بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

دانشگاه خوارزمی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

رساله‌ی دکتری ریاضی

ریاضی محض (آنالیز)

عنوان

قاب‌ها و تعمیم‌های آن در فضاهای هیلبرت و C^*-مدول‌های هیلبرت

تدوین

مرتضی میرزائی ازندریانی

استاد راهنما

دکتر امیر خسروی

آذر ۱۳۹۱

بسمه تعالی

تاریخ: ۹۱/۹/۲۸
شماره: ....
پیوست: ....
واحد: ....

دانشگاه خوارزمی

صورتجلسهٔ دفاع از رسالهٔ دکتری ریاضی محض

به شکرانهٔ الهی جلسهٔ دفاعیهٔ رسالهٔ دکتری (Ph.D) آقای **مرتضی میرزائی ازندریانی** دانشجوی دورهٔ دکتری ریاضی محض (Ph.D) دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر در تاریخ ۹۱/۹/۲۸ با حضور هیأت داوران به شرح ذیل تشکیل گردید:

۱ـ آقای دکتر امیر خسروی (استاد راهنما)

۲ـ آقای دکتر علیرضا مدقالچی (داور داخلی)

۳ـ آقای دکتر عبدالرسول پورعباس (داور خارجی)

۴ـ آقای دکتر محمدباقر اسدی (داور خارجی)

آقای **مرتضی میرزائی ازندریانی** نتایج اصلی رسالهٔ خود را با عنوان

قاب‌ها و تعمیم‌های آن در فضاهای هیلبرت و C^*ـمدول‌های هیلبرت

طی سمیناری ارائه و به سئوالات هیأت داوران پاسخ دادند. هیأت داوران با توجه به محتویات رساله و این که مقاله‌های زیر از رسالهٔ ایشان استخراج شده است، صلاحیت نامبرده را برای احراز درجهٔ دکتری ریاضی محض گرایش آنالیز در سطح عالی مورد تائید قرار دادند.

1) Amir Khosravi and M. Mirzaee Azandaryani, *Fusion frames and g-frames in tensor product and direct sum of Hilbert spaces*, Appl. Anal. Discrete Math, **6**, 287-303 (2012).

2) Amir Khosravi and M. Mirzaee Azandaryani, *G-frames and direct sums*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., to appear.

3) Amir Khosravi and M. Mirzaee Azandaryani, *Bessel multipliers in Hilbert C^*-modules*, Submitted.

4) Amir Khosravi and M. Mirzaee Azandaryani, *Approximate duality of g-frames in Hilbert spaces*, Submitted.

دکتر امیر خسروی

دکتر علیرضا مدقالچی

دکتر عبدالرسول پورعباس

دکتر محمدباقر اسدی

اسمعیل بابلیان

رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

تهران: خیابان شهید مفتح نرسیده به خیابان انقلاب ـ شماره ۴۳ ـ دانشگاه خوارزمی، کد پستی ۱۵۷۱۹-۱۴۹۱۱، تلفن: ۳-۸۸۳۲۹۲۲۰
کرج: خیابان شهید بهشتی ـ میدان دانشگاه ـ دانشگاه خوارزمی، کد پستی: ۳۱۹۷۹-۳۷۵۵۱، تلفن: ۰۲۶-۳۴۵۷۹۶۰۰
Kharazmi University, No. 43, Shahid Mofateh Ave.- Tehran, Iran
Tel. +98 21 88329220-3 www.khu.ac.ir

اظهارنامه

همه‌ی نتایج موجود در فصل‌های ۲، ۳ و ۴ که بدون مرجع ارائه شده‌اند، اصیل هستند.
مقاله‌های زیر از این رساله استخراج شده‌اند:

1. Amir Khosravi and M. Mirzaee Azandaryani, *Fusion frames and g-frames in tensor product and direct sum of Hilbert spaces*, Appl. Anal. Discrete Math., **6**, 287-303 (2012).

2. Amir Khosravi and M. Mirzaee Azandaryani, *G-frames and direct sums*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., to appear.

3. Amir Khosravi and M. Mirzaee Azandaryani, *Bessel multipliers in Hilbert C^*- modules*, Submitted.

4. Amir Khosravi and M. Mirzaee Azandaryani, *Approximate duality of g-frames in Hilbert spaces*, Submitted.

تقدیر و تشکر

در ابتدا بر خود لازم می‌دانم، تشکر صمیمانه و قلبی خود را از استاد راهنمایم جناب آقای دکتر امیر خسروی به خاطر راهنمایی‌ها و کمک‌های ایشان در طی دوره‌ی تحصیلی دکتری ابراز دارم. اگر چه تجربیاتی که ایشان در اختیار بنده قرار داده‌اند و زحماتی را که در این دوره به ویژه در آماده کردن این رساله متحمل شده‌اند، جبران‌ناپذیر است.

همچنین بر خود لازم می‌دانم از داوران رساله‌ام آقایان دکتر عبدالرسول پورعباس، دکتر محمد باقر اسدی و دکتر علیرضا مدقالچی که با دقت این رساله را خوانده و نکات باارزشی را برای بهتر شدن محتوای آن پیشنهاد کرده‌اند، قدردانی کنم.

در پایان از خانواده‌ام و به ویژه پدر و مادرم به خاطر تمامی زحماتشان در طول دوران زندگی و تحصیلم کمال تشکر را دارم.

