دانشگاه یزد

دانشکده‌ی ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض / هندسه توپولوژی

ویژگی‌هایی از متمم گرهی

استاد راهنما:

دکتر حسین خورشیدی

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا احمدی زند

پژوهش‌گر:

نجمه خواجوئی

مهرماه ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

قدردانی و تشکر

سپاس بی کران به درگاه حق، که بی شک بدون لطف و یاری او نمی توان سرانجامی برای امور تصور کرد.

خداوند را شاکرم که یگانه دست گیر و کمک رسان در تمامی لحظات زندگی‌ام بوده و مرا یاری نمود تا در بهترین مسیر زندگی یعنی فراگیری علم و دانش گام بردارم.

بر خود لازم می‌دانم به رسم ادب از کسانی که در این امر مرا یاری نموده‌اند قدردانی کنم، به ویژه از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر حسین خورشیدی به خاطر راهنمایی‌های دلسوزانه ایشان در کلیه مراحل انجام این پژوهش و پی گیری مداوم و صبورانه ایشان برای هر چه بهتر بودن این پایان نامه کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از جناب آقای دکتر محمدرضا احمدی زند که مشاور اینجانب در این پایان نامه بودند متشکرم، از جناب آقای دکتر دریدی که در مبحث میدان عددی و گروه‌های کلاین حسابی گره گشای پایان نامه بودند کمال تشکر را دارم.

از داور داخلی جناب آقای دکتر اکبر دهقان نژاد که از پایان نامه کارشناسی ارشد ایشان مطالبی را آموختم و داور خارجی جناب آقای دکتر محمد شفیعی که راهنمایی‌های هر دو بزرگوار باعث منسجم تر شدن پایان نامه شد تشکر فراوان دارم.

در پایان از پدر و مادرم که در تمام مراحل تحصیل همراه و مشوق من بوده‌اند بسیار سپاسگزارم و از خداوند متعال برای آنان سلامتی و هر آنچه خیر و نیکی است آرزومندم.

چکیده

پژوهش درباره متمم یک گره در $\mathbb{R}^3$ یا S^3 از ابتدای پیدایش نظریه گره‌ها مورد توجه بوده است. ثابت شده است که هر منیفلد سه بعدی، جهت پذیر بسته و همبند از تشریح دن نابدیهی حول یک پیوند در S^3 به دست می‌آید اینجاست که ارتباط اساسی بین گره‌ها (پیوندها) و منیفلدهای سه بعدی مشخص می‌شود. نخستین بار تیتز وجود گره نابدیهی را از طریق محاسبه گروه بنیادی متمم گره سه پره نشان داد. او حدس زد که دو نوع از گره‌ها برابرند اگر و فقط اگر متمم‌های آن‌ها با هم هومئومورف باشند. در سال ۱۹۸۸ گوردن و لوکه این حدس را ثابت کردند. در این پایان نامه ویژگی‌هایی از متمم‌های گرهی به عنوان منیفلدهای سه بعدی بررسی شده است. پژوهش‌ها در سالهای اخیر به بررسی متمم گره در $\mathbb{R}^3$ یا S^3 محدود نمی‌شود و متمم گره را دریک منیفلد سه بعدی نیز مورد بررسی قرار می‌دهد.

فصل اول به مقدماتی از توپولوژی جبری (گروه بنیادی، گروه همولوژی،...)، هندسه دیفرانسیل (جهت پذیری و انحنا) و نظریه گره‌ها (گره، پیوند و تافته...) اختصاص داده شده است.

فصل دوم با تعریف خاصیت P برای گره، قضیه‌ای مربوط به اثبات حدس تیتز را ثابت می‌کنیم. همچنین خانواده نامتناهی از زوج‌های (M, K) که M فضای عدسی و K گره غیر هذلولوی در M می‌باشد را معرفی می‌کنیم و ثابت خواهیم کرد که این گره‌ها بوسیله متمم‌هایشان در همین فضای لنزی مشخص می‌شوند.

در فصل سوم مطالبی را در مورد ساختارهای هندسی منیفلدها، اوربیفلدها، پوشش شاخه‌ای و هم شاخصی گره‌ها بیان کرده و با استفاده از آنها به بررسی چگونگی دسته بندی منیفلدهای هذلولوی با استفاده از متمم گره‌های هذلولوی می‌پردازیم.

نهایتا در فصل چهارم سایر رویکردهای مرتبط با فصل‌های دوم و سوم که در این پایان نامه مجال بررسی آنها فراهم نشد اما به جهت ارتباط با موضوع می‌تواند زمینه ساز تحقیقات در این مبحث باشد را بیان می‌کنیم.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل مفاهیم پیش نیاز که در پایان نامه ضروری هستند به اختصار مطرح می‌گردند.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی از توپولوژی جبری

در این بخش به اختصار در مورد گروه بنیادی، گروه همولوژی، عمل گروه روی مجموعه وپوشش بین دو فضای توپولوژیک مطالبی را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. (هموتوپی) اگر $f,g : X \longrightarrow Y$ توابعی پیوسته از فضای توپولوژیک X به فضای توپولوژیک Y باشند گوییم f,g هموتوپ‌اند هرگاه نگاشت پیوسته $F : X \times I \longrightarrow Y$ چنان موجود باشد که برای هر $x \in X$ داشته باشیم $F(x,\circ) = f(x)$, $F(x,۱) = g(x)$. در اینجا F را یک هموتوپی بین f,g می‌نامیم و به اختصار با $F(x,t) = f_t(x), t \in I = [\circ,۱]$ نمایش می‌دهیم و هموتوپ بودن f,g را با نماد $f \simeq g$ نشان می‌دهیم.

