دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

تجزیه اولیه، مؤلفه‌های اولیه و خاصیت رشد خطی

استاد راهنما

دکتر نعمت‌اله شیرمحمدی

استاد مشاور

دکتر رضا نقی‌پور

پژوهشگر

ربابه اخلاقی

۱۳۹۰

بسم الله الرّحمن الرّحیم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حقّ او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشهٔ تیزگام در راه شناسایی او لنگ است، و سر فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، و به رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگها لرزهٔ زمین را در مهار کشید.

گواهی می دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی همتاست. گواهیی از روی اعتقاد و ایمان، بی آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می دهم که محمّد (ص) بندهٔ او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه‌هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گرد دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل ملزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می بینم از خلقت تو؛ و چه خرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات حضرت علی (ع)

تقدیم به:

پدرم

بنام خدا

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ و دلسوزانه استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر نعمت اله شیرمحمدی، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از جناب آقای دکتر رضا نقی‌پور که زحمات مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان‌نامه اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از جناب آقای دکتر پرویز سهندی که داوری این مجموعه را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم. از تمام دوستان دوران تحصیل و همدرسانم کمال تشکر و قدردانی را دارم. ازکلیه دبیران دوران تحصیلم و همه اساتید دانشگاه تبریز مخصوصاً از آقای دکتر محمد شهریاری که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم. در پایان از پدرم بپاس مهربانی‌ها و همراهی بیست و پنج ساله‌اش که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بودند سپاسگزاری می‌کنم.

ربابه اخلاقی
۱۳۹۰

نام خانوادگی دانشجو: اخلاقی نام: ربابه

عنوان: تجزیه اولیه، مؤلفه‌های اولیه و خاصیت رشد خطی

استاد راهنما : دکتر نعمت‌اله شیرمحمدی

استاد مشاور : دکتر رضا نقی‌پور

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۰ تعداد صفحات: ۵۵

کلید واژه‌ها: تجزیه اولیه، مؤلفه اولیه، اعداد آرتین-ریس و رشد خطی.

چکیده

در این پایان‌نامه، خواص زیر از تجزیه‌های اولیه روی حلقه نوتری R مطالعه خواهد شد:

۱) به ازای مدول‌های متناهی مولد $N \subseteq M$ و زیرمجموعه $X = \{P_1, P_2, \ldots, P_r\}$ از $\mathrm{Ass}(M/N)$، یک مؤلفه X-اولیه $N \subseteq M$ را به صورت مقطع $N = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_r$ تعریف می‌کنیم که در آن Q_iها مؤلفه‌های P_iاولیه $N \subseteq M$ هستند. سپس خاصیت سازگاری تجزیه‌های اولیه را اثبات کرده و به کمک آن، مؤلفه‌های X-اولیه ماکسیمال $N \subseteq M$ را بررسی می‌کنیم و در نهایت به بررسی مجموعه‌های باز $\mathrm{Ass}(M/N)$ می‌پردازیم.

۲) خاصیت رشدخطی را تعریف کرده و ارتباط آن را با اعداد آرتین-ریس بیان می‌کنیم.

۳) خاصیت رشدخطی Ext و Tor را اثبات می‌کنیم، یعنی نشان می‌دهیم به ازای مدول‌های با تولید متناهی N و M، ایدآل‌های $I_1, I_2, \ldots, I_t$ از R و هر عدد صحیح نامنفی i، یک عدد طبیعی k یافت می‌شود به طوری‌که به ازای هر $\underline{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_t) \in \mathbb{N}^t$ می‌توان یک تجزیه اولیه از زیرمدول صفر در $\mathrm{E}_{\underline{n}} = \mathrm{Ext}^i_R(N, M/I_1^{n_1} I_2^{n_2} \ldots I_t^{n_t} M)$ (یا زیرمدول صفر در $\mathrm{T}_{\underline{n}} = \mathrm{Tor}^R_i(N, M/I_1^{n_1} I_2^{n_2} \ldots I_t^{n_t} M)$) پیدا کرد به طوری که هر مؤلفه P-اولیه Q از این تجزیه شامل $P^{k|\underline{n}|}\mathrm{E}_{\underline{n}}$ (یا $P^{k|\underline{n}|}\mathrm{T}_{\underline{n}}$) باشد، که در آن $|\underline{n}| = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$.