فهرست مندرجات

چکیده

در این رساله به مطالعه و بررسی برخی از ویژگی‌های قاب‌ها، g—قاب‌ها و قاب‌های مخلوط در فضاهای هیلبرت و C^*—مدول‌های هیلبرت می‌پردازیم. در ابتدا نشان می‌دهیم تحت یک سری از شرایط، حاصلجمع مستقیم تعداد شمارایی از g—قاب‌ها (g—پایه‌های ریس) یک g—قاب (g—پایه‌ی ریس) برای فضای حاصلجمع مستقیم می‌باشد. همچنین نشان می‌دهیم حاصلضرب تانسوری تعداد متناهی از g—قاب‌ها (به ترتیب قاب‌های مخلوط، قاب‌ها، g—پایه‌های ریس) یک g—قاب (به ترتیب قاب مخلوط، قاب، g—پایه‌ی ریس) برای فضای حاصلضرب تانسوری است و برعکس. علاوه بر این حاصلجمع مستقیم و حاصلضرب تانسوری تجزیه‌های یکانی اتمی، g—دوگان‌ها، دوگان‌های متقابل، g—پایه‌های متعامدیکه و قاب‌های مخلوط دقیق را مورد توجه و بررسی قرار می‌دهیم. در ادامه به مطالعه‌ی دوگان‌های تقریبی قاب‌ها می‌پردازیم و مفهوم دوگانی تقریبی را برای g—قاب‌ها در فضاهای هیلبرت معرفی نموده و برخی از نتایج به دست آمده در مورد دوگان‌های تقریبی قاب‌ها را به g—قاب‌ها تعمیم می‌دهیم. علاوه بر این برخی از کاربردهای مهم دوگان‌های تقریبی را به دست می‌آوریم مخصوصاً اینکه نشان می‌دهیم دوگان‌های تقریبی تحت اختلال‌های کوچک پایا هستند و برای پاک کننده‌ها و عمل بازسازی مفید می‌باشند. در فصل چهارم ضربگرهای بسل، g—ضربگرهای بسل و ضربگرهای مخلوط بسل را در C^*—مدول‌های هیلبرت معرفی کرده و نشان می‌دهیم ضربگرهای بسل در C^*—مدول‌های هیلبرت بسیاری از خواص ضربگرهای بسل در فضاهای هیلبرت را دارا می‌باشند. در پایان با استفاده از ضربگرهای بسل، مفهوم دوگانی تقریبی قاب‌ها را در C^*—مدول‌های هیلبرت معرفی نموده و بعضی از نتایج به دست آمده در مورد دوگان‌های تقریبی در فضاهای هیلبرت را به C^*—مدول‌های هیلبرت تعمیم می‌دهیم.

کلمات کلیدی

فضای هیلبرت، قاب، g–قاب، قاب مخلوط، دنباله‌ی بسل، g–دنباله‌ی بسل، دنباله‌ی مخلوط بسل، حاصلضرب تانسوری، حاصلجمع مستقیم، C^*–مدول هیلبرت، ضربگر بسل، g–ضربگر بسل، ضربگر مخلوط بسل، پایه‌ی ریس، g–پایه‌ی ریس، g–پایه‌ی متعامدیکه، پایه‌ی ریس مدولی، g–قاب تنگ، g–قاب پارسوال، اختلال، بازسازی، دوگان، دوگان کانونی، g–دوگان، دوگان متقابل، دوگان تقریبی، تجزیه‌ی یکانی اتمی.

رده‌بندی موضوعی ریاضی 2010: 65T60، 46H25، 46L08، 41A58، 42C40، 42C15.

مقدمه

قاب‌ها در فضاهای هیلبرت نخستین بار توسط دافین[۱] و شیفر[۲] [DS] در سال ۱۹۵۲ معرفی شدند و در سال ۱۹۸۶ توسط دوبچیز[۳] ، گراسمان[۴] و مِیِر[۵] در [DGM] توسعه یافتند. قاب‌ها کاربردهای فراوانی در علم و صنعت دارند به عنوان مثال آنها در توصیف فضاهای تابعی و دیگر زمینه‌ها مانند نظریه‌ی بانک فیلتر، پردازش اطلاعات، کوانتیزه سازی به روش سیگما—دلتا و ارتباطات بی‌سیم مورد استفاده قرار می‌گیرند (برای اطلاعات بیشتر مراجع [BHF, BPY, CD, HP] را مشاهده نمایید). به طور کلی قاب‌ها تعمیمی از پایه‌های متعامدیکه هستند و این امکان را به ما می‌دهند که هر عضو از یک فضای هیلبرت را به صورت یک ترکیب خطی متناهی یا نامتناهی (نه لزوماً منحصر به فرد) از اعضای یک قاب نمایش دهیم و چون نمایش‌های متفاوت یک عضو با استفاده از یک قاب بر خلاف تجزیه‌ی منحصر به فرد بر حسب پایه‌های متعامدیکه باعث ایجاد مشکل و محدودیت نمی‌شوند، می‌توانند در کاربرد نقش به سزایی ایفا نمایند. همچنین بسیاری از مشکلات که در تجزیه‌ی سیگنال‌ها بر حسب سری‌های فوریه به وجود می آمدند با نمایش سیگنال‌ها برحسب قاب‌ها برطرف می‌شوند. قاب‌های مخلوط تعمیم‌هایی از قاب‌ها هستند که از زیر فضاهای بسته‌ی یک فضای هیلبرت برای تجزیه‌ی سیگنال‌ها استفاده می‌نمایند. قاب‌های مخلوط توسط کاسازا[۶] و کوتینیوک[۷] در [CK1] معرفی شدند و در [AK, CKL] توسعه یافتند. قاب‌های مخلوط کاربردهای مهمی از جمله در کدگذاری و کدگشایی دارند. سان[۸] در [Sun]، g—قاب‌ها را معرفی نمود و نشان داد که قاب‌ها و قاب‌های مخلوط حالت‌های خاصی از g—قاب‌ها هستند.