اگر تابع f هموتوپ با تابع ثابت باشد گوییم f پوچ- هموتوپ است و هموتوپی مابین آنها را هموتوپی پوچ گوییم.

اگر $x_\circ$ و $x_۱$ دو نقطه از فضای X باشند مقصود از راه f در X از $x_\circ$ به $x_۱$ نگاشت پیوسته $f : I \longrightarrow X$ هست که $f(\circ) = x_\circ$ ، $f(۱) = x_۱$. اگر f یک به یک باشد گوییم f ساده [۱]است. (به طور شهودی اگر راه یا مسیر خود اشتراکی نداشته باشد).

[۱]simple

تعریف ۲.۱.۱. (هموتوپی راهی) اگر f,g دو راه از x_0 به x_1 باشند آنگاه راه‌های f و g را هموتوپ گوییم هرگاه نگاشت پیوسته $F : I \times I \longrightarrow X$ موجود باشد که

$$F(s,0)=f(s),\ F(s,1)=g(s),\ F(0,t)=x_0,\ F(1,t)=x_1$$

F را هموتوپی راهی بین f و g می‌نامند واز نماد $f \simeq_p g$ استفاده می‌کنند.

تعریف ۳.۱.۱. اگر f راهی در X از x_0 به x_1 و g راهی در X از x_1 به x_2 باشد آنگاه $f * g$ (ترکیب f و g) را به عنوان راهی مانند h به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$h(s)=\begin{cases} f(2s) & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ g(2s-1) & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

اگر f راهی در X از x_0 به x_1 باشد آنگاه رده f تحت رابطه $\simeq_p$ را با $[f]$ نمایش می‌دهیم یعنی $[f]$ شامل همه راه‌های هموتوپ با f در X هست که از x_0 شروع وبه x_1 ختم می‌شود. عمل ترکیب راه‌ها یک عمل روی مجموعه همه رده‌های هموتوپی راه‌ها القاء می‌کند یعنی $[f]*[g]=[f*g]$.

تعریف ۴.۱.۱. (گروه بنیادی) فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و x_0 نقطه‌ای از آن باشد راهی که از x_0 شروع و به x_0 منتهی می‌شود را یک کمند بر پایه x_0 نامیده می‌شود. مجموعه رده‌های هموتوپی راهی کمندهای بر پایه x_0 در X با عمل $*$ گروه بنیادی X نسبت به نقطه پایه x_0 نامیده و با نماد $\pi_1(X,x_0)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱. فضای X را همبند ساده گوییم هرگاه فضایی همبند راهی باشد و به ازای عضوی از X مانند x_0 گروه $\pi_1(X,x_0)$ بدیهی باشد.

قضیه ۶.۱.۱. *گروه بنیادی دایره (S^1) گروه دوری نامتناهی است یعنی $(\mathbb{Z},+)$ است.*

اثبات. به [۴۶] رجوع شود. □

قضیه ۷.۱.۱. *اگر X و Y دو فضای توپولوژیک باشند، $x_0 \in X$ و $y_0 \in Y$ آنگاه رابطه زیر بین گروه بنیادی آنها برقرار است:*

$$\pi_1(X\times Y, x_0\times y_0) \cong \pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0)$$

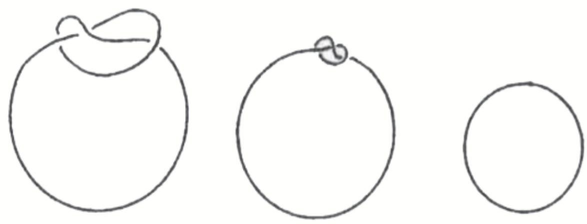
اثبات. به [۴۶] رجوع شود. □

مثال ۸.۱.۱. با توجه به دو قضیه فوق گروه بنیادی چنبره دوبعدی $T^۲ = S^۱ \times S^۱$ ایزومورف با $\mathbb{Z}^۲$ است.

فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را نشاننده [۲] گوییم هرگاه $f : X \longrightarrow f(X)$ همئومورفیسم باشد.

تعریف ۹.۱.۱. (ایزوتوپی [۷]) دو نشاننده $f_۰, f_۱ : X \longrightarrow Y$ ایزوتوپ‌اند اگر یک نشاننده به صورت $F : X \times I \longrightarrow Y \times I$ وجود داشته باشد که $(x,t) \mapsto (f(x,t),t)$ و برای هر $x \in X$ و $t \in I = [۰,۱]$ داشته باشیم $f(x,۰) = f_۰(x),\ f(x,۱) = f_۱(x)$. نگاشت Fرا ایزوتوپی حافظ سطح که اتصال دهنده $f_۰$ و $f_۱$ گوییم.

هر دو نشاننده $S^۱ \longrightarrow S^۳$ می‌توانند ایزوتوپ باشند اگرچه آنها در گره‌دار بودنشان متفاوت هستند. شکل زیر این مطلب را واضح‌ترنشان می‌دهد.



شکل ۱.۱: هر ناحیه گره‌دار به طور پیوسته در یک نقطه منقبض می‌شود.

تعریف ۱۰.۱.۱. (ایزوتوپ محیطی [۷]) دو نشاننده $f_۰, f_۱ : X \longrightarrow Y$ ایزوتوپ محیطی گوییم اگر ایزوتوپی حافظ سطح

$$H : Y \times I \longrightarrow Y \times I, \qquad H(y,t) = (h_t(y),t)$$

با شرایط $f_۱ = h_۱ f_۰,\ h_۰ = id_Y$ وجود داشته باشد.