فهرست مطالب

مقدمه

در جهت تلاش برای حل حدس فرما[1] (اکنون قضیه فرما- وایلز[2]) حلقه‌هایی پیدا شد که دیگر مثل حلقه اعداد صحیح ، در آن‌ها یکتایی تجزیه از بین می‌رفت. به همین دلیل در چنین حلقه‌هایی دنبال یک مفهوم جایگزین می‌گشتند. بدین ترتیب، نظریه تجزیه اولیه به وجود آمد. لاسکر[3] در سال ۱۹۰۵ اولین کسی بود که این نظریه را فرمول‌بندی کرد و به کمک نظریه حذف، وجود آن را در حلقه‌های آفین و حلقه‌های سری های توانی همگرا اثبات کرد. مدتی بعد، نوتر[4] در سال ۱۹۲۱ حالت کلی نظریه تجزیه اولیه را تنها به کمک شرط زنجیر صعودی به دست آورد. کار نوتر از جهات بسیاری اهمیت داشت. زیرا کار او در عین حال که نظریه را به طور ساده توسعه می‌داد، اثبات‌ها را نیز بسیار ساده‌تر می‌کرد. امروزه این نظریه را به طور مدون، می‌توان در کتاب‌های جبر جابجایی یافت.

فرض کنید R یک حلقه نوتری، M یک $R-$مدول متناهی مولد و N زیرمدولی سره از M باشد. قضیه‌ای مقدماتی، وجود حداقل یک تجزیه اولیه از N در M را ثابت می‌کند. به عبارتی، نشان می‌دهد که N مقطعی از تعداد متناهی زیرمدول اولیه M است.

به علاوه، اگر $\mathrm{Ass}(M/N) = \{P_1, P_2, \dots, P_s\}$ مجموعه همه ایدآل‌های اول وابسته M/N

[1] Fermat

[2] Wiles

[3] Lasker

[4] Noether

باشد، آنگاه به ازای هر $1 \leq i \leq s$، زیرمدول Q_i P_i-اولیه Q_i در M یافت می‌شود به‌طوری‌که

$$N = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_s.$$

در اینجا، Q_iها مؤلفه‌های P_i-اولیه N در M نامیده می‌شود. اکنون با نمادهای بالا، این سوال به طور طبیعی مطرح می‌شود که آیا Q_iها به طور یکتا به دست می‌آیند؟ مثال بسیار ساده $(x)\cap(x^2, xy, y^2) = (x)\cap(x^2, y) = (x^2, xy)$ در حلقه چندجمله‌ای‌های $k[x, y]$ که در آن k یک میدان است نشان می‌دهد که جواب سوال بالا منفی است. حال سوال بالا را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد. برای این کار به تعریف زیر نیاز است.

برای یک زیرمجموعه $X = \{P_1, P_2, \ldots, P_r\}$ از $\operatorname{Ass}(M/N)$، مقطع $Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_r$ یک مؤلفه $X-$اولیه N در M نامیده می‌شود. مجموعه همه مولفه‌های $X-$اولیه N در M را با نماد $\Lambda_X(N \subset M)$ نشان می‌دهند. حال اگر دقیقاً یک مؤلفه $X-$اولیه N در M موجود باشد، یعنی عدد اصلی $\Lambda_X(N \subset M)$ برابر ۱ باشد، آنگاه تجزیه‌های اولیه N در M روی X مستقل یا $X-$ مستقل نامیده می‌شوند. بنابراین سوال بالا به صورت زیر در می‌آید: آیا می‌توان زیرمجموعه‌های X از $\operatorname{Ass}(M/N)$ را شناسایی کرد به‌طوری‌که تجزیه‌های اولیه N در M روی X مستقل باشند؟
حال فرض کنید Q یک مؤلفه $P-$اولیه N در M باشد که در آن $P \in \operatorname{Ass}(M/N)$. در این صورت عدد طبیعی k طوری یافت می‌شود که $P^kM \subseteq Q$. حال اگر خانواده‌ای از $R-$مدول‌های متناهی مولد داده شده باشد، آنگاه این سوال مطرح می‌شود که آیا می‌توان توان‌های به دست آمده را کنترل کرد؟ این سوال به مفهوم رشد خطی منجر می‌شود. برای بیان دقیق این مفهوم، فرض کنید t یک عدد طبیعی باشد و فرض کنید خانواده

$$\mathcal{F} = \{M_{\underline{n}} \mid \underline{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_t) \in \mathbb{N}^t\}$$