C^*—مدول‌های هیلبرت تعمیم‌هایی از فضاهای هیلبرت هستند که همانند فضاهای هیلبرت دارای یک ضرب داخلی می‌باشند با این تفاوت که ضرب داخلی دو عضو از یک C^*—مدول هیلبرت عضوی از یک C^*—جبر است. قاب‌ها، قاب‌های مخلوط و g—قاب‌ها در C^*— مدول‌های هیلبرت نیز معرفی

[۱] Duffin
[۲] Schaeffer
[۳] Daubechies
[۴] Grossmann
[۵] Meyer
[۶] Casazza
[۷] Kutyniok
[۸] Sun

شده‌اند. ابتدا فرانک[۹] و لارسِن[۱۰] در [FL] قاب‌ها را در C^*–مدول‌های هیلبرت معرفی نمودند و سپس ا.خسروی و ب.خسروی، g–قاب‌ها و قاب‌های مخلوط را به C^*–مدول‌های هیلبرت تعمیم دادند. قاب‌ها در C^*–مدول‌های هیلبرت تعمیمی بدیهی از قاب‌ها در فضاهای هیلبرت نیستند و این بخاطر ساختار پیچیده‌ایست که C^*–جبرها دارند. همانطور که می‌دانیم نظریه‌ی C^*–مدول‌های هیلبرت کاملاً متفاوت با فضاهای هیلبرت می‌باشد. به عنوان مثال، می‌دانیم که هر زیر فضای بسته‌ی یک فضای هیلبرت یک مکمل متعامد دارد اما یک C^*–مدول می‌تواند شامل یک زیر مدول بسته باشد که مکمل متعامد ندارد. علاوه بر این قضیه‌ی نمایش ریس برای تابعک‌های خطی پیوسته روی فضاهای هیلبرت، لزوماً در C^*–مدول‌های هیلبرت برقرار نیست و بنابراین عملگرهای خطی کراندارالحاقی ناپذیر روی C^*–مدول‌های هیلبرت می‌توانند وجود داشته باشند. بنابراین انتظار می‌رود پیچیدگی مسائل در مورد قاب‌ها در C^*–مدول‌های هیلبرت به مراتب بیش از فضاهای هیلبرت باشد.

در فصل ۱، به طور خلاصه تعاریف و برخی از خواص مقدماتی قاب‌ها، g–قاب‌ها و قاب‌های مخلوط در فضاهای هیلبرت و C^*–مدول‌های هیلبرت را ذکر می‌کنیم و همچنین مطالبی را که در فصل‌های بعدی به آنها نیاز خواهیم داشت بیان می‌نماییم.

حاصلضرب‌های تانسوری قاب‌ها، قاب‌های مخلوط و g– قاب‌ها اخیراً مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته‌اند، برای اطلاعات بیشتر مراجع [KA1, Bou, KK1] را مشاهده نمایید. در این رساله، با استفاده از نظریه‌ی عملگرها، اثبات‌های متفاوت و جدیدی برای نتایج به دست آمده در مراجع فوق الذکر ارائه می‌دهیم و علاوه براین برخی از خواص حاصلضرب‌های تانسوری قاب‌های مخلوط و g–قاب‌ها را به دست می آوریم.

قاب‌های مخلوط و g–قاب‌ها در اَبَر فضاهای هیلبرت، همانند حاصلضرب‌های تانسوری، اخیراً مورد توجه و مطالعه قرار گرفته‌اند، به عنوان نمونه می‌توان مراجع [KA2, KM, ZSC, AR1] را ذکر نمود. در این رساله ما g–قاب‌ها و قاب‌های مخلوط را در فضای حاصلجمع مستقیم تعداد شمارایی از فضاهای هیلبرت مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل ۲، نشان می‌دهیم تحت برخی از شرایط، حاصلجمع مستقیم تعداد شمارایی از g–قاب‌ها (به ترتیب g– دنباله‌های بسل، g–پایه‌های ریس، g–دوگان‌ها) یک g–قاب (به ترتیب g–دنباله‌ی بسل، g–پایه‌ی ریس، g–دوگان) برای فضای حاصلجمع مستقیم می‌باشد. علاوه بر این نشان می‌دهیم حاصلضرب تانسوری یک تعداد متناهی از g–قاب‌ها (به ترتیب قاب‌های مخلوط، قاب‌ها، g–پایه‌های ریس) یک g–قاب (به ترتیب قاب مخلوط، قاب، g–پایه‌ی ریس) برای فضای حاصلضرب تانسوری است و بر عکس. همچنین ثابت می‌کنیم حاصلضرب تانسوری تجزیه‌های یکانی اتمی، یک تجزیه‌ی

[۹] Frank
[۱۰] Larson

یکانی اتمی است و به عنوان نتیجه‌ای از این مطلب نشان می‌دهیم که حاصلضرب تانسوری دوگان‌ها، یک دوگان در فضای حاصلضرب تانسوری می‌باشد.

