دانشگاه شیخ‌بهائی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی

قضایای KKM و کاربردهای آن در فضاهای متریک ابرمحدب

پژوهشگر:

عالیه پروانه ترکان

استاد راهنما:

دکتر جعفر زعفرانی

استاد مشاور:

دکتر مجید فخار

اسفند ماه ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان‌نامه نگاشت‌های نستر-کوراتفسکی-مازورکویچ (KKM) وقضایای آن در فضاهای متریک ابرمحدب، $\mathscr{N}\mathscr{R}$-فضاهای متریک و فضاهای متریک ابرمحدب نافشرده برای نگاشت‌های چند مقداری بررسی شده‌است.

همچنین قضایای نقطه ثابت برای این فضاها مورد بررسی قرار گرفته‌است و در نهایت کاربردهای این قضایا بیان شده‌است.

کلمات کلیدی: قضایای KKM، قضایای نقطه ثابت، فضای متریک ابرمحدب، $\mathscr{N}\mathscr{R}$-فضای متریک، فضای متریک ابرمحدب نافشرده، نگاشت‌های چند مقداری.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

مقدمه ۵

فصل ۱. تعاریف و قضایای مقدماتی

۱–۱ توپولوژی ۷

۱–۲ آنالیز تابعی ۱۲

۱–۳ نگاشت‌های چند مقداری ۱٤

۱–٤ قضایای نقطه ثابت ۱٦

فصل ۲. قضایای KKM

۲–۱ قضایای KKM در فضاهای متریک ابرمحدب ۱۸

۲–۲ قضایای KKM در $\mathscr{N}\mathscr{R}$-فضاهای متریک ۵۷

۲–۳ قضایای KKM در فضاهای متریک ابرمحدب نافشرده ٦۷

فصل ۳. قضایای نقطه ثابت

۳-۱ قضایای نقطه ثابت در فضاهای متریک ابرمحدب ۷۲

۳-۲ قضایای نقطه ثابت در $\mathscr{N}\mathscr{R}$-فضاهای متریک ۸۳

۳-۳ قضایای نقطه ثابت در فضاهای متریک ابرمحدب نافشرده ۹۳

فصل ٤. کاربردهای قضایای KKM ۹٦

کتاب نامه ۱۰۲

واژه نامه ۱۰۷

مقدمه

قضیه نقطه ثابت براؤدر، قضیه نستر- کوراتفسکی- مازورکویچ (به‌طور خلاصه KKM) و بسیاری از نتایج در آنالیز غیرخطی، معادل هستند. بنابراین کاربردها و تعمیم‌های قضیه KKM همواره وجود داشته‌است.

مهمترین نتیجه‌ی نگاشت‌های KKM، قضیه معروف فان است، که به‌عنوان ابزاری سودمند در آنالیز غیرخطی به‌کار می‌رود.

خمسی[۱] **[۲۴]**، نگاشت‌های KKM را در فضاهای متریک ابرمحدب تعریف کرده‌است و با توجه به آن قضیه بهترین کی- فان، در فضاهای متریک ابرمحدب را به‌دست آورده‌است.

کرک و شین[۲] **[۳۰]**، تعدادی از قضایای نقطه ثابت را برای نگاشت‌های غیرگسترشی و انقباضی در فضاهای متریک ابرمحدب ثابت کرده‌اند.

ساین[۱] **[۴۲]** و سواردی[۲] **[۴۳]** به‌طور مستقل خاصیت نقطه ثابت را برای نگاشت‌های غیرگسترشی در فضاهای ابرمحدب کراندار ثابت کرده‌اند.

---

[۱] Khamsi
[۲] Kirk and Shin

رابطه بین فضاهای متریک ابرمحدب و نگاشت‌های غیرگسترشی بسیار مهم است و ریاضی‌دانان زیادی از جمله بایون[۳] [۵]، گوبل[۴] و کرک [۱۶]، خمسی [۲۶و۲۷]، کرک [۲۸و۲۹]، لین[۵] و ساین [۳۳] و ساین [۴۰و۴۱] آن را بررسی کرده‌اند.