از $R-$مدول‌های متناهی مولد داده شده باشد که در آن $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. می‌گویند $\mathcal{F}$ در خاصیت رشد خطی صدق می‌کند هرگاه $k, b \in \mathbb{N}$ یافت شوند به طوری که به ازای هر

$\underline{n} = (n_1, n_2, \cdots, n_t) \in \mathbb{N}^t$، یک تجزیه اولیه از ۰ در $M_{\underline{n}}$ مانند $0 = Q_{\underline{n}_1} \cap Q_{\underline{n}_2} \cap \cdots \cap Q_{\underline{n}_{s_{\underline{n}}}}$ وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر $i = 1, 2, \ldots, s_{\underline{n}}$، $Q_{\underline{n}_i}$، مؤلفه $P_{\underline{n}_i}-$اولیه ۰ در $M_{\underline{n}}$، در شمول $P_{\underline{n}_i}^{k|\underline{n}|+b} M_{\underline{n}} \subseteq Q_{\underline{n}_i}$ صدق کند که در آن $|\underline{n}| = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$.

فرض کنید R یک حلقه نوتری و $I_1, I_2, \ldots, I_t$ ایدآل‌هایی از R باشد. سوانسون [۵] در ۱۹۹۷ نشان داد که خانواده $\left\{ \dfrac{R}{I_1^{n_1} I_2^{n_2} \cdots I_t^{n_t}} \mid \underline{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_t) \in \mathbb{N}^t \right\}$ دارای خاصیت رشد خطی است. البته، ایشان در ۱۹۹۴ با یک فرض اضافی، همین کار را در رساله دکتری خود انجام داده بود.

سپس، شارپ [۶] در ۲۰۰۰ به کمک مدول‌های انژکتیو، کار او را برای خانواده

$$\left\{ \frac{M}{I_1^{n_1} I_2^{n_2} \cdots I_t^{n_t} M} \mid \underline{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_t) \in \mathbb{N}^t \right\}$$

تعمیم داد که در آن M یک $R-$مدول متناهی مولد است. بالاخره یائو [۷] در ۲۰۰۲ به کمک اعداد آرتین-ریس همین کار را مجدداً انجام داده است.

در این پایان‌نامه، به سوالات بالا، به طور جزئی پاسخ می‌دهیم. این پایان‌نامه بر اساس مراجع [۱۱، ۱۲] تنظیم شده است و مشتمل بر ۴ فصل است. در فصل ۱، مفاهیم و مطالب مقدماتی مورد نیاز در بقیه فصل‌ها آورده شده‌اند. در فصل ۲، نخست، یک ویژگی مهم از مؤلفه‌های $X-$اولیه را اثبات کرده و سپس، به کمک آن، خاصیت سازگاری را دوباره به صورت خیلی ساده اثبات می‌کنیم که اولین بار در [۱۱] اثبات شده است.

نتیجه۲.۱.۲.(سازگاری) فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک $R-$مدول متناهی مولد و N زیرمدولی از آن باشد و $\mathrm{Ass}(M/N) = \{P_1, P_2, \ldots, P_s\}$.فرض کنید برای هر $i = 1, 2, \ldots, s$، Q_i یک مولفه P_i-اولیه N در M باشد. در این صورت $N = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_s$ لزوماً یک تجزیه اولیه مینیمال است. به کمک نتیجه سازگاری می‌توان خاصیت استقلال تجزیه‌های اولیه را برحسب

[۵] Swanson

[۶] Sharp

[۷] Yao

زیرمجموعه‌های باز $\mathrm{Ass}(M/N)$ رده‌بندی کرد. این موضوع، در قضیه ۳.۱.۲، به طور دقیق بیان می‌شود. در ادامه، با تعمیم بعضی از نتایج [۳]، یک نتیجه مهم درباره تجزیه‌های اولیه به دست می‌آید. در اینجا از نماد $\Lambda_X^{\circ}(N \subseteq M)$ برای نشان دادن همه مؤلفه‌های $X-$اولیه ماکسیمال (نسبت به شمول) استفاده می‌کنیم.