دوگانی تقریبی در نظریه‌ی قاب‌ها مخصوصاً در قاب‌های گابور و موجک‌ها کاربردهای فراوانی دارد ([BFHK, WES, GHLW]). دوگانی تقریبی قاب‌ها اخیراً توسط کریستِنسِن[۱۱] و لوگِسِن[۱۲] در [CL] توسعه داده شد و آنها نتایج و کاربردهای مهمی از دوگان‌های تقریبی قاب‌ها را به دست آوردند. با استفاده از دوگان‌های تقریبی می‌توان نتایج مفیدی در مورد اختلال‌ها و بازسازی (مخصوصاً وقتی پیدا کردن دوگان برای قاب مشکل باشد) به دست آورد.

در فصل ۳، مفهوم دوگانی تقریبی را برای g–قاب‌ها معرفی می‌کنیم و برخی از کاربردهای مهم دوگان‌های تقریبی را به دست می‌آوریم. همچنین نتایج جدیدی در مورد دوگان‌های تقریبی قاب‌ها به دست آورده و بعضی از نتایج به دست آمده در مورد دوگان‌های تقریبی قاب‌ها را به g–قاب‌ها تعمیم می‌دهیم. به علاوه نتایج جدیدی در مورد قاب‌های مخلوط و اختلال‌های دوگان‌های تقریبی به دست آورده و نشان می‌دهیم پایایی دوگان‌های تقریبی تحت انواع مختلفی از اختلال‌ها، یکی از خواص مهم آنها است که باعث افزایش کاربردهای آنها می‌شود و همچنین نشان می‌دهیم که برای پاک کننده‌ها و بازسازی مفید هستند.

ضربگرهای بسل در فضاهای هیلبرت توسط بالاز[۱۳] در [Blz1] معرفی شدند. ضربگرهای بسل دارای کاربردهای مهمی می‌باشند به عنوان مثال در [Blz2]، نشان داده شد که در حل مسائل تقریب مفید هستند. ضربگرهای مخلوط بسل و g–ضربگرهای بسل در فضاهای هیلبرت به ترتیب در [LP] و [Rah] معرفی شده‌اند.

در فصل ۴، ضربگرهای بسل، g– ضربگرهای بسل و ضربگرهای مخلوط بسل را در C^*–مدول‌های هیلبرت معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم بسیاری از خواص ضربگرهای بسل در فضاهای هیلبرت را دارا می‌باشند. علاوه بر این با استفاده از ضربگرهای بسل، دوگانی تقریبی را برای قاب‌ها در C^*–مدول‌های هیلبرت معرفی کرده و نشان می‌دهیم دوگان‌های تقریبی در C^*–مدول‌های هیلبرت تحت اختلال‌های کوچک پایا هستند.

[۱۱] Christensen
[۱۲] Laugesen
[۱۳] Balaz

فصل ۱

پیش‌نیازها و مقدمات

این فصل شامل تعاریف و قضایایی از نظریه‌ی فضاهای هیلبرت، C^*–جبرها و C^*–مدول‌های هیلبرت است که در این رساله به آنها نیاز داریم. مراجع مفید برای نظریه‌ی فضاهای هیلبرت [Con]، [Rud] و برای C^*–جبرها و C^*–مدول‌های هیلبرت [Mur] و [Lan] می‌باشند. در این فصل، به طور خلاصه تعاریف و خواص مقدماتی قاب‌ها، g–قاب‌ها و قاب‌های مخلوط در فضاهای هیلبرت را ذکر می‌نماییم. برای مطالعه‌ی بیشتر مراجع [Cas]، [Chr]، [CK1]، [AK]، [CKL] و [Sun] را توصیه می‌کنیم. همچنین در این فصل تعاریف و برخی از خواص قاب‌ها، g–قاب‌ها و قاب‌های مخلوط در C^*–مدول‌های هیلبرت را بیان می‌نماییم. مراجع استاندارد برای نظریه‌ی قاب‌ها در C^*–مدول‌های هیلبرت [FL]، [Arb]، [KK2] و [XZ] می‌باشند.

در سرتاسر این رساله تمام فضاهای هیلبرت جدایی پذیر و تمام مجموعه‌های اندیس گذار زیر مجموعه‌های $\mathbb{N}$ (مجموعه‌ی اعداد طبیعی) هستند.

۱.۱ فضاهای هیلبرت

منظور از یک نرم روی فضای برداری X نگاشتی مانند $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ است به طوری که:

آ) $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$؛

ب) برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $x \in X$، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$؛

پ) برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

هر نرم روی X یک متر به صورت $d(x, y) = \|x - y\|$ روی آن تعریف می‌کند. فضای نرمدار $(X, \|\cdot\|)$ را فضای باناخ نامیم هرگاه (X, d) فضای متریک کامل باشد. فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند.

نرم یک عملگر خطی $T : X \longrightarrow Y$ را به صورت

$$\|T\| = \sup\Big\{\|T(x)\| : \ x \in X, \ \|x\| \leq ۱\Big\}$$

تعریف می‌کنیم و آن را نرم عملگری T می‌نامیم.
عملگر خطی T را کراندار نامیم هرگاه $\|T\| < \infty$. به سادگی نتیجه می‌شود که عملگر خطی T کراندار است اگر و تنها اگر T پیوسته باشد. فضای باناخ همه‌ی تابعک‌های خطی کراندار بر X را با نماد X^* نشان می‌دهیم.