هدف این پایان‌نامه که شامل چهار فصل است، بررسی قضایای KKM برای نگاشت‌های چند مقداری در فضاهای متریک ابرمحدب، ابرمحدب نافشرده و $\mathscr{N}\mathscr{R}$-فضاهای متریک و کاربردهای آن‌ها و بیان قضایای نقطه ثابت در این فضاها است.

در فصل اول به تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌پردازیم.

در فصل دوم قضایای KKM، قضیه بهترین تقریب فان و قضـایای انطبـاق فـان را در فضـاهای متریـک ابرمحدب، ابرمحدب نافشرده و $\mathscr{N}\mathscr{R}$-فضاها بیان و اثبات می‌کنیم.

در فصل سوم با استفاده از قضایایی که در فصل دوم بیان شده، برخی قضایای نقطه ثابت، از جمله قضیه نقطه ثابت شودر- تیخونوف و قضیه نقطه ثابت براؤدر- فان را برای نگاشت‌های چند مقداری در این فضاها بیان و اثبات می‌کنیم.

در فصل چهارم با استفاده از اصل KKM متریکی تعمیم‌یافته در فضاهای متریـک ابـرمحـدب، بعضـی از کاربردهای وجود نقطه زینی، قضایای اشتراک و وجود تعادل‌های نش در نظریه بازی‌ها را بررسی می‌کنیم.

---

[۱] Sine
[۲] Soardi
[۳] Baillon
[۴] Goebel
[۵] Lin

فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل مفاهیم مورد نیاز بـرای درک فصـل‌هـای بعـدی از مراجـع **[۱]**، **[۷]**، **[۱۵]**، و **[۳۹]** آورده شده‌است.

۱.۱. توپولوژی

به‌طور کلی می‌توان توپولوژی را مطالعه خواص توپولوژیک فضاهای توپولوژیک تعریف کرد.

تعریف ۱.۱ . فرض کنید $X \neq \varnothing$ و $\tau \subseteq 2^X$ (که در آن 2^X مجموعه تمام زیرمجموعه‌های X است) به قسمی باشد که سه اصل زیر برقرار باشند

۱) $\varnothing \in \tau$ و $X \in \tau$.

۲) اگر برای هر $\alpha \in \Lambda$، $G_\alpha \in \tau$ آنگاه $\bigcup\{G_\alpha \in \tau : \alpha \in \Lambda\}$.

۳) اگر برای هر $i=\{1,\dots,n\}$، $G_i \in {}^2$ آنگاه $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in {}^2$.

در این صورت ² یک توپولوژی در X است.

عناصر ² به مجموعه‌های باز، موسوم‌اند و جفت مرتب $(X,{}^2)$ را یک فضای توپولوژیک می‌نامیم.

تعریف ۲.۱. فرض کنید $(X,{}^2)$ فضای توپولوژیک و $Y \subset X$ باشد، گردایه $\{{}^2{}_Y=\{V\cap Y : V\in{}^2\}$ از زیرمجموعه‌های Y را در نظر بگیرید، در این‌صورت $(Y,{}^2{}_Y)$ یک فضای توپولوژیک است و توپولوژی ${}^2{}_Y$، توپولوژی القایی یا توپولوژی نسبی ² روی Y است.

تعریف ۳.۱. تابع $f:(S,{}^2{}_1)\to(T,{}^2{}_2)$ در $x\in S$ پیوسته است هر گاه $f(x)\in U\in{}^2{}_2$ ایجاب کند عنصری مانند $G\in{}^2{}_1$ وجود دارد به‌طوریکه $x\in G$ و $f(G)\subset U$.

تابع f پیوسته است اگر f در هر نقطه $x\in S$ پیوسته باشد. یک تابع پیوسته را، نگاشت نیز می‌گوییم.

