بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

لاپلاسین‌های روی کلاف مماس منیفلدهای فینسلری

نگارش:

راحله رضائی

استاد راهنما:

دکتر بهزاد نجفی

استاد مشاور:

دکتر اکبر طیبی

شهریور ماه ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شاهد

دانشکده علوم پایه

لاپلاسین‌های روی کلاف مماس منیفلدهای فینسلری

نگارش:

راحله رضائی

استاد راهنما:

دکتر بهزاد نجفی

استاد مشاور:

دکتر اکبر طیبی

شهریور ماه ۱۳۹۱

چکیده

در این پایان‌نامه پس از معرفی یک متر ترفیع روی کلاف مماس یک منیفلد فینسلری و بررسی التصاق لوی-چویتای این متر، عملگر لاپلاسین را بیان کرده و فرمول ویتزنبوک لاپلاسین افقی و لاپلاسین عمودی را برحسب التصاق کارتان بدست می‌آوریم. در ادامه رابطه بین عملگر لاپلاس-درام متر ترفیعِ معرفی شده و عملگرهای لاپلاسین افقی، لاپلاسین عمودی و لاپلاسین ترکیبی را بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: منیفلد فینسلری، لاپلاسین افقی، لاپلاسین عمودی.

تشکر و قدردانی

خداوندا! حال که پایانِ نامه به لطف تو به "پایان" رسید، به خیال بندگی، آغاز آن را حمد و سپاس تو قرار می‌دهم و بر حضرت محمّد (صلوات الله علیه)، بهانه‌ی آفرینش و آل مطهرش (علیهم السلام) و رهبر معظم انقلاب (دامت برکاته) سلام و صلوات می‌فرستم. تو را شکر می‌کنم به خاطر تمام نعمت‌هایت؛ به خاطر یاری‌ات در این مسیر و به خاطر نعمت مزین شدنِ "پایان" به نام دانشگاهی که از نگاه رهبر آزاده و فرزانه‌ام، گلخانه‌ای عطرآگین است، و من به این نعمت بزرگ تو می‌بالم. خدایا! من تو را به فضل عظیم و رحمت واسع می‌شناسم و این باعث می‌شود که به خود جرأت دهم، از تو بخواهم تمام تلاش و اعمالم در به ثمر رسیدن این "پایان" را از من بپذیری و برایم حفظ کنی تا به واسطه این پذیرش تو تا ابد برای عمری که صرف این "پایان" کرده‌ام، افسوس نخورم. پروردگارا! من در این راه همراهانی داشتم:

پدر و مادر عزیزتر از جانم، برادر و خواهر مهربانم و همسر بزرگوارم که صبورانه در تمام مراحل، مرا یاری، راهنمایی و تشویق کردند و به لطف تو مایه آرامش من بودند. و همچنین استاد ارجمندم، جناب دکتر نجفی که به معنای واقعی، استاد راهنمای من بودند. من از همه آن‌ها از صمیم قلب سپاسگزارم اما می‌دانم که این تشکر بی‌نهایت کوچک، زحماتشان را جبران نمی‌کند، پس از تو ای خداوند جبّار می‌خواهم که خود برای آن‌ها جبران کنی و به ایشان کرامت و رحمت خاص و توفیق روزافزون عنایت کنی.

در پایان از اساتید گرامی دکتر طیبی که استاد مشاورم بودند و دکتر پیغان که با دقت، این کار را برای داوری مطالعه کردند و دکتر اکبری تنکابنی که جلسه دفاعیه را با حضور خود اعتبار بخشیدند، کمال تشکر را دارم.