قضیه۷.۱.۲. فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک $R-$مدول متناهی مولد و N زیرمدولی از آن باشد. فرض کنید $X = \{P_1, P_1, \ldots, P_r\} \subseteq \mathrm{Ass}(M/N)$ و قرار دهید

$$U = R \setminus \bigcup \{P \mid P \in X\}.$$

در این صورت

الف) $\Lambda_X^{\circ}(N \subseteq M) = \{\bigcap_{i=1}^{r} Q_i \mid Q_i \in \Lambda_{P_i}^{\circ}(N \subseteq M)$ ، $1 \leq i \leq r$ به ازای هر $\}$.

ب) برای هر $Q' \in \Lambda_X(N \subseteq M)$، $Q' = \bigcap \{Q \mid Q \in \Lambda_X^{\circ}(N \subseteq M), Q' \subseteq Q\}$. در واقع، هر مؤلفه $X-$اولیه مانند Q'، مقطع تعداد متناهی عنصر $X-$اولیه ماکسیمال است.

ج) مقطع $\bigcap \{Q \mid Q \in \Lambda_X^{\circ}(N \subseteq M)\} = \bigcap \{Q \mid Q \in \Lambda_X(N \subseteq M)\}$ برابر با تصویر معکوس $U^{-1}N$ تحت نگاشت طبیعی $M \longrightarrow U^{-1}M$، یعنی $U^{-1}N \cap M$، است. این نشان می‌دهد که اگر X در $\mathrm{Ass}(M/N)$ باز نباشد، تعداد مولفه‌های $X-$اولیه ماکسیمال N در M نامتناهی است.

در فصل ۳، بعد از بررسی اعداد آرتین-ریس، خاصیت رشد خطی تجزیه‌های اولیه را برای خانواده‌های بخصوصی از $R-$مدول‌ها بررسی کرده و در نهایت کار سوانسون و شارپ را دوباره اثبات می‌کنیم. در فصل ۴، به کمک ابزار داده شده در فصل ۳، نتیجه اصلی این فصل را تعمیم داده و نشان می‌دهیم که خانواده‌های بخصوصی مرکب از مدول‌های (کو)همولوژی در خاصیت رشد خطی صدق می‌کنند. در سراسر این پایان‌نامه، فرض می‌کنیم R یک حلقه نوتری و M یک $R-$مدول متناهی مولد باشد.

فصل ۱

تجزیه اولیه

در این فصل به بیان پاره‌ای مفاهیم پایه و موردنیاز در فصل‌های آتی می‌پردازیم. برای اثبات بیشتر مطالب این فصل، خواننده می‌تواند فصل ۳ از کتاب زیبای [۲] را ببیند. در ضمن لازم به ذکر است که برای بعضی حقایق نابدیهی اثبات‌هایی داده شده است.

۱.۱ تجزیه اولیه

فرض کنید M یک $R-$مدول و P ایدآلی اول از R باشد. P را یک ایدآل اول وابسته از M می‌نامیم هرگاه عنصر ناصفری از M مانند x موجود باشد به طوری که $P=(0:_R x)$. مجموعه همه ایدآل‌های اول وابسته M را با نماد $\mathrm{Ass}_R M$ یا به اختصار با $\mathrm{Ass} M$ نشان می‌دهیم. بعلاوه، فرض کنید Q زیرمدولی از M باشد. در این‌صورت Q را $P-$اولیه می‌نامیم هرگاه $\mathrm{Ass}(M/Q)=\{P\}$. بعلاوه $M=0$ اگر وتنها اگر $\mathrm{Ass} M=\emptyset$. فرض کنید R یک حلقه، M یک $R-$مدول متناهی مولد وN زیرمدولی سره از M باشد. عناصر مینیمال (نسبت به رابطه شمول) مجموعه $\mathrm{Ass}(M/N)$ را ایدآل‌های اول مینیمال N و بقیه عناصر آن را ایدآل‌های اول نشانده N می‌نامیم. بعلاوه فرض کنید $\mathrm{Ass}(M/N)=\{P_1,P_2,\ldots,P_s\}$. یک تجزیه اولیه [1] N در M، نمایشی از N به عنوان مقطعی متناهی از زیرمدول‌های اولیه M مانند $N=Q_1\cap Q_2\cap\cdots\cap Q_s$ است که در آن، هر Q_i در M اولیه است. Q_i را مؤلفه P_i- اولیه N می‌نامند. با نمادهای بالا، فرض کنید

$$N=Q_1\cap Q_2\cap\cdots\cap Q_s \qquad (1.1)$$

یک تجزیه اولیه از N در M باشد. می‌گوییم تجزیه اولیه مینیمال و نافزونه است هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

- (مینیمال بودن) اعضای $\mathrm{Ass}(M/N)$ متمایز باشند. یعنی اگر $i\neq j$، آنگاه $P_i\neq P_j$.
- (نافزونگی) برای هر $j=1,2,\ldots,s$، $N\neq\bigcap_{i\neq j}Q_i$.