فرض کنیم X یک فضای نرمدار و $\sum_{n=۱}^{\infty} x_n$ یک سری در فضای X باشد. سری $\sum_{n=۱}^{\infty} x_n$ را همگرای نامشروط می‌نامیم اگر برای هر جایگشت σ از $\mathbb{N}$، سری $\sum_{n=۱}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ همگرا باشد. سری $\sum_{n=۱}^{\infty} x_n$ به طور ضعیف و نامشروط کوشی نامیده می‌شود اگر برای هر جایگشت σ از $\mathbb{N}$، $\Big\{\sum_{k=۱}^{n} x_{\sigma(k)}\Big\}_n$ یک دنباله‌ی به طور ضعیف کوشی باشد. پس اگر I یک مجموعه‌ی اندیس گذار شمارا باشد، آنگاه $\sum_{i\in I} x_i$ در X به طور ضعیف و نامشروط کوشی است اگر و فقط اگر برای هر $\tau \in X^*$، سری $\sum_{i\in I} |\tau(x_i)|$ همگرا باشد.

۱.۱.۱ تعریف فضای برداری H را یک فضای ضرب داخلی می‌نامیم هرگاه تابعی مانند $\langle .,. \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ موجود باشد به طوریکه:

آ) $\langle \alpha f + \beta g, h\rangle = \alpha\langle f, h\rangle + \beta\langle g, h\rangle$؛

ب) $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$؛

پ) $\langle f, f\rangle \geq ۰$؛

ت) اگر $\langle f, f\rangle = ۰$، آنگاه $f = ۰$.

که $f, g, h \in H$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. تابع $\langle .,. \rangle$ را ضرب داخلی می‌نامیم. اگر $\langle f, g\rangle = ۰$، آنگاه f و g را متعامد می‌نامیم. اگر H یک فضای ضرب داخلی باشد، می‌توان نشان داد که $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{۱}{۲}}$ یک نرم روی H تعریف می‌کند. بنابراین هر فضای ضرب داخلی یک فضای نرمدار است. اگر H با این نرم کامل باشد، آنگاه H را یک فضای هیلبرت می‌نامند. بنابراین هر فضای هیلبرت یک فضای باناخ است که نرم آن توسط ضرب داخلی پدید می آید.

ما از قضیه‌ی زیر در فصل ۲ استفاده می‌نماییم:

۲.۱.۱ قضیه [Dis, page 44, Theorems 6 and 8] فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد. در این صورت هر سری به طور ضعیف و نامشروط کوشی، همگرای نامشروط است.

۳.۱.۱ تعریف فرض کنید H یک فضای هیلبرت و $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنباله در H باشد.

آ) $\{f_i\}_{i\in I}$ یک سیستم متعامد نامیده می‌شود اگر $\langle f_i, f_j\rangle = ۰$ وقتی که $i \neq j$.

ب) $\{f_i\}_{i\in I}$ را متعامدیکه می‌نامیم اگر یک سیستم متعامد باشد و برای هر $i \in I$ داشته باشیم $\|f_i\| = ۱$.

پ) $\{f_i\}_{i\in I}$ را کامل می‌نامیم اگر $span\{f_i\}_{i\in I}$ در H چگال باشد و این معادل است با اینکه تنها عضو عمود بر تمام f_i ها، $f = ۰$ باشد. اگر H شامل یک مجموعه‌ی کامل شمارا باشد، آنگاه H را یک فضای هیلبرت جدایی پذیر می‌نامیم.

ت) دو دنباله‌ی $\{f_i\}_{i\in I}$ و $\{g_i\}_{i\in I}$ در H را دومتعامد می‌نامیم هرگاه $\langle f_i, g_i\rangle = ۱$ و $\langle f_i, g_j\rangle = ۰$ وقتی که $i \neq j$.

۴.۱.۱ قضیه فرض کنیم $\{e_i\}_{i\in I}$ یک دنباله‌ی متعامدیکه در H باشد. در این صورت شرایط زیر هم‌ارزند.

آ) $\{e_i\}_{i\in I}$ در H کامل است.

ب) برای هر $f \in H$، داریم $\sum_{i\in I} |\langle f, e_i\rangle|^۲ = \|f\|^۲$.

پ) برای هر $f \in H$، داریم $f = \sum_{i\in I} \langle f, e_i\rangle e_i$.

یک دنباله‌ی متعامد که یکی از شرایط هم‌ارز قضیه‌ی فوق را دارا باشد، یک پایه‌ی متعامدیکه نامیده می‌شود. هر دو پایه‌ی متعامدیکه در یک فضای هیلبرت دارای اعداد اصلی (کاردینال) یکسان هستند. عدد اصلی یک پایه‌ی متعامدیکه در فضای هیلبرت H را بعد H می‌نامیم و آن را با $dimH$ نشان می‌دهیم.

۵.۱.۱ تعریف فرض کنیم H و K دو فضای هیلبرت و $T : H \longrightarrow K$ یک عملگر خطی کراندار باشد.

آ) عملگر منحصر به فرد $T^* : K \longrightarrow H$ که به ازای هر $f \in H$ و $g \in K$ در شرط $\langle Tf, g\rangle = \langle f, T^*g\rangle$ صدق نماید را الحاقی عملگر T می‌نامیم. به آسانی به دست می آید که $\|T^*\| = \|T\|$.

ب) عملگر T را طولپا گوییم هرگاه به ازای هر $f \in H$، داشته باشیم $\|f\| = \|Tf\|$.

پ) فرض کنیم $H = K$. اگر $TT^* = T^*T = Id_H$، آنگاه عملگر T را یکانی می‌نامیم.

ت) عملگر T را فشرده گوییم هرگاه $T(ballH)$ در K دارای بستار فشرده باشد که در آن $ballH = \{f \in H : \|f\| \leq ۱\}$.

اگر H و K دو فضای هیلبرت باشند، آنگاه مجموعه‌ی تمام عملگرهای خطی کراندار از H به توی K را با $L(H, K)$ نمایش می‌دهیم. همچنین $L(H, H)$ با $L(H)$ نمایش داده می‌شود.