---

[۲] embeding

یک ایزوتوپی محیطی، ایزوتوپی F اتصال دهنده f_0 و f_1 با ضابطه $F(x,t) = (h_t\, f_0(x), t)$ تعریف می‌کند.(دو تعریف فوق در بخش سه مورد استفاده قرار می‌گیرد)

برای بررسی مفهوم گروه همولوژی ابتدا تعاریف مقدماتی زیر را از قبیل سادک، زنجیر و... را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱۱.۱.۱. (سادک) q سادک هندسی استاندارد Δ_q عبارت است از پوسته محدب q بعدی که توسط نقاط $E_0, ... E_q$ در فضای $\mathbb{R}^q$ ساخته می‌شود و $E_0 = (0, ..., 0),\ E_1 = (1, ..., 0),\ ... E_q = (0, ..., 1)$ رئوس این سادک نامیده می‌شوند.

به طور مثال سادک صفر بعدی (Δ_0) نقطه است. و سادک یک بعدی (Δ_1)پاره خط واصل E_0 و E_1 می‌باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱. (سادک تکین) فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد یک q سادک تکین در X عبارت است از نگاشت پیوسته $\sigma : \Delta_q \longrightarrow X$.

اگر R یک حلقه باشد R مدول آزاد $S_q(X)$ را در نظر می‌گیریم که به وسیله همه q سادک‌های تکین پدید آمده است آنگاه هر عضو $S_q(X)$ به صورت ترکیب خطی از $\Sigma_\sigma v_\sigma\, \sigma$ است که $v_\sigma \in R$ و σ در بین سادک‌های تکین تغییر می‌کند یعنی

$$S_q(X) = \{\Sigma_\sigma v_\sigma\, \sigma \in X | v_\sigma \in R,\ \sigma : \Delta_q \longrightarrow X\}$$

اعضای $S_q(X)$ را q زنجیر تکین گوییم.

مرز q سادک تکین σ عبارت است از $\partial(\sigma) = \Sigma_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma^{(i)}$ که یک $q-1$ زنجیر است و $\sigma^{(i)}$ ها $q-1$ سادک‌های تکین هستند از حذف راس i ام از σ بدست می‌آیند. می‌توانیم نگاشت مرز را به همریختی مدولی $\partial : S_q(X) \longrightarrow S_{q-1}(X)$ با ضابطه $\partial(\Sigma v_\sigma\, \sigma) = \Sigma v_\sigma\, \partial(\sigma)$ توسیع دهیم. ($\partial(\sigma)$، $q-1$ زنجیر است.) q زنجیر تکین C را که $\partial C = 0$ یک دور گوییم ضمنا q زنجیر تکین C را مرز گوییم هرگاه $C = \partial(C')$ که C' یک $q+1$ زنجیر تکین است برای $q = 0$ مرز یک صفر زنجیر، صفر تعریف می‌شود.

لم ۱۳.۱.۱. $\partial\partial = 0$

اثبات. به [۴۶] رجوع شود. □

مجموعه دورها تشکیل یک R مدول می‌دهند که با Z_q نشان داده می‌شود مجموعه همه مرزها را با B_q نشان می‌دهیم که یک زیر مدول Z_q است زیرا اگر $C = \partial(C')$ آنگاه $\partial C = \partial\partial(C') = 0$. دقت کنید مرز یک دور صفر است . حال مدول خارج قسمتی $\frac{Z_q}{B_q}$ را q امین مدول هومولوژی تکین برای X می‌نامند که آن را با $H_q(X,R)$ و یا به اختصار $H_q(X)$ نشان می‌دهیم.

عناصر $H_q(X)$ را کلاس هومولوژی یا رده هومولوژی گوییم. همرده‌ها به صورت $[\alpha] = \alpha + B_q$ که $\alpha \in Z_q$ می‌باشند. فرض کنید $\alpha, \beta \in Z_q$ باشند در این صورت α وβ را هومولوگ گوییم اگر تفاوت آنها مرز یک ناحیه باشد یعنی $\alpha - \beta \in B_q$ در این‌صورت α و β متعلق به یک کلاس هومولوژی‌اند ومی‌نویسیم $\alpha \sim \beta$.

چنانچه $R = \mathbb{Z}$ آنگاه R مدول هومولوژی تکین را گروه هومولوژی می‌نامیم. به عنوان مثال گروه‌های هومولوژی دایره S^1 و چنبره T^2 به صورت زیر هستند

$$H_n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, 1 \\ 0 & n \geqslant 2 \end{cases}$$

$$H_n(T^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & n = 1 \\ \mathbb{Z} & n = 0, 2 \\ 0 & n \geqslant 3 \end{cases}$$

قضیه ۱۴.۱.۱. *گروه هومولوژی اول فضای توپولوژیک X خارج قسمت گروه بنیادی به زیرگروه جابه‌جاگر آن می‌باشد.یعنی $H_1(X) = \frac{\pi_1(X)}{[\pi_1, \pi_1]}$ و همواره همومورفیسم [3] بین $H_1(X)$ و$\pi_1(X)$ وجود دارد.*

اثبات. به [۵] رجوع شود. □

تعریف ۱۵.۱.۱. (کره هومولوژی [۳۷]) منیفلد سه بعدی، همبند و بسته X را کره هومولوژی گوییم هرگاه $H_1(X) = 0$ باشد.

تعریف ۱۶.۱.۱. (کره هموتوپی [۳۷]) منیفلد سه بعدی، همبند و بسته X را کره هموتوپی گوییم هرگاه $\pi_1(X) = 0$ باشد.

واضح است که کره‌های هموتوپی، کره هومولوژی هستند.

