فهرست

فصل اول

نوسانگر کلاین-گوردن یک بعدی در مکانیک کوانتومی نسبیتی

۱-۱ مقدمه

به دست آوردن پاسخ های دقیق معادلات موج در مکانیک کوانتومی نسبیتی به دلیل نقش مهم این پاسخ ها در افزایش درک فیزیکی ما از مسائل واقعی تـر جهان خارجی حائز اهمیت فراوان می باشند. در عمـل تنهـا تعـداد محـدودی پتانسیل وجود دارد که برای آن ها معادله شرودینگر به صورت دقیق حل پـذیر بوده و طیف انرژی و تابع موج دستگاه را می توان به شکل تحلیلـی بـه دسـت آورد. نوسانگر هماهنگ از جمله شناخته شده ترین این پتانسیل ها اسـت کـه معادله شرودینگر مرتبط با آن به صورت دقیق قابل بررسی می باشـد. مطالعـه نوسانگر هماهنگ در حوزه نسبیتی فی النفسه مسئله جالبی به نظر مـی آیـد. علاقه به مطالعه نوسانگر هماهنگ در مکانیک کوانتـومی نـسبیتی از موقعیـت های متعدد و مختلفی ناشی می شود که در آن ها اثرات نسبیتی نقـش مهمـی ایفا می کنند. در این فصل نخست ما به فرمول بندی معادله کلاین-گوردن برای نوسانگر هماهنگ در ۱+۱ بعد فضا-زمان پرداخته و بعد از جدا کردن وابـستگی زمانی تابع موج کلاین-گوردن نشان می دهیم کـه پاسـخ هـای معادلـه مـوج کلاین-گوردن ایستا در یک بعد فضایی بر حسب توابع فـوق هندسـی همـشار قابل بیان است. در ادامه با اعمال شرایط مـرزی بـر روی تـابع مـوج نوسـانگر کلاین-گوردن یک بعدی، یعنی متناهی شدن تابع موج در مبداء و فواصل بسیار دور از آن ترازهای انرژی وابسته به نوسانگر کلاین گوردن یک بعدی به صـورت تحلیلی به دست آورده می شوند. این ترازها گسسته بوده و بر خلاف ترازهـای

انرژی نوسانگر هماهنگ یک بعدی در مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی فاصله میان ترازهای متوالی انرژی با یکدیگر برابر نمی باشند. در انتها به مطالعه طیف انرژی نوسانگر کلاین-گوردن در حد غیر نسبیتی پرداخته و نشان می دهیم که در این حد جمله $\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ که انرژی مربوط به یک نوسانگر یک بعدی غیر نسبیتی است همراه با جملات تصحیحی به جمله انرژی غیر نسبیتی حاصل می گردد.

۱-۲ نوسانگر کلاین-گوردن

معادله کلاین-گوردن برای یک ذره آزاد در ۱+۱ بعد فضا-زمان در مکانیک کوانتومی نسبیتی به شکل زیر است[۱] :

$$\partial_\mu \partial^\mu \Psi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \Psi = 0. \qquad (۱-۱)$$

معادله (۱-۱) را می توان به شکل زیر باز نویسی کرد:

$$\left(\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi + m^2c^2\Psi = 0. \qquad (۱-۲)$$

با توجه به تعریف عملگر تکانه خطی در مکانیک کوانتومی، یعنی

$$\left(p_x\right)_{op} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \qquad (۱-۳)$$

معادله (۱-۲) خواهد شد:

$$\left(\left(p_x\right)_{op}{}^2 + \frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + m^2c^2\right)\Psi = 0. \qquad (۱-۴)$$

با در نظر گرفتن پاسخی به شکل

$$\Psi(x,t)=e^{\frac{-iEt}{\hbar}}\psi(x) \tag{۱-۵}$$

و جایگذاری آن در (۱-۴) به دست می آوریم

$$\left((p_x)^2_{op}-\frac{E^2-m^2c^4}{c^2}\right)\psi(x)=0. \tag{۱-۶}$$

معادله (۱-۶) در واقع همان معادله کلاین-گوردن بـرای ذره آزاد در یـک بعـد فضایی می باشد.به منظور ساختن نوسانگر کلاین-گوردن بر طبق دستور العمل ارائه شده توسط میرزا و همکاران[۲] جایگزینی زیر را انجام می دهیم:

$$p_x \to \Pi_x = p_x - im\omega x. \tag{۱-۷}$$

عملگر Π_x^+ الحاقی عملگر Π_x با توجه به هر میتی بودن عملگرهای p_x و x به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Pi^+{}_x = p_x + im\omega x. \tag{۱-۸}$$

در این حالت جمله $(p_x)^2_{op}$ در معادله (۱-۶) را با ترکیب متقارن

$$\frac{1}{2}\left(\Pi_x\Pi_x^+ + \Pi_x^+\Pi_x\right), \tag{۱-۹}$$

جایگزین خواهیم کرد. با توجه به مطالب گفته شده معادله کلاین-گوردن بـرای نوسانگر کلاین–گوردن یک بعدی خواهد شد:

$$[\frac{1}{2}\left(\Pi_x\Pi_x^+ + \Pi_x^+\Pi_x\right)-\frac{E^2-m^2c^4}{c^2}]\psi(x)=0, \tag{۱-۱۰}$$