تعریف ۴.۱. یک فضای برداری حقیقی مانند X با توپولوژی ²، فضای برداری توپولوژیک نامیده می‌شود هرگاه

۱) نگاشت $(x,y)\mapsto x+y$ از $X\times X$ به X پیوسته باشد.

۲) نگاشت $(ª,y)\mapsto ª y$ از $\mathbb{R}\times X$ به X پیوسته باشد.

یعنی اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر در بردار تحت توپولوژی ² اعمالی پیوسته باشند.

تعریف ۵.۱. فرض کنید برای هر $\sim\in\Lambda$، $X_\sim\neq\varnothing$.

۱) حاصلضرب دکارتی $\prod\{X_\sim:\sim\in\Lambda\}$ عبارت است از تمام توابع $X:\Lambda\to\bigcup\{X_\sim:\sim\in\Lambda\}$ به‌قسمی که برای هر $\sim\in\Lambda$، $X(\sim)\in X_\sim$.

۲) نگاشت تصویری $\pi_\alpha : \prod\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \to X_\alpha$ برای هر $\alpha \in \Lambda$ و $x \in \prod\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$، به‌صورت $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$ تعریف می‌شود.

تعریف ۶.۱. اگر X مجموعه غیرتهی و تابع $d : X \times X \to \mathbb{R}$ در شرایط زیر صدق کند

۱) برای هر $x, y \in X$، $d(x,y) \geq 0$.

۲) برای هر $x, y \in X$، $x = y$ اگر و تنها اگر $d(x,y) = 0$.

۳) برای هر $x, y \in X$، $d(x,y) = d(y,x)$.

٤) برای هر $x, y, z \in X$، $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.(نابرابری مثلثی).

آنگاه d، را تابع فاصله یا متریک روی X، و (X, d) را یک فضای متریک گوییم.

می‌دانیم هر فضای متریک یک فضای توپولوژیکی است.

تعریف ۷.۱. فضای توپولوژیک X، فضای هاوسدورف (T_2) نامیده می‌شود هر گاه به ازای هر دو نقطه متمایز x و y در X، دو مجموعه باز و مجزا موجود باشند، که یکی شامل x و دیگری شامل y باشد.

تعریف ۸.۱. خانواده $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ از مجموعه‌های یک فضای توپولوژیک X را موضعا متناهی گوییم اگر به‌ازای هر نقطه $x \in X$، مجموعه‌ای باز شامل x موجود باشد به‌طوری که تنها تعداد متناهی از عناصر این خانواده را قطع کند. به‌عبارت دیگر خانواده $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ در فضای توپولوژیک $\langle X, \tau \rangle$ موضعا متناهی است اگر برای هر $x \in X$، $G \in \tau$ موجود باشد که $x \in G$ و رابطه $G \bigcap A_\alpha \neq \varnothing$ تنها برای تعداد متناهی از اندیس‌های $\alpha \in \Lambda$، برقرار باشد.

این مفهوم به موقعیت A_α ها در X بستگی دارد و هیچ ربطی به اشتراک‌هایی که بین A_α ها ممکن است موجود باشد، ندارد.

تعریف ۹.۱ . اگر در فضای متریک (X, d) هر دنباله کوشی، همگرا باشد آنگاه (X, d) فضای متریک کامل است.

تعریف ۱۰.۱ . فرض کنید $(X, ^2)$ فضای توپولوژیک باشد، $\{G_{\sim} : \sim \in \Lambda\} \subset 2^X$ پوششی برای $(X, ^2)$ است اگر $X \subset \bigcup \{G_{\sim} : \sim \in \Lambda\}$.

اگر برای هر $\sim \in \Lambda$، $G_{\sim} \in {}^2$، پوشش فوق، پوشش باز نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۱ . فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار تعریف شده روی فضای توپولوژیک X باشد. در این صورت مجموعه بسته $\overline{\{x \in X : f(x) \neq \varnothing\}}$ را محمل f می‌نامیم و با $Supp\ f$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۱ . فرض کنید X فضای هاوسدورف باشد. خانواده $\{ f_{\sim} : \sim \in \Lambda\}$ از نگاشت‌های پیوسته $f_{\sim} : X \to [0,1]$ یک افراز پیوسته یکانی روی X است اگر

۱) محمل همه $f_{\sim}$ ها یک پوشش بسته موضعا متناهی از X را تشکیل دهد.