[3] در بعضی از متون به جای هومومورفیسم از همسانی (همریختی) استفاده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱۷. (عمل گروه روی یک مجموعه) فرض کنید X مجموعه و Γ یک گروه باشد نگاشت $f\,:\,\Gamma\times X\longrightarrow X$ رایک عمل Γ بر X گوییم اگر :

الف)برای عضو خنثی $e\in\Gamma$ و هر عضو $x\in X$ ، $f(e,x)=x$

ب) برای عضوهای دلخواه γ و η از Γ و برای هر عضو $x\in X$ داشته باشیم $f(\gamma,f(\eta,x))=f(\gamma.\eta,x)$.

تعریف ۱.۱.۱۸. (عمل آزاد) عمل گروه Γ روی مجموعه X آزاد نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x\in X$ که $\gamma x=\eta x$ نتیجه شود که $\gamma=\eta$ به بیان معادل اگر برای $x\in X$ از $\gamma x=x$ نتیجه شود γ همانی است.

تعریف ۱.۱.۱۹. (عمل ناپیوسته سره) عمل گروه Γ روی فضای X را ناپیوسته سره گوییم هرگاه هر نقطه x دارای همسایگی باز U باشد به طوری که $\gamma U\cap U\neq\varnothing\Longrightarrow\gamma=e$ (e عضو همانی گروه Γ است).

تعریف ۱.۱.۲۰. (پایدار ساز یک عضو) فرض کنید Γ روی مجموعه X عمل کند برای هر عضو $x\in X$ پایدار ساز x رابا Γ_x نشان می‌دهیم وبه صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Gamma_x=\{\gamma\in\Gamma\,|\,\gamma(x)=x\}$$

تعریف ۱.۱.۲۱. (فضای پوششی [۳۱])فرض کنید M فضای توپولوژیک همبند مسیری باشد یعنی هردو نقطه آن توسط مسیری ساده به هم متصل شوند فضای توپولوژیک همبند مسیری $\tilde{M}$ فضای پوششی M است اگر

(۱) نگاشت پیوسته $P:\tilde{M}\longrightarrow M$ وجود داشته باشد.

(۲) برای هر $m\in M$ همسایگی باز U_m از m موجود باشد به طوری که

(الف) $P^{-1}(U_m)$ اجتماع مجزایی از $F=\{W_\alpha\}$ از مجموعه‌های باز در $\tilde{M}$ باشد یعنی

$$P^{-1}(U_m)=\cup_{W_\alpha\in F}W_\alpha\quad(\star)$$

(ب) $P|_{W_\alpha}:W_\alpha\longrightarrow U_\alpha$ برای W_α همئومورفیسم باشد.

اگر شرایط فوق برقرار باشد گوییم P نگاشت پوششی است. با توجه به $(\star)$ وقسمت دو تصویر معکوس $P^{-1}(m)$ از یک نقطه $m\in M$ اجتماعی از نقاط تنها [۴] می‌باشد تعداد نقاط ممکن است نامتناهی باشد

[۴] isolated

مرتبه این مجموعه نقاط درجه، پوشش نامیده می‌شود. علاوه بر این اگر تعداد نقاط $P^{-1}(m)$ برابر n باشد $\tilde{M}$ پوشش n برگی یا n لایه‌ای از M می‌باشد.

تعریف ۲۲.۱.۱. (پوشش جهانی)پوشش $P : \tilde{M} \longrightarrow M$ را جهانی گوییم هرگاه $\tilde{M}$ همبند ساده باشد.

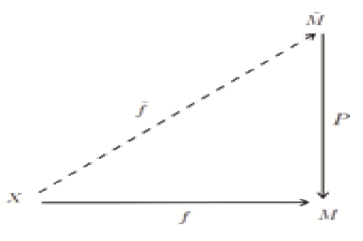
تعریف ۲۳.۱.۱. (هم ارزی پوشش‌ها) دو پوشش $P : \tilde{M} \longrightarrow M$ و $P' : M' \longrightarrow M$ را هم ارز(معادل) گوییم هرگاه همئومورفیسمی مانند $h : M' \longrightarrow \tilde{M}$ موجود باشد به طوریکه $P \circ h = P'$.

تعریف ۲۴.۱.۱. (تبدیل پوششی) فرض کنید$P : \tilde{M} \longrightarrow M$ نگاشت پوششی باشد همئومورفیسم $D : \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}$ را تبدیل پوششی گوییم هرگاه $P \circ D = P$ باشد. این تبدیلات با عمل ترکیب تشکیل گروه می‌دهند که آن را با $Aut(\tilde{M}, P)$ نمایش می‌هیم این گروه می‌تواند روی فضای پوششی عمل کند.

تعریف ۲۵.۱.۱. (پوشش منظم) نگاشت پوششی $P : \tilde{M} \longrightarrow M$ ونقطه $m \in M$ وبالابر آن $\tilde{m}$ (یعنی $P^{-1}(m)$) در نظر بگیرید. P هومورفیسم $P_* : \pi_1(\tilde{M}, \tilde{m}) \longrightarrow \pi_1(M, m)$ را القاء می‌کند. اگر $P * \pi_1(\tilde{M}, \tilde{m})$ در $\pi_1(M, m)$ نرمال باشد آنگاه پوشش را منظم یا نرمال گوییم.

نکته ۲۶.۱.۱. نگاشت پوششی $P : \tilde{M} \longrightarrow M$ دوری است هرگاه $\dfrac{\pi_1(M)}{P_*\pi_1(\tilde{M})}$ دوری باشد. اگر $\dfrac{\pi_1(M)}{P_*\pi_1(\tilde{M})} \cong \mathbb{Z}$ پوشش دوری نامتناهی است به طور مشابه اگر $\dfrac{\pi_1(M)}{P_*\pi_1(\tilde{M})} \cong \mathbb{Z}_n$ پوشش دوری متناهی از مرتبه n است. [۳۷]

تعریف ۲۷.۱.۱. (نگاشت بالابر) نگاشت دلخواه $p : \tilde{M} \longrightarrow M$ را در نظر بگیرید اگر f یک نگاشت پیوسته از فضای X به M باشد نگاشت $\tilde{f} : X \longrightarrow \tilde{M}$ را بالابر f گوییم هرگاه $p \circ \tilde{f} = f$ باشد.