تقدیم به

همه ی آن هایی که می خواهند بیشتر بدانند

فهرست مطالب

پیشگفتار

لاپلاسین براساس نیازهای جهان مدرن بوجود آمده است، اگرچه می‌توان ریشه‌های پیدایش آن را در قرن شانزدهم یافت(مرجع [۴]). عملگر لاپلاس یا لاپلاسین که با نماد Δ یا $\nabla^{۲}$ یا $\nabla.\nabla$ نمایش داده می‌شود، اولین بار توسط یک ریاضی‌دان فرانسوی به نام پیر-سیمون دی لاپلاس [۱] (۱۸۲۷-۱۷۴۹) در مطالعه‌ی مکانیک سماوی به کاربرده شده است. لاپلاس، معادله‌ی $\Delta f = ۰$ که در حال حاضر معادله‌ی لاپلاس نامیده می‌شود، را بررسی کرد. جواب‌های معادله‌ی لاپلاس که توابع همساز یا هارمونیک نامیده می‌شوند، در ریاضیات، فیزیک و مهندسی از اهمیت و کاربرد فراوانی برخوردار هستند، زمینه‌هایی همچون الکترومغناطیسی، ستاره‌شناسی و دینامیکِ سیّالات. به عنوان نمونه توابع هارمونیک، میدان‌های جاذب را در فضای خلأ مشخص می‌کنند(مراجع [۱۵]، [۱۶]، [۱۸]، [۳۰]).

در هندسه‌ی دیفرانسیل، عملگر لاپلاسین یکی از مهم‌ترین عملگرهای دیفرانسیلی بیضوی به شمار می‌رود. این عملگر در نظریه‌ی پتانسیل، الکتریسیته، پردازش تصاویر و دید کامپیوتری مورد استفاده قرار می‌گیرد و در بسیاری از معادله‌های فیزیکی مثل معادله‌ی موج، معادله‌ی شرودینگر و معادله‌ی گرما ظاهر می‌شود. جهت اطلاع بیشتر در مورد چگونگی کاربرد لاپلاس در زمینه‌های یادشده، می‌توانید به مراجع زیر مراجعه کنید:

[۶]، [۱۱]، [۱۲]، [۱۴]، [۱۷]، [۱۹]، [۲۲]، [۲۳]، [۲۷]، [۳۱]، [۳۲]،[۳۳]، [۳۴]، [۳۵] ، [۳۷].

به طور نادقیق می‌توان گفت که بسته به نوع تعریف عملگر دیفرانسیل و این که روی چه موجوداتی اثر

۱- Pierre-simon de laplace

داده می‌شود، لاپلاسین‌هایی وجود دارد: ۱-لاپلاسین کانکشن یا لاپلاسین طبیعی و یا در حالتی خاص از این نوع، عملگر لاپلاس-بلترامی ۲- لاپلاسین هاچ یا عملگر هاچ-لاپلاس یا عملگر لاپلاس-درام ۳-لاپلاسین باچنر ۴-لاپلاسین لیچنرویک ۵-لاپلاسین کانفرمال. تعاریف و جزئیات بیشتر در مورد این لاپلاسین‌ها در مرجع [۹] موجود است.

لاپلاسینی که در این پایان‌نامه بررسی می‌شود، لاپلاسین هاچ یا همان عملگر لاپلاس-درام است، بنابراین از این پس هرجا نام لاپلاس یا لاپلاسین برده شود، منظور همان لاپلاسین هاچ یا عملگر لاپلاس-درام است. در فضای $n-$بعدی اقلیدسی، عملگر لاپلاس یک عملگر دیفرانسیلی مرتبه دوم است و به صورت دیورژانس گرادیان یک تابع تعریف می‌شود. عملگر لاپلاسِ یک تابع حقیقی و دوبار مشتق‌پذیر در دستگاه مختصات دکارتی به صورت $\Delta f = \sum_{i=۱}^{n} \frac{\partial^۲ f}{\partial x_i^۲}$ تعریف می‌شود. از آنجایی‌که فضای ریمانی تعمیمی از فضای اقلیدسی است، در این فضا هم عملگر لاپلاس را بدون مشکل خاصی تعریف کرده‌اند. با استفاده از عملگر لاپلاس-درام تعریف شده روی یک منیفلد ریمانی، نتایج خوبی مثل قضیه تجزیه هاچ (۱۹۳۰-مرجع [۵])، قضیه باچنر و فرمول ویتزنبوک بدست آمده است. می‌دانیم که منیفلد فینسلری تعمیمی از منیفلد ریمانی است، پس طبیعی است که بخواهیم در این فضا هم عملگر لاپلاس را تعریف کنیم. عده‌ای تصمیم گرفتند برای تعریف لاپلاسین با تعریف یک متر ترفیع روی منیفلد فینسلری آن را به منیفلد ریمانی تبدیل کرده و سپس لاپلاسین را روی آن تعریف کنند. با استناد به دو دلیل زیر می‌توان گفت که در فضای فینسلری روش‌های زیادی برای تعریف لاپلاسین وجود دارد:

یک) با به کارگیری روش‌های متفاوت، مترهای ترفیعِ متفاوتی روی منیفلد فینسلری می‌توان تعریف کرد.

دو) در تعریف لاپلاسین از التصاق استفاده می‌شود و در فضای فینسلری برخلاف فضای ریمانی، التصاق واحدی وجود ندارد.

شاید به همین دلیل که روش واحدی برای تعریف عملگر لاپلاس در فضای فینسلری وجود ندارد، کارها و قضایای خوب و برجسته‌ای در این زمینه بدست نیامده است، بنابراین به نظر می‌رسد که نیاز به کارهای

تحقیقی بیشتری مثل انجام یکسری محاسبات در زمینه‌ی لاپلاس است. البته در سال ۲۰۰۳ مونتِنو [1] در مرجع [۲۸] فرمول ویتزنبوک لاپلاسین افقی و عمودی را برای ۱–فرم‌های روی کلاف برداری ریمانی بدست آورده است، که ژانگ [2] در سال ۲۰۰۹ این ایده را در مرجع [۳۹] با بررسی قضیه صفرشدن فرم‌های هولومورفیک روی منیفلد فینسلر کِهلِر توسعه داد. وُیکو [3] نیز در همان سال در مرجع [۳۶] فرمول ویتزنبوک روی منیفلدهای ساساکی ۳ بعدی را محاسبه کرده است.

در این پایان‌نامه می‌خواهیم عملگر لاپلاسین را تعریف کرده و با انجام محاسباتی، برخی نتایج ناشی از این تعریف را بررسی کنیم. چارچوب پایان‌نامه به صورت زیر است :

در فصل اول مفاهیم و تعاریف مورد استفاده بیان می‌شود. فصل دوم شامل مقدمات لازم برای تعریف عملگر لاپلاسین است. در فصل سوم به مقدمات لازم برای محاسبه‌ی فرمول ویتزنبوک لاپلاسین افقی و لاپلاسین عمودی می‌پردازیم. در فصل آخر لاپلاسین را تعریف کرده و فرمول ویتزنبوکِ لاپلاسین افقی و لاپلاسین عمودی و همچنین بیان موضعی لاپلاسین ترکیبی را بیان می‌کنیم و در پایان برخی نتایج و برخی خواص لاپلاسین را می‌آوریم.

این پایان‌نامه بر اساس مقاله زیر است:

C. Zhong, Laplacians on the Tangent bundle of Finsler manifold, Balkan J, Vol.16, No.1, 2011, pp. 170-181.

۱- Munteanu ۲- Zhong ۳- Voicu

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

در این فصل به بیان مفاهیم و تعاریف مورد استفاده در پایان‌نامه می‌پردازیم. اکثر مطالب موجود در این فصل برگرفته از مراجع [۱]، [۷]، [۱۳]، [۲۵]، [۳۸] است.