از این پس، منظور از یک تجزیه اولیه، تجزیه اولیه مینیمال و نافزونه است. فرض کنید M یک $R-$مدول متناهی مولد و N زیرمدولی از آن باشد. وجود حداقل یک تجزیه اولیه مینیمال و نافزونه

[1] Primary decomposition

N در M محتوای یک قضیه بسیار مقدماتی را تشکیل می‌دهد. در واقع، با فرض $\mathrm{Ass}(M/N) = \{P_1, P_2, \dots, P_s\}$، نمایشی از N به صورت $N = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_s$ وجود دارد که در آن Q_iها زیرمدول‌های P_i−اولیه از M هستند. مفهوم مؤلفه P−اولیه، که در آن $P \in \mathrm{Ass}(M/N)$، را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد.

تعریف ۱.۱.۱. *با نمادهای بالا، فرض کنید $X = \{P_1, P_2, \dots, P_r\}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathrm{Ass}(M/N) = \{P_1, P_2, \dots, P_r, P_{r+1} \dots, P_s\}$ باشد. در این صورت*

- *مقطع $Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_r$ را یک مؤلفه X−اولیه از N در M نامیده و مجموعه همه مؤلفه‌های X−اولیه ممکن N در M را با نماد $\Lambda_X(N \subseteq M)$ نشان می‌دهیم.*

- *اگر یک مؤلفه X−اولیه، نسبت به رابطه شمول، ماکسیمال باشد، آنگاه آن را مؤلفه X−اولیه ماکسیمال نامیده و مجموعه همه مؤلفه‌های X−اولیه ماکسیمال ممکن از N در M را با نماد $\Lambda^{\circ}_X(N \subseteq M)$ نشان می‌دهیم.*

- *اگر در متن، R−مدول‌های M و N معلوم باشند، می‌توان به جای نماد $\Lambda_X(N \subseteq M)$، از نماد Λ_X و به جای نماد $\Lambda^{\circ}_X(N \subseteq M)$، از نماد Λ°_X استفاده کرد.*

- *اگر $X = \{P\}$، به جای $\Lambda_{\{P\}}$ یا $\Lambda^{\circ}_{\{P\}}$، می‌نویسیم Λ_P یا Λ°_P.*

- *در صورتی‌که فقط یک مؤلفه X−اولیه از N در M موجود باشد، یعنی مجموعه Λ_X یک عضوی باشد، می‌گوییم تجزیه‌های اولیه N در M روی X مستقل (یا X−مستقل) است و این مؤلفه را با نماد Q_X نمایش می‌دهیم.*

به طور معادل می‌توان گفت که تجزیه‌های اولیه N در M روی X مستقل هستند هرگاه به ازای هر $P_i \in X$ و هر $Q_i, Q'_i \in \Lambda_{P_i}(N \subseteq M)$، تساوی $\bigcap_{P_i \in X} Q_i = \bigcap_{P_i \in X} Q'_i$ رخ دهد. در واقع، اگر تجزیه‌های اولیه Nدر M روی X مستقل باشد، آنگاه مجموعه Λ_X یک عضوی است.

لم ۲.۱.۱. *فرض کنید M یک $R-$ مدول متناهی مولد و N زیر مدولی از آن باشد. در این صورت $\mathrm{Ass}(M/N)$ متناهی است.*