۲.۱ مفاهیمی از هندسه دیفرانسیل

در این بخش در مورد جهت پذیری منیفلد و مفهوم انحنای منیفلد مطالبی را بیان و اثبات خواهیم کرد.

تعریف ۱.۲.۱. (مقطع) فرض کنید M منیفلد n بعدی و TM کلاف مماس آن باشد. یک مقطع از تابع $\pi : TM \longrightarrow M$ عبارت است از نگاشت $X : M \longrightarrow TM$ که به هر نقطه $m \in M$ از دامنه خودش بردار مماس X_m را در نقطه m وابسته می‌کند اگر این دامنه با دامنه یک تابع دیفرانسیل پذیر $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ اشتراک داشته باشد آنگاه Xf را روی اشتراک به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Xf : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

که m را به $(X_m)f$ وابسته می‌کند.

مقطع X را میدان برداری در M گوییم اگر همه توابع Xf دیفرانسیل پذیر باشد.
برای مثال اگر کارت (x, U) را حول نقطه $m \in M$ در نظر بگیریم تابع $\frac{\partial}{\partial x^i} : U \longrightarrow TU$ که m را به $(\frac{\partial}{\partial x^i})_m$ وابسته می‌کند یک میدان برداری را تعریف می‌کند که $(\frac{\partial}{\partial x^i})f = \frac{\partial f}{\partial x^i}$. در واقع $(\frac{\partial}{\partial x^i})_m$ برای $i = ۱, ..., n$ تشکیل یک پایه برای T_mM می‌دهند. اگر (y, V) کارت دیگری از M باشد به طوری که $U \cap V \neq \varnothing$ در ناحیه $U \cap V$ داریم $\frac{\partial}{\partial y^j} = \sum \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$ و $(i, j = ۱, ..., n)$.
یک مجموعه $X_۱, ... X_r$ از میدان‌های برداری روی زیر مجموعه باز U از M را مستقل گوییم اگر در هر نقطه $m \in U$، $X_۱ m, ..., X_r m$ بردارهای مستقل خطی از T_mM باشند.برای مثال $\frac{\partial}{\partial x^۱}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}$ روی دامنه U از کارت x مجموعه مستقل است. درنتیجه میدان‌های برداری مستقل معینی روی هر دامنه مختصاتی وجود دارند.

تعریف ۲.۲.۱. یک مجموعه مرتب از n میدان برداری مستقل $X_۱, ..., X_n$ روی زیرمجموعه باز U از منیفلد n بعدی M را موازی سازی [۵] روی U می‌نامیم. یک منیفلد که به طور سرتاسری موازی سازی می‌پذیرد را موازی پذیر [۶] گوییم.

میدان‌های برداری $\frac{\partial}{\partial x^n}, ..., \frac{\partial}{\partial x^۱}$ تشکیل موازی سازی روی دامنه کارت x می‌دهند که با $\frac{\partial}{\partial x}$ مشخص می‌کنیم.

تعریف ۳.۲.۱. (قاب [۶])یک قاب n تایی eدرفضای برداری حقیقی V عبارت است از مجموعه مرتب $e_۱, ..., e_n$ از بردارهای مستقل خطی در V. اگر e و e' دو قاب برای V باشند رابطه آنها بدین صورت

[۵] parallelization

[۶] parallelizable

است:

$$e'_j = \sum A^i_j \, e_i, \qquad (i,j = ۱, ..., n)$$

که $A = [A^i_j]$ یک ماتریس وارون پذیر است.بین دو قاب e و e' رابطه هم ارزی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e \sim e' \Leftrightarrow detA > ۰$$

این رابطه هم ارزی قاب‌های n بعدی را به دو کلاس هم ارزی تقسیم می‌کند. هر کلاس هم ارزی را یک جهت برای V گوییم.

تعریف ۴.۲.۱. (منیفلد جهت پذیر)یک جهت در منیفلد دیفرانسیل پذیر M عبارت است از تابع : θ $m \mapsto \theta_m$ که θ_m جهتی برای T_mM می‌باشد که در شرط دیفرانسیل پذیری صدق می‌کند. (شرط دیفرانسیل پذیری یعنی هر نقطه در دامنه θ دارای همسایگی U باشد که مقادیر θ بوسیله مقادیر موازی ساز روی U مشخص شود). هرگاه یک منیفلد به طور سرتاسری جهت بپذیرد گوییم منیفلد جهت پذیر است.

مثال ۵.۲.۱. یک موازی ساز یک جهت را روی دامنه‌اش مشخص می‌کند بنابراین منیفلدهای موازی پذیر جهت پذیر هستند.

مثال ۶.۲.۱. یک جهت روی دامنه U از کارت x روی منیفلد M بوسیله موازی ساز $\frac{\partial}{\partial x}$ مشخص می‌شود.به طور مشابه یک جهت روی دامنه V از کارت y بوسیله $\frac{\partial}{\partial y}$ مشخص می‌شود. با توجه به مطالبی که ذکر شد دو جهت روی $U \cap V$ موافق هستند اگر و فقط اگر $|\frac{\partial x}{\partial y}| = det|\frac{\partial x^i}{\partial y^j}| > ۰$ و بنابراین آنها با همدیگر یک جهت را روی $U \cap V$ تعریف می‌کنند. در نتیجه جهت روی منیفلد M بوسیله اطلسی از کارت‌های x_α از M با دامنه U_α روی هر اشتراک $U_\alpha \cap U_\beta$ به طوری که $|\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}| > ۰$ مشخص می‌شود.