۲) برای هر $x \in X$، رابطه $\sum_{\sim \in \Lambda} f_{\sim}(x) = 1$ برقرار باشد.

جمع بالا خوش تعریف است زیرا، هر x در محمل حداکثر تعداد متناهی از $f_{\sim}$ ها قرار دارد.

تعریف ۱۳.۱ . فرض کنید $\{U \; : \; \in \Gamma\}$ یک پوشش باز X باشد، گوییم افراز پیوسته یکانی $\{ f \; : \; \in \Gamma\}$ وابسته به پوشش $\{U \;\}$ است اگر به‌ازای هر $\in \Gamma$ ،

$$Supp\ f \subseteq U.$$

تعریف ۱۴.۱ . فضای توپولوژیک X فشرده است اگر پوشش باز آن شامل یک زیر پوشش باپایان (باز) باشد.

تذکر ۱.۱ . فشرده بودن فضای توپولوژیک $(X, ^2)$ تقریبا بستگی تمام به توپولوژی ^{2} دارد نه به مجموعه X.

(استثناء فقط در حالتی است که X یک مجموعه باپایان باشد، که در این صورت $\left(X,{}^{2}\right)$ به ازای همه توپولوژی‌های ممکن ^{2} فشرده است).

قضیه ۱.۱. هر گاه تابع پوشای $f:\left(S,{}^{2}{}_{1}\right)\to\left(T,{}^{2}{}_{2}\right)$، پیوسته و $\left(S,{}^{2}{}_{1}\right)$ فشرده باشد آنگاه فضای $\left(T,{}^{2}{}_{2}\right)$ نیز فشرده است.

اثبات: به مرجع [۳۹] رجوع کنید.

قضیه ۲.۱. فضای $\left(X,{}^{2}\right)$ فشرده است اگر و تنها اگر برای خانواده $\{F_{\sim}\}_{\sim\in\Lambda}$ از زیرمجموعه‌های بسته X با خاصیت اشتراک متناهی($\bigcap\left\{F_{\sim_i}:i=1,\dots,n\right\}\neq\varnothing$)، داشته‌باشیم

$$\bigcap\left\{F_{\sim}:\sim\in\Lambda\right\}\neq\varnothing.$$

اثبات: به مرجع [۳۹] رجوع کنید.

تعریف ۱۵.۱. فضای توپولوژیک X موضعا فشرده نامیده می‌شود اگر هر نقطه آن دارای یک همسایگی فشرده باشد.

تعریف ۱۶.۱. یک زیرمجموعه غیرتهی A از فضای توپولوژیک X، به‌طور فشرده باز (به‌طور فشرده بسته) گفته می‌شود، اگر برای هر زیرمجموعه فشرده و غیرتهی C از X، $A\cap C$ در C باز (بسته) باشد.

تعریف ۱۷.۱. فرض کنید X فضای توپولوژیک باشد.

$A\subseteq X$ را یک درون‌بر X می‌نامند اگر و تنها اگر تابع پیوسته‌ای مانند $f:X\to A$ وجود داشته باشد به‌طوریکه برای هر $x\in A$، $f(x)=x$. یعنی نگاشت همانی بر روی A را بتوان به‌طور پیوسته بر X گسترش داد. تابع f را یک درون‌بری می‌نامند.

به عنوان مثال بازه بسته $I=[0,1]$ یک درون‌بر فضای حقیقی $\mathbb{R}$، با تابع درون‌بری f، که به‌صورت زیر تعریف شده‌است می‌باشد

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x & 0\le x\le 1 \\ \dfrac{1}{x} & x>1 \end{cases}$$

تعریف ۱.۱۸ . فضای Y را درون‌بر مطلق می‌نامند هرگاه Y متریک‌پذیر بوده و برای هر فضای متریک‌پذیر X و هر زیرمجموعه بسته $A\subseteq X$، هر تابع پیوسته $f:A\to Y$ قابل گسترش روی X باشد.