در ادامه، مجموعه همه ایدآل‌های اول R را با $\mathrm{Spec}(R)$ نشان داده و به ازای هر ایدآل I در R، قرار می‌دهیم

$$\mathrm{V}(I) = \{P \in \mathrm{Spec}(R) \mid P \supseteq I\}$$

و آن را واریته [۲] I می‌نامیم. مجموعه‌های $\mathrm{V}(I)$ در اصول موضوعه برای مجموعه‌های بسته در یک فضای توپولوژی صدق می‌کنند. توپولوژی حاصل را توپولوژی زاریسکی [۳] نامیده و از این پس $\mathrm{Spec}(R)$ را همراه با این توپولوژی در نظر می‌گیریم. بنابراین $\mathrm{Ass}(M/N)$، به عنوان زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژی $\mathrm{Spec}(R)$، دارای توپولوژی زیرفضایی است.
فرض کنید U یک زیرمجموعه بسته ضربی از حلقه R و M یک $R-$مدول باشد. از نماد $U^{-1}R$ برای نمایش حلقه موضعی شده روی U و از $U^{-1}M$ برای نشان دادن $U^{-1}R-$ مدول موضعی شده استفاده می‌کنیم که با $U^{-1}R \otimes M$ یکریخت است. لم زیر نشان می‌دهد که هر ایدآل اول وابسته $U^{-1}M$ از ایدآل اول وابسته بخصوصی از M حاصل می‌شود.

لم ۳.۱.۱. *فرض کنید $\mathrm{Ass}(M) = \{P_1, P_2, \dots, P_s\}$ و U یک مجموعه بسته ضربی باشد. در این صورت مجموعه ایدآل‌های اول وابسته $U^{-1}R-$مدول $U^{-1}M$ دقیقاً برابر است با*

$$\mathrm{Ass}(U^{-1}M) = \{U^{-1}P \mid P \cap U = \emptyset\}.$$

لم ۴.۱.۱. *فرض کنید Q یک زیرمدول $P-$اولیه M باشد. بعلاوه فرض کنید U یک مجموعه بسته ضربی R باشد به طوری‌که $P \cap U = \emptyset$. در این صورت $Q = \varphi^{-1}(U^{-1}Q)$ که در آن $\varphi : M \to U^{-1}M$ هomomorphism طبیعی است.*

[۲] variety

[۳] Zariski topology

اثبات. فرض کنید $x \in \varphi^{-1}(U^{-1}Q)$. در این‌صورت $\varphi(x) = \frac{x}{1} \in U^{-1}Q$. در نتیجه $y \in Q$ و $s \in U$ موجودند به‌طوری‌که $\frac{x}{1} = \frac{y}{s}$. پس $t \in U$ هست که $stx = ty \in Q$. اما از آنجایی که $st \notin P$ نتیجه می‌شود که $x \in Q$. $\square$

لم زیر ارتباط بین مجموعه ایدآل‌های اول وابسته مدول‌های ظاهرشده در یک رشته دقیق کوتاه را نشان می‌دهد.

لم ۵.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه نوتری و $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ رشته‌ای دقیق از $R-$مدول‌ها باشد. در این صورت*

$$\mathrm{Ass}(M') \subseteq \mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Ass}(M') \cup \mathrm{Ass}(M'').$$

در زیر نشان داده می‌شود که هر زیرمجموعه از $\mathrm{Ass}(M/N)$ در یک زیرمجموعه باز مینیمال یکتا قرار دارد. این زیرمجموعه یکتا، بعداً در بسیاری جاها نقش اساسی خود را ایفا می‌کند.

لم ۶.۱.۱. *فرض کنید X یک زیرمجموعه از $\mathrm{Ass}(M/N)$ باشد. در این صورت X در یک زیرمجموعه باز مینیمال یکتا از $\mathrm{Ass}(M/N)$ قرار دارد. این زیرمجموعه باز مینیمال یکتا را با نماد $o(X)$ نمایش می‌دهیم. در واقع، $o(X) = \{P \in \mathrm{Ass}(M/N) \mid P \subseteq \bigcup_{P' \in X} P'\}$.*

اثبات. چون $\mathrm{Ass}(M/N)$ متناهی است، پس تعداد زیرمجموعه‌های باز شامل X در $\mathrm{Ass}(M/N)$ نیز متناهی است. از این‌رو مقطع همه زیرمجموعه‌های باز شامل X در $\mathrm{Ass}(M/N)$، یک زیرمجموعه باز مینیمال یکتا و شامل X در $\mathrm{Ass}(M/N)$ است.