یک فضای برداری حقیقی فقط دو جهت را می‌پذیرد که یکی ازآنها رابا ζ ودیگری را با $-\zeta$ مشخص می‌کنیم.

فرض کنید $\theta : m \mapsto \theta_m$ یک جهت سرتاسری روی منیفلد M باشد سپس تابع $-\theta : m \mapsto -\theta_m$ همچنان یک جهت سرتاسری روی M می‌باشد.

گزاره ۷.۲.۱. *فرض کنید θ یک جهت روی منیفلد M باشد و θ' یک جهت روی M با دامنه U باشد اگر U همبند باشد آنگاه θ' به θ یا $-\theta$ محدود می‌شود.*

اثبات. فرض کنید S مجموعه نقاط $m \in M$ باشد به طوری که $\theta_m = \theta'_m$. نقطه دلخواه $s \in S$ را انتخاب می‌کنیم. توابع θ و θ' بوسیله همسایگی‌های V و V' از s با موازی سازهای $X_{i'}, X_i (i = ۱, ..., n)$ مشخص می‌شود. در ناحیه $V \cap V'$ داریم $X'_j = \sum A^i_j X_i$ و تابع دیفرانسیل پذیر $detA : M \longrightarrow \mathbb{R}$ را داریم به طوریکه $(detA)_s > ۰$ است بنابراین روی همسایگی از s $detA > ۰$ است درنتیجه روی این همسایگی‌ها $\theta = \theta'$.پس مجموعه S یک زیرمجموعه بازی از M و زیر فضایی از U می‌باشد.(S تصویر معکوس $(۰, \infty)$ تحت تابع دیفرانسیل پذیر دترمینال است) مجموعه $U - S$ مجموعه نقاط $m \in U$ است که $\theta_m = -\theta'_m$. بحث مشابه نشان می‌دهد که این مجموعه در U باز است اما چون U همبند است نتیجه می‌دهد که S تهی یا خود U است بنابراین θ' به $-\theta$ یا θ محدود می‌شود. □

گزاره ۸.۲.۱. *منیفلد جهت پذیر همبند فقط دو جهت را می‌پذیرد.*

اثبات. کافی است در گزاره قبلی قرار دهیم $U = M$. □

توجه کنید جهت پذیری یک ناوردا برای منیفلدهای دیفرانسیل پذیر است.

ملاحظه ۹.۲.۱. در سرتاسر فصل یک ودو منیفلد M را جهت پذیر وهمبند فرض می‌کنیم و $-M$ رابه عنوان منیفلد سه بعدی با جهت برعکس مشخص می‌کنیم. و قرار داد زیر را برای منیفلد $M_۱$ و $M_۲$ بدین صورت بیان می‌کنیم:

- $M_۱ \cong M_۲$ بدین معنی است که دو منیفلد همئومورفیک هستند.(بدون در نظر گرفتن جهت)
- $M_۱ \ncong M_۲$ یعنی دومنیفلد همئومورفیک نیستند.
- $M_۱ \cong +M_۲$ یعنی وجود دارد یک همئومورفیسم بین $M_۱$ و$M_۲$ که حافظ جهت است.
- $M_۱ \cong -M_۲$ یعنی وجود دارد همئومورفیسمی بین $M_۱$ و$M_۲$ که جهت را برعکس کند.

هدف از ارائه مطالب در ادامه این بخش مفهوم انحنای گاوسی وانحنای میانگین روی منیفلدهاست. که به این منظور ابتدا اولین و دومین فرم بنیادی را معرفی می‌نماییم.

تعریف ۱۰.۲.۱. (متریک القایی روی ابر رویه‌ها [۱۳]) فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که $V^{n-۱}$ زیر منیفلد آن با بعد $n - ۱$ (یا به بیان معادل با بعد متمم یک) باشد که در $\mathbb{R}^n$ جا داده شده است در اینجا تنها به خواص موضعی این ابر رویه توجه خواهیم کرد. بنابراین می‌توانیم خود را به دیسک $D^{n-۱}$ که در $\mathbb{R}^n$ جا داده شده محدود کنیم. برای سادگی فرض می‌کنیم که $V^{n-۱}$ (یا دیسک

D^{n-1}) بوسیله بردار موضع هموار $\vec{r}=\vec{r}(u^1,...,u^{n-1})\subset\mathbb{R}^n$ داده شده است که پارامترها (مختصات) $u^1,...,u^{n-1}$ در دیسکی از فضای $\mathbb{R}^{n-1}$ تغییر می‌کنند. از آنجا که فرض کرده‌ایم که بردار موضع زیر منیفلد هموار تعریف می‌کند بنابراین بردارهای $\frac{d\vec{r}}{du^1},...,\frac{d\vec{r}}{du^{n-1}}$ در هر نقطه تعریفشان مستقل خطی خواهند بود. متذکر می‌شویم که این بردارها عبارتند از مماسهایی بر خطوط مختصاتی متناظرشان در نقطه P واقع بر V^{n-1} (یعنی اگر در ناحیه تعریف همه مختصات ثابت باشد و مختص u^i تغییر کند در V^{n-1} خمی پدید خواهد آمد که از نقطه P می‌گذرد و $\frac{d\vec{r}}{du^i}$ مماس بر این خم در نقطه P خواهد بود). جادهنده هموار V^{n-1} در $\mathbb{R}^n$ روی منیفلد V^{n-1} یک متریک ریمانی القا می‌کند که ساختار آن به شرح زیر است. فرض کنید $x^1,...x^n$ مختصات دکارتی در $\mathbb{R}^n$ باشد در این صورت بردار موضع $\vec{r}$ بوسیله مجموعه توابع هموار $1\leqslant i\leqslant n$ $x^i(u^1,...,u^{n-1})$ تعریف می‌شود. فرض کنید $ds^2=\sum_{i=1}^n(dx^i)^2$ متریک اقلیدسی در $\mathbb{R}^n$ باشد در این صورت فرم درجه ۲ زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned}ds^2|_{V^{n-1}} &= \sum_{i=1}^{n}(dx^i(u^1,...,u^{n-1}))^2=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial x^i}{\partial u^k}du^k)^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k,p=1}^{n-1}\frac{\partial x^i}{\partial u^k}\frac{\partial x^i}{\partial u^p}du^k\,du^p=\sum_{k,p=1}^{n-1}g_{kp}(u)du^k\,du^p,\end{aligned}$$