۱.۲ . آنالیز تابعی

تعریف ۱.۱۹ . اگر X و Y دو فضای نرم‌دار باشد، گردایه‌ی تمام عملگرهای کراندار از X در Y که با $L(X,Y)$ نشان داده می‌شود، با اعمال جبری زیر یک فضای برداری است.

۱) $(T+S)(x)=T(x)+S(x)$.

۲) $(\sim T)(x)=\sim T(x)$

$L(X,Y)$ مجهز به نرم $\|T\|=\sup\{\|T(x)\|:\|x\|=1\}$ یک فضای برداری نرم‌دار است.

تعریف ۱.۲۰ . یک فضای برداری نرم دار، فضای باناخ نامیده می‌شود، اگربا نرم تعریف شده روی فضا، یک فضای کامل باشد.

تعریف ۱.۲۱ . هر فضای با ضرب داخلی را که نسبت به نرم القا شده به‌وسیله ضرب داخلی خود کامل باشد، یک فضای هیلبرت نامیده می‌شود.

تعریف ۲۲.۱. زیرمجموعه A از فضای توپولوژیک برداری X، محدب است هر گاه برای هر $x, y \in X$ و $0 \le t \le 1$ داشته باشیم

$$t x + (1-t) y \in A.$$

تعریف ۲۳.۱. فرض کنید A زیرمجموعه فضای توپولوژیک برداری X باشد، اشتراک مجموعه‌های محدب شامل A (کوچکترین مجموعه محدب شامل A)، غلاف محدب A ($Conv(A)$) نامیده می‌شود. به عبارت دیگر

$$Conv(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \; : x_i \in A \; , \alpha_i \ge 0 \; , \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

تعریف ۲۴.۱. یک فضای توپولوژیک برداری $\langle X, \tau \rangle$، موضعا محدب است هرگاه τ دارای یک پایه در همسایگی صفر، شامل مجموعه‌های محدب باشد.

تعریف ۲۵.۱. فضای توپولوژیک، قویا ناهمبند است هرگاه فضای منظم کامل باشد و در آن بستار هر مجموعه باز، باز باشد.

تعریف ۲۶.۱. تابع $f : X \to X$ را در نظر بگیرید، نقطه $x_0 \in X$، نقطه ثابت f است هرگاه، $x_0 = f(x_0)$

لم ۱.۱. (لم زرن) اگر هر زنجیر واقع در مجموعه جزئامرتب X، در X کران بالا (پایین) داشته‌باشد آنگاه

X حداقل یک عنصر ماکسیمال (مینیمال) دارد.

تعریف ۲۷.۱. فضای متریک (X, d)، کراندار کلی است هرگاه

به ازای هر $r > 0$، تعداد متناهی نقطه مانند $x_1, x_2, \ldots, x_n$ وجود داشته باشد به‌طوریکه $X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$.

تعریف ۲۸.۱ . ℓ_∞،عبارت است از فضای باناخ همه دنباله‌های کراندار که به نرم sup مجهز است.

$$\ell_\infty(I)=\left\{(x_i)_{i\in I}:\left\|(x_i)\right\|_\infty:=\sup_{i\in I}\|x_i\|<\infty\right\}$$

تذکر ۱.۱ . اگر X و Y دو فضای نرم‌دار باشد، $L(X,Y)$ نیز نرم‌دار است و اگر Y فضای باناخ باشد $L(X,Y)$،یک فضای باناخ است.

۳.۱ . نگاشت‌های چندمقداری

تعریف ۲۹.۱ . نگاشت $F:X\to 2^Y$ که به هر نقطه $x\in X$، یک زیرمجموعه یکتای $F(x)$ از Y را نسبت می‌دهد، نگاشت چند مقداری یا نگاشت مجموعه‌مقدار می‌نامند.