۶.۱.۱ تعریف فرض کنیم H یک فضای هیلبرت و M یک زیر فضای بسته H باشد.

آ) زیر فضای بسته‌ی $M^{\perp}=\{g\in H:\langle f,g\rangle=0,\forall f\in M\}$ از H را مکمل متعامد M می‌نامیم.

ب) عملگر خطی $\pi_M:H\longrightarrow H$ که به ازای هر $f\in M$، $\pi_M f=f$ و به ازای هر $g\in M^{\perp}$، $\pi_M g=0$ تصویر متعامد H به روی M نامیده می‌شود.

فرض کنیم $\{H_i\}_{i\in I}$ یک دنباله از فضاهای هیلبرت باشد. در این صورت

$$\oplus_{i\in I}H_i=\Big\{\{f_i\}_{i\in I}:f_i\in H_i,\|\{f_i\}_{i\in I}\|_2^2=\sum_{i\in I}\|f_i\|^2<\infty\Big\},$$

با اعمال نقطه به نقطه و ضرب داخلی

$$\langle\{f_i\}_{i\in I},\{g_i\}_{i\in I}\rangle=\sum_{i\in I}\langle f_i,g_i\rangle,$$

یک فضای هیلبرت است که جمع مستقیم فضاهای هیلبرت H_i نامیده می‌شود. اگر H و K دو فضای هیلبرت باشند، آنگاه $H\oplus K$ را یک اَبَر فضای هیلبرت می‌نامیم.

حاصلضرب تانسوری فضاهای هیلبرت

فرض کنیم H و K دو فضای هیلبرت باشند. حاصلضرب تانسوری جبری آنها را با $H\otimes_{alg}K$ نشان می‌دهیم. این فضا متشکل از تمام ترکیبات خطی متناهی از عناصر به شکل $f\otimes g$ است که $f\in H$ و $g\in K$ (این عناصر تانسورهای ساده نامیده می‌شوند)، برای اطلاعات بیشتر [KR1] را مشاهده نمایید.

۷.۱.۱ قضیه [Mur, Theorem 6.3.1] فرض کنیم H و K دو فضای هیلبرت باشند. در این صورت یک حاصلضرب داخلی منحصربه فرد روی $H\otimes_{alg}K$ موجود است بطوریکه

$$\langle f_1\otimes g_1,f_2\otimes g_2\rangle=\langle f_1,f_2\rangle\langle g_1,g_2\rangle\quad(f_1,f_2\in H,g_1,g_2\in K).$$

فرض کنیم H و K دو فضای هیلبرت ذکر شده در قضیه‌ی بالا باشند. همانطور که مشاهده شد $H\otimes_{alg}K$ یک فضای ضرب داخلی می‌باشد. تکمیل شده‌ی این فضا یک فضای هیلبرت است که آن را با $H\otimes K$ نشان می‌دهیم و آن را حاصلضرب تانسوری H و K می‌نامیم. واضح است که به ازای هر $f\in H$ و $g\in K$ داریم $\|f\otimes g\|=\|f\|\|g\|$.

۸.۱.۱ قضیه [Mur, Lemma 6.3.2] فرض کنید H و K دو فضای هیلبرت باشند و $u\in L(H)$، $v\in L(K)$. در این صورت عملگر منحصر به فرد $u\otimes v\in L(H\otimes K)$ موجود است بطوریکه

$$(u\otimes v)(f\otimes g)=u(f)\otimes v(g)\quad(f\in H,g\in K).$$

به علاوه داریم $\|u\otimes v\|=\|u\|\|v\|$.

فرض کنیم H و K دو فضای هیلبرت باشند و $u_۱, u_۲ \in L(H)$، $v_۱, v_۲ \in L(K)$. به آسانی مشاهده می‌شود که:

$$(u_۱ \otimes v_۱)(u_۲ \otimes v_۲) = u_۱ u_۲ \otimes v_۱ v_۲,$$

و

$$(u_۱ \otimes v_۱)^* = u_۱^* \otimes v_۱^*.$$

اکنون فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ و به ازای هر $۱ \leq k \leq n$، H_k یک فضای هیلبرت باشد. با توجه به نکات ذکر شده فوق $\otimes_{k=۱}^n H_k = H_۱ \otimes \ldots \otimes H_n$ یک فضای هیلبرت است. ضرب داخلی تانسورهای ساده به صورت

$$\langle \otimes_{k=۱}^n f_k, \otimes_{k=۱}^n g_k \rangle = \Pi_{k=۱}^n \langle f_k, g_k \rangle, \quad (f_k, g_k \in H_k),$$

می‌باشد. اگر $U_k \in L(H_k)$، آنگاه $\otimes_{k=۱}^n U_k$ یک عملگر کراندار روی $\otimes_{k=۱}^n H_k$ است و $(\otimes_{k=۱}^n U_k)^* = \otimes_{k=۱}^n U_k^*$، $\| \otimes_{k=۱}^n U_k \| = \Pi_{k=۱}^n \|U_k\|$. توجه شود که اگر به ازای هر $۱ \leq k \leq n$، M_k یک زیر فضای بسته‌ی H_k باشد، آنگاه به راحتی می‌توان مشاهده نمود که $\pi_{\otimes_{k=۱}^n M_k} = \otimes_{k=۱}^n \pi_{M_k}$.

برای مطالعه‌ی بیشتر در مورد حاصلضرب تانسوری فضاهای هیلبرت به [KR1] و [KR2] رجوع شود.

