد. مجموعه‌ی تمام توابع تحلیلی ستاره‌گون مانند f که در شرط نرمالیزه $f(۰)=۰$ و $f'(۰)=۱$ صدق می‌کنند را با $\mathcal{S}^*$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱-۲-۱۰ فرض کنیم f یک تابع تحلیلی و تک ارز باشد. در این صورت $f \in \mathcal{S}^*$ اگر و تنها اگر،

$$Re\left(\frac{zf^{'}(z)}{f(z)}\right)>۰, \qquad (\mathrm{z}\in\Delta).$$

برهان. به مرجع [۳] مراجعه شود.

مثال ۱-۲-۱۱ تابع $f(\mathrm{z})=\frac{z}{(۱-\mathrm{z})^۲}$ تابعی تحلیلی و تک ارز بوده و در $|z|<۱$ ستاره‌گون می‌باشد، زیرا

$$Re\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)=Re\left(\frac{۱+z}{۱-\mathrm{z}}\right)>۰.$$

لم ۱-۲-۱۲ فرض کنیم f یک تابع تحلیلی و تک ارز باشد. در این‌صورت $f \in \mathcal{S}^*$ اگر و تنها اگر، f هر قرص $|z|<r<۱$ را بر یک ناحیه‌ی ستاره‌گون بنگارد .

برهان. به مرجع [۹] مراجعه شود.

تعریف ۱-۲-۱۳ تابع تحلیلی و تک ارز f را ستاره‌گون از مرتبه ی $۰\le\mu<۱$ گوییم هرگاه،

$$Re\left(\frac{zf^{'}(z)}{f(z)}\right)>\mu.$$

کلاس توابع ستاره‌گون از مرتبه μ را با نماد $\mathcal{S}^*(\mu)$ نشان می‌دهیم. می‌توان نشان داد که اگر

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-۱\right|<۱-\mu.$$

آنگاه f ستاره‌گون از مرتبه μ است.

مثال ۱-۲-۱۴ تابع $f(z)=\frac{z}{(1-z)^{2-2\mu}}$ ستاره‌گون از مرتبه‌ی $0 \le \mu < 1$ می باشد.

تعریف ۱-۲-۱۵ مجموعه‌ی $E \subseteq \mathbb{C}$ محدب[1] است هرگاه نسبت به هر نقطه اش ستاره‌گون باشد. یعنی هر پاره‌خطی که دو نقطه از E را به هم وصل می کند، در داخل E قرار بگیرد.

تعریف ۱-۲-۱۶ تابعی که دیسک واحد را به طور همدیس به یک دامنه ی محدب بنگارد، تابع محدب نامیده می شود.

مجموعه‌ی توابع تحلیلی محدب که در شرط نرمالیزه صدق کنند را با $\mathcal{K}$ نشان می‌دهیم.

لم ۱-۲-۱۷ فرض کنیم f یک تابع تحلیلی و تک ارز باشد. در این‌صورت $f \in \mathcal{K}$ اگر و تنها اگر f هر قرص $|z| < r < 1$ را بر یک حوزه‌ی محدب بنگارد.

برهان. به مرجع [۹] مراجعه شود.

قضیه ۱-۲-۱۸ فرض کنیم f یک تابع تحلیلی در Δ باشد. در این‌صورت $f \in \mathcal{K}$ اگر و تنها اگر

$$Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0, \qquad (z \in \Delta).$$

برهان. به مرجع [۸] مراجعه شود.

مثال ۱-۲-۲۰ تابع $f(z)=\frac{z}{1-z}=z+\sum_{n=2}^{\infty} z^n$ روی Δ یک تابع محدب است.

تعریف ۱-۲-۲۱ تابع تحلیلی و تک ارز f را محدب از مرتبه‌ی $0 \le \mu < 1$ گوییم هرگاه،

---

[1] Convex

$$Re\left(۱+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\mu\,,\qquad (z\in\Delta).$$

مجموعه این توابع را با $\mathcal{K}(\mu)$ نشان می‌دهیم.

می‌توان نشان داد که اگر

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-۱\right|<۱-\mu.$$

آنگاه f محدب از مرتبه μ است.

قضیه ۱-۲-۲۲ (قضیه الکساندر[۱]) فرض کنیم f یک تابع تحلیلی در Δ باشد که در شرط نرمالیزه صدق می‌کند، در این‌صورت $f\in\mathcal{K}$ اگر و تنها اگر $zf'(z)\in\mathcal{S}^*$.

برهان. قرار می‌دهیم $g(z)=zf'(z)$، لذا داریم

$$\frac{zg'(z)}{g(z)}=۱+\frac{zf''(z)}{f'(z)}.$$

بنابراین حکم برقرار است.■

تعریف ۱-۲-۲۳ تابع f را محدب وار یا نزدیک به محدب[۲] گوییم هرگاه $h\in\mathcal{K}$ موجودباشد چنان‌که

$$Re\left(\frac{f'(z)}{h'(z)}\right)>۰.$$

کلاس توابع محدب وار را با C نمایش می‌دهیم.

می‌توان نشان داد که اگر

---

[۱] Alexander's Theorem
[۲] Close-to-Convex

$$|f'(z)-۱|<۱-\mu.$$

آنگاه f محدب وار از مرتبه μ است.