تعریف ۳۰.۱ . اگر X و Y دو فضای توپولوژیکی باشد. معکوس $F:X\to 2^Y$، نگاشت چند مقداری $F^{-1}:Y\to 2^X$، تعریف شده به صورت $F^{-1}(y)=\{x\in X: y\in F(x)\}$ می‌باشد.

تعریف ۳۱.۱ . اگر X و Y دو فضای توپولوژیکی باشد. نگاشت چند مقداری $F:X\to 2^Y$ را در نظر بگیرید. گراف F ($G_r(F)$) را با $\{(x,y)\in X\times Y: y\in F(x)\}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۲.۱ . اگر X و Y دو فضای توپولوژیکی باشد. نگاشت چند مقداری $F:X\to 2^Y$، نیم‌پیوسته بالایی $(u.s.c.)$ است اگر برای هر زیرمجموعه باز V از Y مجموعه $\{x\in X: F(x)\subset V\}$ در X باز باشد. تعریف فوق را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت

برای هر مجموعه بسته $B\subset Y$، مجموعه $F^{-1}(B)=\{x\in X: F(x)\cap B\neq\varnothing\}$ در X بسته باشد.

تعریف ۳۳.۱ . اگر X و Y دو فضای توپولوژیکی باشد. نگاشت چند مقداری $F : X \to 2^Y$، نیم‌پیوسته پایینی $(l.s.c.)$ است اگر برای هر زیرمجموعه باز V از Y مجموعه $\{x \in X \,:\, F(x) \cap V \neq \emptyset\}$ در X باز باشد.

تعریف ۳۴.۱ . اگر X و Y دو فضای توپولوژیکی و $F : X \to 2^Y$ نگاشت چند مقداری باشد آنگاه

F پیوسته است هرگاه نیم‌پیوسته بالایی و نیم‌پیوسته پایینی باشد.

تعریف ۳۵.۱ . اگر X و Y دو فضای توپولوژیکی باشد. نگاشت چند مقداری $F : X \to 2^Y$، بسته است اگر $G_r(F)$ در $X \times Y$ بسته باشد.

تعریف ۳۶.۱ . اگر X و Y دو فضای توپولوژیکی باشد. نگاشت چند مقداری $F : X \to 2^Y$ را در نظر بگیرید. بستار F ($cl\,F(X)$)، بزرگترین تابع نیم‌پیوسته پایینی است که از F کمتر باشد.

تعریف ۳۷.۱ . اگر X و Y دو فضای توپولوژیکی باشد. نگاشت چند مقداری $F : X \to 2^Y$، فشرده است اگر $cl\,F(X)$ زیرمجموعه فشرده‌ای از Y باشد.

قضیه ۳.۱ . فرض کنید $F : X \to 2^Y$ یک نگاشت چند مقداری، Y فضای فشرده هاوسدورف و برای هر $x \in X$، $F(x)$ بسته باشد. نگاشت F نیم‌پیوسته بالایی است اگر و تنها اگر $G_r(F)$ در $X \times Y$ بسته باشد.

اثبات : به مرجع [۷] رجوع کنید.

قضیه ۴.۱ . فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیکی و $F : X \to 2^Y$ نگاشت چند مقداری، و Y فضای فشرده باشد. اگر F بسته باشد آنگاه F نیم‌پیوسته بالایی است.

اثبات : به مرجع [۷] رجوع کنید.

تعریف ۳۸.۱ . اگر X و Y دو فضای توپولوژیکی و $F : X \to 2^Y$ نگاشت چند مقداری و A زیرمجموعه غیرتهی از X باشد. تحدید F به A $(F|_A)$، نگاشت چند مقداری $F|_A : A \to 2^Y$ است که برای همه $x \in A$ به صورت $F|_A(x) = F(x)$ تعریف می‌شود.

تعریف ۳۹.۱ . اگر X و Y دو فضای توپولوژیکی باشد. تابع $f : X \to Y$ یک انتخاب پیوسته از نگاشت $F : X \to 2^Y$ است، اگر f پیوسته باشد وبرای هر $x \in X$، داشته باشیم $f(x) \in F(x)$.