۱.۱ یادآوری

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم M یک منیفلد هموار است و به ازای هر $p \in M$، T_pM فضای مماس بر M در p باشد، قرار می‌دهیم $TM := \cup_{p\in M} T_pM$ و آن را فضای مماس بر M می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱. نگاشت π تعریف شده به صورت

$$\begin{cases} \pi : TM \longrightarrow M \\ [\alpha] \longmapsto \alpha(0) \end{cases}$$

را نگاشت تصویر طبیعی TM می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱. ۴تایی (E, π, M, V) را یک کلاف برداری با فیبر نمونه V روی M می‌نامیم، هرگاه:

الف) M و E دو منیفلد هموار و V یک فضای برداری k−بعدی باشند. k را رتبه کلاف E می‌نامیم.

ب) $\pi : E \longrightarrow M$، C^∞ و پوشا باشد.

ج) به ازای هر $p \in M$، $E_p := \pi^{-1}(p)$ یک فضای برداری k−بعدی باشد. E_p را فیبر E در نقطه p می‌نامیم.

د) به ازای هر $p\epsilon M$، یک همسایگی باز U حول p و دیفئومورفیسم $\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U\times V$ چنان موجود باشد که به ازای هر $q \in U$ ، $\varphi|_{E_q} : E_q \longrightarrow \{p\}\times V$ یک ایزومورفیسم خطی باشد. در این حالت زوج (φ, U) را یک کارت کلافی برای E می‌نامیم.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم M یک منیفلد هموار n-بعدی باشد، کلاف‌های برداری $(TM, \pi, M, \mathbb{R}^n)$ و $(TM^*, \pi, M, \mathbb{R}^{n*})$ را به ترتیب کلاف مماس M و کلاف کتانژانت M می‌نامیم.

قرارداد: کلاف مماس را با TM و کلاف کتانژانت را با TM^* نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم $\omega \in A^k(M)$ و $X_1, \cdots, X_{k+1} \in \chi(M)$ ، مشتق خارجی ω را با نماد $d\omega$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d\omega(X_1, \cdots, X_{k+1}) := \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}X_i\omega(X_1, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_{k+1})$$
$$+ \sum_{1\leq i<j\leq k}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_1, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_{j-1}, X_{j+1}, \cdots X_{k+1})$$

که در آن $[X_i, X_j]$ کروشه لی X_i و X_j است.

برای هر $f \in C^\infty(M)$ و $X \in \chi(M)$ داریم:

$$df(X) = X.f = \frac{\partial f}{\partial X^j}dx^j.$$

چند ویژگی عملگر d :

$(i).\ d(A^k(M)) \subseteq A^{k+1}(M)$

$(ii).\ \forall\omega \in A^k(M), \eta \in A^l(M),\ d(\omega\wedge\eta) = d\omega\wedge\eta+(-1)^{1\times k}\omega\wedge d\eta$

$(iii).\ d\circ d = 0$

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم $X \in \chi(M)$ باشد، قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} i_X : A(M) \longrightarrow A(M) \\ \qquad \omega \quad \longmapsto \; i_X(\omega) \end{cases}$$

که در آن به ازای هر $\omega \in A^k(M)$ داریم:

$$i_X(\omega)(X_۱, \cdots, X_{k-۱}) := \omega(X, X_۱, \cdots, X_{k-۱}) \qquad \forall X_۱, \cdots, X_{k-۱} \in \chi(M)$$

عملگر i_X را ادغام در میدان برداری X گوییم.