برای اثبات توصیف گفته شده برای $o(X)$، ابتدا فرض کنید $P \in o(X)$. ادعا می‌کنیم که $P \subseteq \bigcup_{P' \in X} P'$. در غیر این صورت، $r \in P$ وجود دارد به‌طوری‌که، به ازای هر $P' \in X$، $r \notin P'$. لذا $P \in \mathrm{V}(\langle r \rangle)$. ولی به ازای هر $P' \in X$، $P' \notin \mathrm{V}(\langle r \rangle)$. از این رو $X \subseteq \mathrm{Spec}(R) \setminus \mathrm{V}(\langle r \rangle)$. در نتیجه مجموعه باز $(\mathrm{Spec}(R) \setminus \mathrm{V}(\langle r \rangle)) \cap \mathrm{Ass}(M/N)$ در $\mathrm{Ass}(M/N)$ شامل X است. لذا

مینیمال بودن $o(X)$، نشان می‌دهد که $o(X) \subseteq (\operatorname{Spec}(R) \setminus \mathrm{V}(\langle r\rangle)) \cap \operatorname{Ass}(M/N)$. اما این با فرض $P \in o(X)$ در تناقض است. بنابراین مدعا اثبات می‌شود.

برعکس، فرض کنید $P \in \operatorname{Ass}(M/N)$ طوری باشد که $P \subseteq \bigcup_{P' \in X} P'$. برای این‌که نشان دهیم $P \in o(X)$، کافی است ثابت کنیم که P در هر زیرمجموعه باز و شامل X مانند U از $\operatorname{Ass}(M/N)$ قرار دارد. فرض کنید U چنین زیرمجموعه‌ای باشد. در این صورت یک ایدآل I از R طوری یافت می‌شود که $U = (\operatorname{Spec}(R) \setminus \mathrm{V}(I)) \cap \operatorname{Ass}(M/N)$. در نتیجه $X \subseteq \operatorname{Spec}(R) \setminus \mathrm{V}(I)$. از طرف دیگر، قضیه اجتناب از ایدآل‌های اول به کمک فرض نتیجه می‌دهد که به ازای بعضی $P' \in X$، $P \subseteq P'$. بنابراین $P \notin \mathrm{V}(I)$. یعنی $P \in U$ ولذا اثبات کامل می‌شود. □

برای هر ایدآل اول وابسته از M/N مانند P، به جای $o(\{P\})$ می‌توان نوشت $o(P)$.

فرض کنید I ایدآلی از R و N زیرمدولی از R−مدول M باشد. در این صورت قرار می‌دهیم:

$$(N :_M I^\infty) := \bigcup_{i=۱}^{\infty} (N :_M I^i).$$

همچنین، قرار می‌دهیم

$$H_I^۰(M) := \{x \in M \mid I^n x = ۰ \text{ ،} n \in \mathbb{N} \text{ برای برخی } \}.$$

به عبارت دیگر

$$H_I^۰(M) := \bigcup_{i=۱}^{\infty} (۰ :_M I^n).$$

لم ۷.۱.۱. *فرض کنید Q یک زیرمدول P−اولیه M باشد. فرض کنید I ایدآلی از R باشد. در این صورت*

$$U^{-۱}Q \cap M = \begin{cases} Q & \text{اگر } P \cap U = \emptyset \text{ ،} \\ M & \text{اگر } P \cap U \neq \emptyset \text{ ،} \end{cases} \qquad (۲.۱)$$

و

$$(Q :_M I^\infty) = \begin{cases} Q & \text{اگر } I \nsubseteq P \\ M & \text{اگر } I \subseteq P \end{cases} \tag{۳.۱}$$

اثبات قضیه زیبا و اساسی زیر در [۲، ۳.۱۳] آمده است.

قضیه ۸.۱.۱. *فرض کنید I ایدآلی از حلقه R باشد و قرار دهید*

$$A = \{P \in \mathrm{Ass}(M) \mid P \supseteq I\}.$$

الف) *فرض کنید $\bigcap_i M_i = \circ$ یک تجزیه اولیه ۰ در M باشد که در آن M_iها مؤلفه‌های P_i-اولیه‌اند. در این صورت $H_I^\circ(M)$ مقطع M_iهایی است که P_iهای متناظر آن، عضو A نیستند. به ویژه، این مقطع مستقل از تجزیه اولیه داده شده است.*

ب) *عنصری از I مانند f وجود دارد به‌طوری‌که $P \in A$ است اگر و فقط اگر $P \in \mathrm{Ass}(M)$ و $f \in P$. برای چنین f هایی داریم $H_I^\circ(M) = \ker(M \to M_f)$.*