۲.۱ قاب‌ها، g–قاب‌ها و قاب‌های مخلوط در فضاهای هیلبرت

۱.۲.۱ تعریف فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد. دنباله‌ی $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I} \subseteq H$ یک قاب برای H است اگر دو عدد مثبت A و B موجود باشند بطوریکه برای هر $f \in H$ داشته باشیم:

$$A\|f\|^۲ \leq \sum_{i\in I} |\langle f, f_i \rangle|^۲ \leq B\|f\|^۲.$$

در این حالت $\mathcal{F}$ را یک (A, B)–قاب می‌نامیم.

A و B کران‌های قاب نامیده می‌شوند (A را یک کران پایین و B را یک کران بالا می‌نامیم). سوپریمم مجموعه‌ی متشکل از تمام کران‌های پایین را کران پایین بهینه و اینفیمم مجموعه‌ی متشکل از تمام کران‌های بالا را کران بالای بهینه می‌نامیم. اگر در تعریف فوق $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ در نامساوی سمت راست صدق کند، آنگاه $\mathcal{F}$ را یک دنباله‌ی بسل می‌نامیم. یک قاب را تنگ گوییم هر گاه $A = B$ و آن را پارسوال گوییم اگر $A = B = ۱$.

۲.۲.۱ تعریف فرض کنیم $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ یک دنباله‌ی بسل باشد. در این صورت

آ) عملگر ترکیبی $\mathcal{F}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_{\mathcal{F}} : \ell^{2}(I) \longrightarrow H, \quad T_{\mathcal{F}}(\{c_i\}_{i\in I}) = \sum_{i\in I} c_i f_i.$$

به آسانی می‌توان مشاهده نمود که $T_{\mathcal{F}}$ خوشتعریف و کراندار است.

ب) الحاقی عملگر $T_{\mathcal{F}}$، که $T^{*}_{\mathcal{F}}(f) = \{\langle f, f_i\rangle\}_{i\in I}$ است، عملگر تحلیلی $\mathcal{F}$ نامیده می‌شود.

پ) $S_{\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}}T^{*}_{\mathcal{F}}$ عملگر بسل $\mathcal{F}$ نامیده می‌شود و به ازای هر $f \in H$ داریم:

$$S_{\mathcal{F}} f = \sum_{i\in I} \langle f, f_i\rangle f_i.$$

اگر $\mathcal{F}$ یک (A, B)–قاب باشد، آنگاه $A.Id_H \leq S_{\mathcal{F}} \leq B.Id_H$. حال تعریف می‌کنیم $\widetilde{f}_i = S^{-1}_{\mathcal{F}} f_i$. اکنون برای هر $f \in H$، داریم:

$$\sum_{i\in I} \langle f, \widetilde{f}_i\rangle f_i = f = \sum_{i\in I} \langle f, f_i\rangle \widetilde{f}_i.$$

دنباله‌ی $\widetilde{\mathcal{F}} = \{\widetilde{f}_i\}_{i\in I}$ یک $(\frac{1}{B}, \frac{1}{A})$–قاب برای H است که آن را دوگان کانونی $\mathcal{F}$ می‌نامیم. دنباله‌ی بسل $\{g_i\}_{i\in I}$ یک دوگان برای دنباله‌ی بسل $\{f_i\}_{i\in I}$ نامیده می‌شود اگر برای هر $f \in H$، داشته باشیم

$$f = \sum_{i\in I} \langle f, f_i\rangle g_i,$$

یا اگر تساوی زیر که هم‌ارز تساوی فوق است برقرار باشد:

$$f = \sum_{i\in I} \langle f, g_i\rangle f_i.$$

۳.۲.۱ قضیه [Chr, Theorem 5.4.1] دنباله‌ی $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای H است اگر و تنها اگر

$$\{c_i\}_{i\in I} \longmapsto \sum_{i\in I} c_i f_i,$$

یک عملگر خوشتعریف از $\ell^{2}(I)$ به روی H باشد.

۴.۲.۱ نتیجه اگر $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای H باشد، آنگاه عملگر تحلیلی $\mathcal{F}$ دارای برد بسته در $\ell^{2}(I)$ می‌باشد.

۵.۲.۱ تعریف دنباله‌ی $\{f_i\}_{i\in I}\subseteq H$ را یک پایه‌ی ریس گوییم اگر در H کامل باشد و دو عدد مثبت A و B موجود باشند بطوریکه برای هر $\{c_i\}_{i\in I}\in \ell^2(I)$ نامساوی زیر برقرار باشد:

$$A\sum_{i\in I}|c_i|^2\leq \Big\|\sum_{i\in I}c_if_i\Big\|^2\leq B\sum_{i\in I}|c_i|^2.$$

در این حالت $\{f_i\}_{i\in I}$ را یک (A,B)–پایه‌ی ریس می‌نامیم.

۶.۲.۱ تعریف فرض کنیم به ازای هر $i\in I$، H_i یک فضای هیلبرت باشد. دنباله‌ی $\Lambda=\{\Lambda_i\in L(H,H_i):i\in I\}$ یک g–قاب[1] برای H نسبت به $\{H_i\}_{i\in I}$ نامیده می‌شود اگر دو عدد مثبت A و B موجود باشند بطوریکه برای هر $f\in H$، نامساوی زیر برقرار باشد:

$$A\|f\|^2\leq\sum_{i\in I}\|\Lambda_if\|^2\leq B\|f\|^2.$$

در این حالت Λ را یک (A,B) g–قاب می‌نامیم.