چند ویژگی عملگر i_X :

$(i).\ \forall f \in C^\infty(M), \qquad i_X : A^۰(M) \longrightarrow A^{-۱}(M), \qquad i_X(f) = ۰$

$(ii).\ \forall X, Y \in \chi(M), \qquad i_X \circ i_Y = -i_Y \circ i_X$

$(iii).\ \forall X \in \chi(M), \forall f \in C^\infty(M), \qquad i_{fX} = f i_X$

$(iv).\ \forall \omega \in A^k(M), \forall f \in C^\infty(M), \qquad i_X(f\omega) = f i_X(\omega).$

$(v).\ \forall \omega \in A^k(M), \forall \eta \in A^l(M), \qquad i_X(\omega \wedge \eta) = i_X(\omega) \wedge \eta + (-۱)^k \omega \wedge \eta$

این ویژگی‌های عملگر ادغام و همچنین ویژگی‌های عملگر مشتق خارجی(در صفحه قبل) در محاسباتی که در فصل‌های بعد آورده می‌شود، بسیار کاربرد دارند.

قرارداد: از این پس از نماد $i(X)(\omega)$ به جای نماد $i_X(\omega)$ استفاده می‌کنیم.

۲.۱ مقدماتی از هندسه ریمانی

در این پایان‌نامه از قرارداد جمع‌بندی اینشتین استفاده شده است، به این معنا که اگر در فرمولی اندیس بالا و پایین برابر باشد به معنای جمع بستن روی آن اندیس در دامنه تغییرات آن اندیس است. به عنوان مثال: $y^i N_i^j = \sum_{i=۱}^n y^i N_i^j$.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد هموار n–بعدی باشد. $(۰,۲)$–تانسور g روی M را یک متر

ریمانی گوییم، هرگاه:

الف) g متقارن باشد، یعنی به‌ازای هر $X, Y \in \chi(M)$ داشته باشیم:

$$g(X, Y) = g(Y, X)$$

ب) g مثبت معین باشد، یعنی به‌ازای هر $X \in \chi(M)$ داشته باشیم:

$$g(X, X) \geq ۰ \quad , \quad g(X, X) = ۰ \Longleftrightarrow X = ۰$$

در این صورت زوج (M, g) را یک منیفلد ریمانی می‌نامیم.

فرض کنیم $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ میدان‌های برداری طبیعی موضعی وابسته به کارت (x^h, U) باشند، در این صورت هرگاه $X = X^i \partial_i$ و $Y = Y^j \partial_j$ دو میدان برداری روی M باشند و قرار دهیم: $g_{ij} := g(\partial_i, \partial_j)$ آنگاه داریم: $g(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j$. g_{ij}ها را مولفه‌های موضعی میدان تانسوری g نسبت به کارت (x^h, U) می‌نامیم.

در این پایان‌نامه برای بالا و پایین کردن اندیس‌ها از g_{ij} استفاده می‌کنیم. مثال: $S_{ijk} = S^{h}_{jk} g_{hi}$.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد هموار n−بعدی است، به تابع

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$(X, Y) \mapsto \nabla^Y_X$$

یک مشتق کواریان یا التصاق خطی روی M می‌گوییم، هرگاه به ازای هر $X_۱, X_۲, Y \in \chi(M)$ و به ازای هر $f \in C^\infty(M)$ شرایط زیر برقرار باشند:

$۱)\nabla^{Y_۱+Y_۲}_X = \nabla^{Y_۱}_X + \nabla^{Y_۲}_X$

$۲)\nabla^{Y}_{X_۱+X_۲} = \nabla^{Y}_{X_۱} + \nabla^{Y}_{X_۲}$

$۳)\nabla^{fY}_X = (X.f)Y + f\nabla^{Y}_X$

$$۴)\nabla^{Y}_{fX} = f\nabla^{Y}_{X}$$

زوج (M, ∇) را یک منیفلد آفین گوییم.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم (M, ∇) یک منیفلد آفین و (x, U) یک کارت M باشد، قرار می‌دهیم:

$$\nabla^{\frac{\partial}{\partial x^j}}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} = \gamma^{k}_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}$$

γ^{k}_{ij} ها را نمادهای کریستوفل ∇ نسبت به کارت (x, U) می‌نامیم. در واقع داریم:

$$\gamma^{k}_{ij} = dx^k\Big(\nabla^{\frac{\partial}{\partial x^j}}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\Big).$$

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم (M, ∇) یک منیفلد آفین باشد، تابع

$$\begin{cases} T : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M) \\ \qquad (X, Y) \longmapsto T(X, Y) \end{cases}$$

با ضابطه

$$T(X, Y) = \nabla^{Y}_{X} - \nabla^{X}_{Y} - [X, Y]$$

را تاب التصاق ∇ می‌نامیم.