ج) *داریم $\mathrm{Ass}\,(H_I^\circ(M)) = A$ و $\mathrm{Ass}\left(\dfrac{M}{H_I^\circ(M)}\right) = \mathrm{Ass}M \setminus A$. بعلاوه، این خواص $H_I^\circ(M)$ را به طور یکتا مشخص می‌کنند.*

فرض کنید M یک R مدول متناهی مولد، N زیرمدولی از آن و I ایدآلی از R باشد. در این صورت $(\circ :_{M/N} I) = (N :_M I)/N$. بعلاوه داریم:

$$\begin{aligned}(\circ :_{M/N} I^\infty) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (\circ :_{M/N} I^n) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (N :_M I^n)/N \\ &= (N :_M I^\infty)/N\end{aligned}$$

نتیجه ۹.۱.۱. *فرض کنید $N = Q_۱ \cap Q_۲ \cap \cdots \cap Q_s$ یک تجزیه اولیه N در $R-$مدول متناهی مولد M باشد که در آن برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, s$، Q_i مؤلفه P_i- اولیه است. فرض کنید U یک زیرمجموعه بسته ضربی و I ایدآلی از حلقه R باشد. در این‌صورت $(N :_M I^\infty) = \bigcap_{I \nsubseteq P_i} Q_i$.*

فصل ۲

مؤلفه‌های اولیه

در این فصل به بیان مفهوم مؤلفه‌های اولیه و خاصیت استقلال می‌پردازیم و با نگاهی توپولوژیکی ارتباط زیرمجموعه‌های باز را با این ویژگی بررسی می‌کنیم.

۱.۲ مؤلفه‌های اولیه

فرض کنید P یک ایدآل اول R و N زیرمدولی از M باشد. در این بخش مفهوم مؤلفه‌های P–اولیه N در M را به مؤلفه‌های X–اولیه N در M تعمیم می‌دهیم که در آن، X زیرمجموعه‌ای دلخواه از $\mathrm{Ass}(M/N)$ است. با بررسی خواص مؤلفه‌های X–اولیه بعضی از نتایج بدست آمده در [۳] را تعمیم می‌دهیم. همچنین، به کمک این ابزار برای خاصیت سازگاری تجزیه‌های اولیه و ویژگی‌های زیرمجموعه‌های باز$\mathrm{Ass}(M/N)$ اثبات‌های ساده‌تر ارائه می‌کنیم. خاصیت سازگاری و بعضی از ویژگی‌های زیرمجموعه‌های باز $\mathrm{Ass}(M/N)$ ابتدا در [۱۱] ظاهر شده‌اند.

لم ۱.۱.۲. *فرض کنید M یک R– مدول متناهی مولد و N زیرمدولی از آن باشد. فرض کنید $X \subseteq \mathrm{Ass}(M/N)$. به ازای هر R– زیرمدول Q با شرط $N \subseteq Q \subseteq M$ موارد زیر با هم معادل‌اند:*

الف) *Q یک مؤلفه X–اولیه N در M است. یعنی $Q \in \Lambda_X(N \subseteq M)$.*

ب) $\mathrm{Ass}(M/Q) \subseteq X$ و $\mathrm{Ass}(Q/N) \subseteq \mathrm{Ass}(M/N) \setminus X$.

ج) $\mathrm{Ass}(M/Q) = X$ و $\mathrm{Ass}(Q/N) = \mathrm{Ass}(M/N) \setminus X$.

اثبات. بدون کاستن از کلیت مساله، می‌توان فرض کرد $N = ۰$. قرار دهید

$$\mathrm{Ass}M = \{P_۱, P_۲, \dots, P_r, \dots, P_s\} \text{ و } X = \{P_۱, P_۲, \dots, P_r\} \subseteq \mathrm{Ass}(M).$$

الف ⇐ ب. بنابر فرض، یک تجزیه اولیه ۰ در M مانند $۰ = Q_۱ \cap Q_۲ \cap \dots \cap Q_s$ وجود دارد که در آن Q_iها P_i–اولیه‌اند و $Q = Q_۱ \cap Q_۲ \cap \dots \cap Q_r$. در این صورت نشاننده طبیعی

$$\frac{M}{Q} = \frac{M}{\bigcap_{i=۱}^{r} Q_i} \longrightarrow \bigoplus_{i=۱}^{r} \frac{M}{Q_i}$$