$$g_{kp}=<\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^k},\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^p}>;$$

که در اینجا $<,>$ نشان دهنده ضرب اسکالر در $\mathbb{R}^n$ است.

تعریف ۱۱.۲.۱. (نخستین فرم درجه ۲ بنیادی [۱۳]) فرم $ds^2|_{V^{n-1}}=\sum_{kp}g_{kp}\,du^k\,du^p$ که درآن توابع $g_{kp}(u^1,...,u^{n-1})$ توابع تعریف شده بالا هستند نخستین فرم درجه ۲ بنیادی V^{n-1} در $\mathbb{R}^n$ نامیده می‌شود.

توابع g_{kp} به بردار موضع ابر رویه بستگی داشته و تحت تغییر بردار موضع یعنی تغییر شکل ابر رویه، تغییر می‌کند. نخستین فرم بنیادی روی بردارهای مماس بر V^{n-1} تعریف می‌شود. به بیان دقیق‌تر اگر $\vec{a},\vec{b}\in T_pV^{n-1}$ دو بردار مماس دلخواه باشد آنگاه ضرب اسکالر به صورت زیر تعریف می‌شود

$$<a,b>_{ds^2(V^{n-1})}=\sum_{k,p=1}^{n-1}g_{kp}a^kb^p$$

در رابطه فوق برای سادگی می‌توانیم نماد $\sum$ را حذف کنیم و وجود اندیس‌های همانند در بالا وپایین عبارت‌ها دلالت بر جمع بستن روی این اندیس‌ها خواهد داشت.

ماتریس تانسور متریک g که از توابع $g_{kp}(u^۱, ...u^{n-۱})$ پدید می‌آید به شکل زیر خواهد بود.

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} g_{۱۱} & g_{۱۲} & \cdots & g_{۱,n-۱} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ g_{n-۱,۱} & g_{n-۱,۲} & \cdots & g_{n-۱,n-۱} \end{pmatrix}$$

می‌دانیم طول خمی مانند $\gamma(t)$ واقع بر $V^{n-۱}$ با رابطه

$$L_a^b(\gamma(t)) = \int_a^b \sqrt{< \dot{\gamma}, \dot{\gamma} >}\, dt$$

بدست می‌آید. بوسیله توابع $g_{kp}(u)$ این عبارت به صورت زیر خواهد بود.

$$L_a^b\gamma(t) = \int_a^b \sqrt{\sum_{k,p=۱}^{n-۱} g_{kp}(u(t))\ \frac{du^k(t)}{dt}\ \frac{du^p(t)}{dt}}\ dt$$

مثال ۱۲.۲.۱. فرض کنید $V^{n-۱}$ به صورت نمودار تابع $x^n = f(x^۱, ..., x^{n-۱})$ باشد آنگاه

$$\begin{aligned} ds^۲|_{V^{n-۱}} &= \sum_{i=۱}^{n-۱}(dx^i)^۲ + \left(dx^n(x^۱, ...x^{n-۱})\right)^۲ \\ &= \sum_{i=۱}^{n-۱}(dx^i)^۲ + \sum_{k,p}^{n-۱} \frac{\partial f}{\partial x^k}\ \frac{\partial f}{\partial x^P}\ dx^k\ dx^p \\ &= \sum_{k,p}^{n-۱}(\delta_{kp} + \frac{\partial f}{\partial x^k}\ \frac{\partial f}{\partial x^p})dx^k\ dx^p \\ &= g_{kp}(x^۱, ..., x^{n-۱})\ dx^k\ dx^p. \end{aligned}$$

مثلا اگر $n = ۳$ باشد آنگاه V یک سطح در فضای $\mathbb{R}^۳$ بوده وداریم

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

در این صورت نخستین فرم بنیادی به شکل زیر می‌تواند باشد

$$ds^۲|_{V^۲} = Edu^۲ + ۲F du\, dv + Gdv^۲$$

که در آن

$$F =< \vec{r}_u, \vec{r}_v >,\ G =< \vec{r}_v, \vec{r}_v >,\ E =< \vec{r}_u, \vec{r}_u >$$

ضرایب فرم بوده و بر حسب مختصات بردار موضع $\vec{r}$ به شکل زیر خواهند بود

$$\begin{aligned} F &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ G &= x_v^{۲} + y_v^{۲} + z_v^{۲} \\ E &= x_u^{۲} + y_u^{۲} + z_u^{۲}. \end{aligned}$$