تعریف ۵.۲.۱. التصاق ∇ را تاب آزاد گوییم، هرگاه $T = ۰$ یا به طور معادل $\gamma^{k}_{ij} = \gamma^{k}_{ji}$.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی باشد، التصاق خطی ∇ را سازگار با متر g می‌نامیم، هرگاه $\nabla g = ۰$، یعنی به ازای هر X متعلق به $\chi(M)$ داشته باشیم: $\nabla_X g = ۰$ (مرجع [۳۸]).

قضیه ۷.۲.۱. (قضیه اساسی هندسه ریمانی): فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی است، در این صورت یک و فقط یک التصاق روی M وجود دارد بطوریکه تاب آزاد و سازگار با متر g باشد.

اثبات. مرجع [۴۰] یا [۴۲].

این التصاق منحصر به فرد را التصاق لوی-چویتای متر g می‌نامیم که دارای نمادهای کریستوفل زیر است:

$$\gamma_{ij}^{k} = \frac{۱}{۲} g^{kl} \{ \frac{g_{il}}{\partial x^{j}} + \frac{g_{lj}}{\partial x^{i}} - \frac{g_{ij}}{\partial x^{l}} \}$$

بنابراین هندسه ریمانی حالت خاصی از هندسه آفین است.

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد تاریخچه، چگونگی پیدایش و نحوه عملکرد التصاق‌ها به [۲۴] و [۴۰] مراجعه شود.

عملگر هاچ*

در تغییر مختصات $\bar{x}^{i}$ به x^{i} از آنجایی‌که داریم:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^{i}} = \frac{\partial x^{j}}{\partial \bar{x}^{i}} \frac{\partial}{\partial x^{j}}$$

ماتریس ژاکوبین عبارت است از

$$J = \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^{۱}}{\partial \bar{x}^{۱}} & \cdots & \frac{\partial x^{۱}}{\partial \bar{x}^{n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^{n}}{\partial \bar{x}^{۱}} & \cdots & \frac{\partial x^{n}}{\partial \bar{x}^{n}} \end{bmatrix}$$

تعریف ۸.۲.۱. $T_{j_۱ \cdots j_q}^{i_۱ \cdots i_p}$ مولفه‌های یک تانسور نسبی از مرتبه (p, q) از وزن w نامیده می‌شود، هرگاه تحت تبدیل x^{i} به $\bar{x}^{i}$ به صورت زیر تغییر کند:

$$|J|^{w} \frac{\partial \bar{x}^{i_۱}}{\partial x^{\alpha_۱}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \frac{\partial x^{\beta_۱}}{\partial \bar{x}^{j_۱}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}} T_{\beta_۱ \cdots \beta_q}^{\alpha_۱ \cdots \alpha_p} = \bar{T}_{j_۱ \cdots j_q}^{i_۱ \cdots i_p}.$$

تعریف ۹.۲.۱. نمادهای جایگشتی $\varepsilon_{i_۱ \cdots i_n}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varepsilon_{i_۱ \cdots i_n} = \varepsilon^{i_۱ \cdots i_n} = \begin{cases} +۱ & \text{اگر } (i_۱ \cdots i_n) \text{ یک جایگشت زوج } (۱, \cdots, n) \text{ باشد} \\ -۱ & \text{اگر } (i_۱ \cdots i_n) \text{ یک جایگشت فرد } (۱, \cdots, n) \text{ باشد} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت $\varepsilon_{i_1\cdots i_n}$ مولفه‌های یک تانسور نسبی کواریانت با وزن ۱− و $\varepsilon^{i_1\cdots i_n}$ مولفه‌های یک تانسور نسبی کنتراواریانت با وزن ۱+ هستند (مرجع [۳۸]).