تعریف ۴۰.۱ . اگر X و Y دو فضای توپولوژیکی باشد. نگاشت چند مقداری $F : X \to 2^Y$ را در نظر بگیرید، نقطه $x_0 \in X$، یک نقطه ثابت برای نگاشت F است هرگاه $x_0 \in F(x_0)$.

۴.۱ . قضایای نقطه ثابت

در این قسمت تعدادی از قضایای نقطه ثابت، که در فصلهای بعد از آنها استفاده می‌شود آورده شده است.

قضیه ۵.۱ . (قضیه نقطه ثابت براوئر در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$)

اگر B گوی بسته یکه در $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه هر نگاشت پیوسته $f : B \to B$ حداقل یک نقطه ثابت دارد.

تذکر ۳.۱ . قضیه نقطه ثابت براوئر توسط شودر به فضاهای با بعد نامتناهی گسترش داده شد.

قضیه ۶.۱ . (قضیه نقطه ثابت شودر)

فرض کنید X فضای باناخ، C زیرمجموعه محدب و فشرده از X و $f : C \to C$ یک نگاشت پیوسته باشد. در این صورت f حداقل یک نقطه ثابت در C دارد.

تذکر ۴.۱. تیخونوف قضیه نقطه ثابت براوئر را برای زیرمجموعه فشـرده و محـدب از یـک فضـای موضـعا محدب گسترش داد.

قضیه ۷.۱ . (قضیه نقطه ثابت تیخونوف)

فرض کنید C زیرمجموعه محدب، فشرده و غیرتهی از یک فضـای موضـعا محـدب X و $f : C \to C$ یـک نگاشت پیوسته باشد. در این صورت f دارای یک نقطه ثابت است.

قضیه ۸.۱ . (قضیه نقطه ثابت براؤدر)

فرض کنید X زیرمجموعه فشرده، محـدب و غیـرتهـی از یـک فضـای بـرداری توپولوژیـک هاسـدورف و $T : X \to 2^X$ نگاشتی چند مقداری با شرایط زیر باشد

i) برای هر $x \in X$، $T(x)$ محدب و غیرتهی است.

ii) برای هر $y \in X$، مجموعه $T^{-1}(y)=\{x \in X : y \in T(x)\}$ باز است.

در این‌صورت $x_0 \in X$ وجود دارد به‌طوریکه

$$x_0 \in T(x_0).$$

فصل دوم

قضایای KKM

۱.۲. قضایای KKM در فضاهای متریک ابر محدب

مفهوم ابرمحدب بودن را آرونزجان[۱] و پانیچ پکدای[۲] **[۴]** ابداع کردند، و ثابت کردند یک فضای ابرمحدب یک درون‌بری مطلق است، یعنی یک درون بری غیرگسترشی از هر فضای متریک که به‌صورت جادهی ایزومتریک می‌باشد، به همین دلیل رابطه بین فضاهای متریک ابرمحدب و نگاشت‌های غیرگسترشی بسیار مهم است. ایزبل[۳] **[۲۲]** برای هر فضای متریک یک غلاف ابر محدب تعریف کرد.

تعریف ۱.۱.۲ . فضای متریک (M,d) را ابرمحدب گوییم هرگاه برای هر مجموعه از نقاط $\{x_{\sim}\}_{\sim\in I}$ از M و هر مجموعه اعداد حقیقی نامنفی $\{r_{\sim}\}_{\sim\in I}$، به‌طوریکه برای هر $\sim, \ \in I$

$$d\left(x_{\sim},x\ \ \right)\le r_{\sim}+r$$

داشته باشیم

۱ Aronszajn
۲ Panitchpakdi
۳ Isbell

$$\bigcap_{\sim \in I} B(x_{\sim}, r_{\sim}) \neq \emptyset.$$

$B(x,r)$ را گوی بسته به مرکز $x \in M$ و شعاع $r \geq 0$ و $N(x,r)$ را گوی باز به مرکز $x \in M$ و شعاع $r \geq 0$ در نظر می‌گیریم.