A و B کران‌های g–قاب نامیده می‌شوند (A را یک کران پایین و B را یک کران بالا می‌نامیم). سوپریمم مجموعه‌ی متشکل از تمام کران‌های پایین را کران پایین بهینه و اینفیمم مجموعه‌ی متشکل از تمام کران‌های بالا را کران بالای بهینه می‌نامیم. اگر در تعریف فوق Λ در نامساوی سمت راست صدق کند، آنگاه Λ را یک g–دنباله‌ی بسل می‌نامیم. یک g–قاب را تنگ گوییم هر گاه $A=B$ و آن را پارسوال گوییم اگر $A=B=1$.

۷.۲.۱ تعریف فرض کنیم $\Lambda=\{\Lambda_i\in L(H,H_i):i\in I\}$ یک g–دنباله‌ی بسل باشد. در این صورت

آ) عملگر ترکیبی Λ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_\Lambda:\oplus_{i\in I}H_i\longrightarrow H,\quad T_\Lambda(\{f_i\}_{i\in I})=\sum_{i\in I}\Lambda_i^*f_i.$$

به آسانی می‌توان مشاهده نمود که T_Λ خوشتعریف و کراندار است.

ب) الحاقی عملگر T_Λ، که $T_\Lambda^*(f)=\{\Lambda_if\}_{i\in I}$ است، عملگر تحلیلی Λ نامیده می‌شود.

پ) $S_\Lambda=T_\Lambda T_\Lambda^*$ عملگر g–دنباله‌ی بسل Λ نامیده می‌شود و به ازای هر $f\in H$ داریم:

$$S_\Lambda f=\sum_{i\in I}\Lambda_i^*\Lambda_if.$$

[1] generalized frame

فرض کنیم $\Lambda = \{\Lambda_i \in L(H, H_i) : i \in I\}$ یک (A, B) g–قاب باشد. دنباله‌ی $\widetilde{\Lambda} = \{\widetilde{\Lambda_i}\}_{i\in I}$ که $\widetilde{\Lambda_i} = \Lambda_i S_\Lambda^{-1}$، g–دوگان کانونی Λ نامیده می‌شود. $\widetilde{\Lambda}$ یک $(\frac{1}{B}, \frac{1}{A})$ g–قاب است و به ازای هر $f \in H$، داریم:

$$\sum_{i\in I} \Lambda_i^* \widetilde{\Lambda_i} f = f = \sum_{i\in I} \widetilde{\Lambda_i}^* \Lambda_i f.$$

g–دنباله‌ی بسل $\Gamma = \{\Gamma_i \in L(H, H_i) : i \in I\}$، یک g–دوگان برای g–دنباله‌ی بسل $\Lambda = \{\Lambda_i \in L(H, H_i) : i \in I\}$ نامیده می‌شود اگر

$$f = \sum_{i\in I} \Gamma_i^* \Lambda_i f = \sum_{i\in I} \Lambda_i^* \Gamma_i f, \quad (f \in H).$$

در سرتاسر این رساله زمانی که گفته می‌شود ζ خانواده‌ای از فضاهای هیلبرت است، آنگاه فرض می‌شود که یک فضای هیلبرت مانند $\mathcal{H}$ وجود دارد بطوریکه هر عضو ζ یک زیر فضای بسته‌ی $\mathcal{H}$ باشد. دقت شود که اگر $\{H_i\}_{i\in I}$ دنباله‌ای از فضاهای هیلبرت باشد، آنگاه همواره یک فضای هیلبرت مانند $\mathcal{H}$ $(\mathcal{H} = \oplus_{i\in I} H_i)$ موجود است بطوریکه هر H_i یک زیر فضای بسته‌ی $\mathcal{H}$ است. بنابراین اگر $i_1, i_2 \in I$ و $f_{i_1} \in H_{i_1}$، $f_{i_2} \in H_{i_2}$، آنگاه $\langle f_{i_1}, f_{i_2}\rangle$ خوشتعریف است.

۸.۲.۱ تعریف فرض کنیم $\Lambda = \{\Lambda_i \in L(H, H_i) : i \in I\}$.

آ) Λ را یک g–دنباله‌ی کامل گوییم اگر $\{f : \Lambda_i f = 0, \forall i \in I\} = \{0\}$.

ب) Λ یک g–پایه‌ی متعامدیکه برای H نامیده می‌شود، اگر

$$\langle \Lambda_{i_1}^*(f_{i_1}), \Lambda_{i_2}^*(f_{i_2})\rangle = \delta_{i_1,i_2}\langle f_{i_1}, f_{i_2}\rangle \quad (i_1, i_2 \in I, f_{i_1} \in H_{i_1}, f_{i_2} \in H_{i_2}),$$

و

$$\sum_{i\in I} \|\Lambda_i f\|^2 = \|f\|^2, \quad (\forall f \in H).$$

پ) g–دنباله‌ی کامل Λ را یک g–پایه‌ی ریس برای H می‌نامیم اگر دو عدد مثبت A و B موجود باشند بطوریکه برای هر زیر مجموعه‌ی متناهی $\Omega \subseteq I$ و $f_i \in H_i$، $i \in \Omega$ نامساوی زیر برقرار باشد:

$$A \sum_{i\in\Omega} \|f_i\|^2 \le \Big\| \sum_{i\in\Omega} \Lambda_i^* f_i \Big\|^2 \le B \sum_{i\in\Omega} \|f_i\|^2.$$

در این حالت Λ را یک (A, B) g–پایه‌ی ریس می‌نامیم.