تعریف ۱.۲.۱۰. فرض کنیم M یک منیفلد هموار ریمانی n−بعدی و $\omega = \frac{1}{p!}\omega_{i_1\cdots i_p}dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ یک p−فرم است، $*\omega \in A^{n-p}(M)$ را طوری تعریف می‌کنیم که یک تناظر یک به یک بین $A^p(M)$ و $A^{n-p}(M)$ برقرار سازد، به طور موضعی قرار می‌دهیم:

$$*(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) := \frac{\sqrt{G}}{(n-p)!}g^{i_1l_1} \cdots g^{i_pl_p}\varepsilon_{l_1\cdots l_pl_{p+1}\cdots l_n}dx^{l_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{l_n}$$

در نتیجه

$$*\omega = \frac{\sqrt{G}}{p!(n-p)!}\omega^{l_1\cdots l_p}\varepsilon_{l_1\cdots l_pl_{p+1}\cdots l_n}dx^{l_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{l_n}$$

که در آن G دترمینان ماتریس (g_{ij}) است.

مهم‌ترین کاربرد عملگر هاچ تعریف نمودن عملگر هم‌مشتق خارجی است.

تعریف ۱.۲.۱۱. فرض کنیم $\omega = \frac{1}{p!}\omega_{i_1\cdots i_p}dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ یک p−فرم روی منیفلد ریمانی M است، هم‌مشتق خارجی ω را با $\delta\omega$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\delta\omega = \frac{-1}{(p-1)!}(g^{ji}\nabla_j\omega_{ii_2\cdots i_p})dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

$\delta\omega$ یک $(p-1)$−فرم است، بنابراین داریم:

$$\delta : A^p(M) \longrightarrow A^{p-1}(M)$$

برای $p = 0$ یعنی برای توابع C^∞، f قرار می‌دهیم: $\delta f = 0$.

عملگر هم‌مشتق خارجی روی $A^k(M)$ را می‌توان به صورت $\delta = (-1)^k *^{-1} d*$ نیز تعریف نمود(مرجع [۵]). برای عملگر δ داریم: $\delta \circ \delta = 0$ (مرجع [۳۸]).

عملگر لاپلاس−درام

تعریف ۱۲.۲.۱. عملگر لاپلاس-درام را با Δ نشان داده و به صورت زیر روی p–فرم‌های روی منیفلد ریمانی M تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \Delta : A^p(M) \longrightarrow A^p(M) \\ \Delta := (d+\delta)^2 \end{cases}$$

۳.۱ التصاق غیر خطی

فرض کنیم π نگاشت تصویر طبیعی TM باشد، دراین صورت نگاشت زیر را داریم:

$$\pi_* : T(TM) \longrightarrow TM$$

قرار می‌دهیم:

$$VTM := \cup_{v\in TM} Ker\pi_*^v$$

VTM را کلاف برداری قائم روی TM می‌نامیم.

تعریف ۱.۳.۱. یک التصاق غیر خطی روی TM عبارت است از یک توزیع متمم HTM برای VTM روی TTM، به عبارت دیگر

$$TTM = VTM \oplus HTM \qquad (۱.۱)$$

HTM را کلاف برداری افقی می‌نامیم.

می‌دانیم که $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$ یک پایه برای TTM است، حال به معرفی یک پایه متناسب با تجزیه (۱.۱) برای TTM می‌پردازیم. اگر π_*^v نگاشت تصویر طبیعی از T_vTM به TM باشد، در این صورت

$$\pi_*^v := T_vTM \longrightarrow TM$$

$$\pi_*^v\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\ ,\ \pi_*^v\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = ۰$$