تذکر ۱.۱.۲. تعریف فوق می‌تواندبه‌صورت خاصیت اشتراک دوتایی به‌علاوه محدب متریک بودن بیان می‌شود **[۴]**، و محدب متریک بودن یعنی، برای هر $x, y \in M$ و $\sim \in [0,1]$، $z \in M$ وجود داشته باشد، به‌طوریکه

$$d(y,z) = (1-\sim)\, d(x,y)$$

و

$$d(x,z) = \sim d(x,y).$$

زیرا از خاصیت اشتراک دوتایی نتیجه می‌گیریم برای هر $x, y \in M$ و اعداد حقیقی مثبت ~ و ، به‌طوریکه داشته باشیم $d(x,y) \leq \sim +$ ، $z \in M$ وجود دارد به‌طوریکه $d(x,z) \leq \sim$ و $d(z,y) \leq$ و این معادل است با اینکه داشته باشیم

$$z \in B(x,\sim) \cap B(y, \ )$$

بنابراین $B(x,\sim) \cap B(y, \ ) \neq \emptyset$ و محدب متریکی نتیجه می‌دهد $d(x,y) \leq \sim +$.

اگر $\sim \in [0,1]$ و $=1-\sim$ ، در این‌صورت داریم

$d(x,z) = \sim d(x,y)$ و $d(y,z) = (1-\sim)\, d(x,y)$.

با توجه به اینکه در فضاهای خطی محدب متریک بودن برقرار است، تعریف ابرمحدب بودن به خاصیت اشتراک دوتایی در گوی‌ها (اشتراک غیرتهی داشتن هر دو گوی بسته) کاهش می‌یابد.

زیرا اگر M را یک فضای متریک و $\left\{B\left(x_\alpha,r_\alpha\right)\right\}_{\alpha\in I}$ را خانواده‌ای از گوی‌های بسته با خاصیت اشتراک دوتایی در نظر بگیریم آنگاه برای هر $\alpha,\beta\in I$ اگر $z\in B\left(x_\alpha,r_\alpha\right)\cap B\left(x_\beta,r_\beta\right)$، داریم

$$d\left(x_\alpha,x_\beta\right)\leq d\left(x_\alpha,z\right)+d\left(z,x_\beta\right)\leq r_\alpha+r_\beta$$

بنابراین اگر فضا ابرمحدب باشد داریم

$$\bigcap_{\alpha\in I} B\left(x_\alpha,r_\alpha\right)\neq\varnothing.$$

فضاهای متریک ابرمحدب ویژگی های جالبی دارند.

با یک مثال ساده می‌توانیم نشان دهیم اشتراک دو فضای متریک ابرمحدب لزوما ابرمحدب نیست.

مثال ۱. در فضای $\left(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_\infty\right)$، H_1 را پاره‌خطی که نقاط $(-1,0)$ و $(1,0)$ را به یکدیگر وصل می‌کند و H_2 را اجتماع دو پاره‌خطی که یکی از آن‌ها دو نقطه $(-1,0)$ و $(0,-1)$ و دیگری نقاط $(1,0)$ و $(0,1)$ را به هم وصل می‌کند در نظر می‌گیریم، واضح است که H_1 و H_2 هر دو مجموعه‌های ابرمحدب و کراندار هستند اما اشتراک آن‌ها دو نقطه $(1,0)$ و $(-1,0)$ است، که ابرمحدب نیست.

همچنین زیرمجوعه ابرمحدب حتی در $\mathbb{R}^2$ لزوما محدب نیست.

مثال ۲. اگر $\left(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_\infty\right)$ و $X\subseteq\mathbb{R}^2$ را به‌صورت

$$X=\bigcup\left\{\left(x,\frac{x}{n}\right):x\in[0,1],\,n\in\mathbb{N}\right\}\cup[0,1]\times\{0\}$$