طبق قضیه الکساندر $h\in\mathcal{K}$ اگر و تنها اگر $zh'\in\mathcal{S}^*$، حال اگر قرار دهیم $zh'=g(z)$ آنگاه $g\in\mathcal{S}^*$، لذا رابطه‌ی فوق را به‌فرم

$$Re\left(\frac{z\,f'(z)}{g(z)}\right)>۰,$$

می توان نوشت. بنابراین f را محدب وار گوییم هرگاه $g\in\mathcal{S}^*$ موجود باشد چنان‌که

$$Re\left\{\frac{z\,f'(z)}{g(z)}\right\}>۰.$$

قضیه ۱–۲–۲۴ داریم $\mathcal{K}\subset\mathcal{S}^*\subset C$ در نتیجه تمامی توابع محدب وستاره گون، محدب وارند.

برهان. فرض کنیم $f\in\mathcal{S}^*$ پس $Re\left(\frac{z\,f'(z)}{f(z)}\right)>۰$. بنا بر قضیه‌ی الکساندر $g\in\mathcal{K}$ وجود دارد چنانکه، $f(z)=zg'(z)$. در نتیجه

$$Re\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\}=Re\left\{\frac{z\,f'(z)}{f(z)}\right\}>۰.$$

و لذا $f\in C$.

لم ۱–۲–۲۵ (لم شوارتز[۱]) فرض کنیم $\omega(۰)=۰$ (ω در Δ تحلیلی است) و به ازای هر $z\in\Delta$، $|\omega(z)|\le ۱$. در این صورت

$$\left|\omega'(z)\right|\le ۱,\qquad \left|\omega(z)\right|\le |z|,\qquad (z\in\Delta).$$

تعبیر هندسی این مطلب بدین صورت است که ω یک نگاشت تحلیلی از Δ به توی Δ است، که مبدأ را ثابت نگه می‌دارد یا $z\in\Delta-\{۰\}$ را از آنچه بوده به مبدأ نزدیک‌تر می‌سازد.

[۱] Schwarez's lemma

برهان. به مرجع [۱۹] مراجعه شود.

تذکر ۱-۲-۲۶ تابعی که در لم شوارتز صدق کند به تابع شوارتز معروف است.

تعریف ۱-۲-۲۷ فرض کنیم توابع f و g تحلیلی باشند و

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n,\quad g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n\ .$$

ضرب پیچشی[1] f و g را که با نماد $f*g$ نمایش می‌دهیم، بصورت زیر تعریف می‌شود

$$(f*g)(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_nz^n.$$

تعریف ۱-۲-۲۸ فرض کنیم f و g دو تابع تحلیلی در Δ باشند. گوییم تابع f پیرو[2] تابع g است و می‌نویسیم $f\prec g$، هر گاه تابع شوارتزی مانند $\omega(z)$ موجود باشد به‌طوریکه،

$$f(\mathrm{z})=g\left(\omega(\mathrm{z})\right),\quad (z\in\Delta).$$

تعریف ۱-۲-۲۹ فرض کنیم $0<x<\infty$. انتگرال $\Gamma(x)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\mathrm{t}^{x-1}\mathrm{dt}$، که یک انتگرال همگرا می باشد را تابع گاما می‌نامند.

تعریف ۱-۲-۳۰ فرض کنیم a و b و c اعداد مختلط باشند و $c\neq 0,-1,-2,\dots$. تابع

$$F(a,b;c;z)=1+\frac{ab}{1!\,c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{2!\,c(c+1)}z^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_kk!}\,z^k\,,$$

که $(a)_k:=a(a-1)\dots(a+k-1),(a)_0=1;\ (k\in\mathbb{N})$. تابع فوق هندسی گاوس[3] نام دارد. سری فوق به ازای $z\in\Delta$ به‌طور مطلق همگراست. لذا تابع فوق هندسی گاوس در Δ تحلیلی است.

---

[1] convolution
[2] Subordinate
[3] Gaussian hypergeometric function

تعریف ۱-۲-۳۱ عبارت

$$F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_{\circ}^{۱} t^{b-۱}(۱-t)^{c-b-۱}\,(۱-tz)^{-a} dt.$$

به عبارت انتگرالی اویلر[۱] مشهور است.

قضیه ۱-۲-۳۲ (نامساوی کوشی-شوارتز)[۲] اعداد مختلط a و b مفروض‌اند. در این صورت،

$$\left|\sum_{k=۱}^{n} \mathrm{a_k b_k}\right|^{۲} \leq \left(\sum_{k=۱}^{n} |\mathrm{a_k}|\right)^{۲} \left(\sum_{k=۱}^{n} |\mathrm{b_k}|\right)^{۲}.$$

قضیه ۱-۲-۳۳ (قضیه مساحت[۳]) اگر

$$f(z) = \frac{۱}{z} + \sum_{k=\circ}^{\infty} a_k z^k$$

آنگاه $\sum_{k=\circ}^{\infty} k|a_k|^{۲} \leq ۱$.

برهان. به مرجع [۴] مراجعه شود.

لم ۱-۲-۳۴ اگر

$$f(z) = ۱ + \sum_{k=n+۱}^{\infty} a_k z^k$$

و $Re\, f(z) > \circ$ آنگاه $|a_k| \leq ۲$.

برهان. به مرجع [۸] مراجعه شود.

---

[۱] Euler integral
[۲] Cauchy-schwarz inequality
[۳] Area Theorem