در این حالت ماتریس متریک به فرم

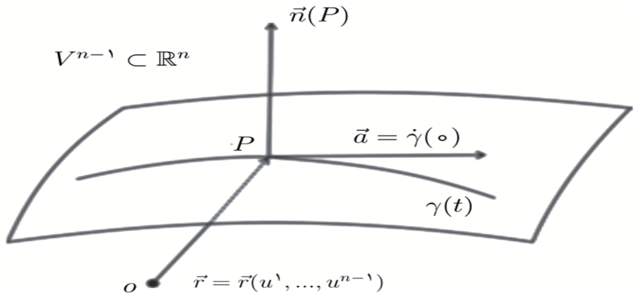
$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

خواهد بود. متذکر می‌شویم که متریک $ds^{۲}(V^{۲})$ را همدیس اقلیدسی گوییم هرگاه $E = G,\ F = ۰$

لم ۱.۲.۱۳. *فرض کنید $V^{n-۱}$ زیر مجموعه $\mathbb{R}^n$ زیر منیفلد هموار بوده و $\mathcal{G}$ نخستین فرم بنیادی باشد. در این صورت فرم $\mathcal{G}$ ناتباهیده است.*

اثبات. بنابر تعریف بردار موضع $\vec{r} = \vec{r}(u^{۱}, .., u^{n-۱})$ تمام بردارهای $\vec{r}_{u^k}$ برای $۱ \leqslant k \leqslant n - ۱$ در نقاط $P \in V^{n-۱}$ مستقل خطی‌اند بنابراین ماتریس $\mathcal{G}$ که از ضرب اسکالر بردارهای $\vec{r}_{u^k}$ و $\vec{r}_{u^p}$ تشکیل شده‌است یعنی $\mathcal{G} = (< \vec{r}_{u^k}, \vec{r}_{u^p} >)$ ناتباهیده خواهد بود. □

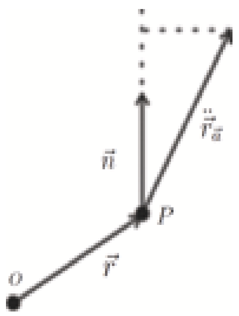
حال قصد داریم به معرفی دومین فرم درجه دو بنیادی بپردازیم. فرض کنید $V^{n-۱}$ ابر رویه در $\mathbb{R}^n$ باشد که با بردار موضع $\vec{r} = \vec{r}(u^{۱}, ..., u^{n-۱})$ مشخص می‌شود. فرض کنید $\vec{n} = \vec{n}(P)$ بردار اقلیدسی باشد که بر سطح $V^{n-۱}$ در نقطه P عمود است. فرم درجه دو $Q(\vec{a}, \vec{a})$ را به ازای بردار دلخواه $\vec{a} \in T_P V^{n-۱}$ با ارائه مقادیر $Q(\vec{a}, \vec{a})$ تعریف خواهیم کرد. به این منظور خم دلخواه هموار $\gamma(t)$ را که روی $V^{n-۱}$ قرار داشته واز نقطه P می‌گذرد در نظر می‌گیریم به طوری که $\gamma(۰) = P$ و $\vec{a} = \dot{\gamma}(۰)$. چون فرض می‌کنیم $V^{n-۱}$ یک زیر منیفلد هموار $\mathbb{R}^n$ است چنین خمی همواره وجود دارد و به طور غیر یکتا می‌تواند تعریف شود.



در امتداد خم $\gamma(t)$ بردار موضع $\vec{r}$ تابعی از t است پس $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{r}(u(t))|_{t=۰}$. حال تابع برداری $\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\vec{r}(u(t))$ و مشتق‌اش برحسب t یعنی $\ddot{\vec{r}} = \frac{d^۲}{dt^۲}\vec{r}(u(t))$ را در نظر می‌گیریم. با نماد $\ddot{\vec{r}}_a$ مقدار $\ddot{\vec{r}}$ را به ازای $t = ۰$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۲.۱. قرار می‌دهیم $Q(\vec{a}, \vec{a}) =< \ddot{\vec{r}}_a, \vec{n} >$.

مقدار تعریف شده بالا برابربا مقدار تصویر بردار $\ddot{\vec{r}}_a$ روی بردار قائم در نقطه P می‌باشد.



حال به محاسبه مقادیر $Q(\vec{a}, \vec{a})$ بر حسب مختصات بردار $\vec{r}$ می‌پردازیم، داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{r}_{u^k} \frac{du^k(t)}{dt}, \\ \frac{d^۲\vec{r}}{dt^۲} &= \vec{r}_{u^k, u^p} \frac{du^k}{dt} \frac{du^p}{dt} + \vec{r}_{u^k} \frac{d^۲u^k}{dt^۲} \end{aligned}$$

بنابراین چون $\vec{r}_{u^k} \in T_P(V^{n-۱}),\ \vec{n} \perp T_P(V^{n-۱})$ داریم:

$$\begin{aligned} < \frac{d^۲}{dt^۲} r(u(t)), \vec{n} > &= < \vec{r}_{u^k, u^p} \frac{du^k}{dt} \frac{du^p}{dt} + \vec{r}_{u^k} \frac{d^۲u^k}{dt^۲}, \vec{n} > \\ &= < \vec{r}_{u^k, u^p} \frac{du^k}{dt} \frac{du^p}{dt}, \vec{n} > + < \vec{r}_{u^k} \frac{d^۲u^k}{dt^۲}, \vec{n} > \\ &= < \vec{r}_{u^k, u^p} \frac{du^k}{dt} \frac{du^p}{dt}, \vec{n} > + \frac{d^۲u^k}{dt^۲} < \vec{r}_{u^k}, \vec{n} > \\ &= < \vec{r}_{u^k, u^p} \frac{du^k}{dt} \frac{du^p}{dt}, \vec{n} > + ۰ \end{aligned}$$