و یا

$$[\frac{1}{2}(p_x-im\omega x)(p_x+im\omega x)+\frac{1}{2}(p_x+im\omega x)(p_x-im\omega x)-$$
$$\frac{E^2-m^2c^4}{c^2}]\psi(x)=0. \tag{۱-۱۱}$$

با اندکی محاسبه می توان نشان داد که معادله (۱-۱۱) به شکل زیر در می آید:

$$[\frac{d^2}{dx^2}-\frac{m^2\omega^2x^2}{\hbar^2}+\frac{E^2-m^2c^4}{c^2\hbar^2}]\psi\left(x\right)=0. \tag{۱-۱۲}$$

با تعریف پارامترهای ثابت k^2 و λ به شکل

$$k^2=\frac{E^2-m^2c^4}{c^2\hbar^2}, \tag{۱-۱۳}$$

$$\lambda=\frac{m\omega}{\hbar}, \tag{۱-۱۴}$$

معادله (۱-۱۲) خواهد شد:

$$\frac{d^2\psi\left(x\right)}{dx^2}+\left(k^2-\lambda^2x^2\right)\psi\left(x\right)=0. \tag{۱-۱۵}$$

در متون توابع خاص ریاضی فیزیک معادله (۱-۱۵) به معادله دیفرانسیل وبر معروف است[۳]. با تعریف پارامتر ثابت $k^{/}$ به شکل

$$k^{/}=\frac{k^2}{2\lambda}=\frac{E^2-m^2c^4}{2mc^2\hbar\omega}, \tag{۱-۱۶}$$

و انجام تغییر متغیر

$$y=\lambda x^2, \tag{۱-۱۷}$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}&=\frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}\\ &=2\lambda x\ \frac{d}{dy}\\ &=2\sqrt{\lambda y}\ \frac{d}{dy},\end{aligned} \tag{۱-۱۸}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}&=\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\\ &=2\sqrt{\lambda y}\ \frac{d}{dy}2\sqrt{\lambda y}\ \frac{d}{dy}\\ &=4\lambda\left(y\ \frac{d^2}{dy^2}+\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\right).\end{aligned} \tag{۱-۱۹}$$

با استفاده از معادلات (۱-۱۶)، (۱-۱۷) و (۱-۱۹) معادله (۱-۱۵) خواهد شد:

$$y\frac{d^2\psi}{dy^2}+\frac{1}{2}\frac{d\psi}{dy}+\left(\frac{k'}{2}-\frac{1}{4}y\right)\psi=0. \qquad (۱-۲۰)$$

اکنون با معرفی تابع $\phi(y)$ به شکل

$$\psi(y)=e^{-\frac{y}{2}}\phi(y) \qquad (۱-۲۱)$$

معادله (۱-۲۰) را به شکلی در می آوریم که این شکل در متون استاندارد توابع خاص ریاضی فیزیک شناخته شده تر باشد. داریم:

$$\frac{d\psi(y)}{dy}=e^{-\frac{y}{2}}\left(\frac{d\phi(y)}{dy}-\frac{1}{2}\phi(y)\right), \qquad (۱-۲۲)$$

$$\frac{d^2\psi(y)}{dy^2}=e^{-\frac{y}{2}}\left(\frac{d^2\phi(y)}{dy^2}-\frac{d\phi(y)}{dy}+\frac{1}{4}\phi(y)\right). \qquad (۱-۲۳)$$

با جایگذاری معادلات (۱-۲۱) تا (۱-۲۳) در معادله (۱-۲۰) به دست می آوریم:

$$y\frac{d^2\phi(y)}{dy^2}+\left(\frac{1}{2}-y\right)\frac{d\phi(y)}{dy}+\left(\frac{k'}{2}-\frac{1}{4}\right)\phi(y)=0. \qquad (۱-۲۴)$$

معادله (۱-۲۴) به معادله دیفرانسیل کومر موسوم است[۳]. در بخش بعد ما مرور کوتاهی بر معادله دیفرانسیل کومر و جواب های آن خواهیم داشت.

۱-۳ معادله دیفرانسیل کومر

معادله دیفرانسیل کومر که به آن معادله فوق هندسی همشار نیز گفته می شود یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم است[۴]. این معادله به شکل زیر است

$$y\frac{d^2\phi(y)}{dy^2}+(c-y)\frac{d\phi(y)}{dy}-a\,\phi(y)=0, \tag{۱-۲۵}$$

که a و c اعداد ثابتی هستند. می توان نشان داد که نقطه $y=0$ یک نقطه تکینگی منظم و $y=\infty$ یک نقطه تکینگی نامنظم معادله دیفرانسیل کومر، یعنی معادله (۱-۲۵) می باشند. بنابراین معادله (۱-۲۵) حول نقطه تکینه منظم $y=0$ دارای پاسخ سری به شکل زیر خواهد بود

$$\phi(y)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,y^{n+b}. \tag{۱-۲۶}$$

داریم

$$\frac{d\phi(y)}{dy}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(n+b)\,y^{n+b-1}, \tag{۱-۲۷}$$

$$\frac{d^2\phi(y)}{dy^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(n+b)(n+b-1)\,y^{n+b-2}. \tag{۱-۲۸}$$

با جایگذاری روابط (۱-۲۶) تا (۱-۲۸) در معادله (۱-۲۵) به دست می آوریم

$$a_0b(b-1+c)+\sum_{n=0}^{\infty}[\,a_{n+1}(n+b+1)(n+b+c)-a_n(n+b+a)\,]\,y^{n+b}=0, \tag{۱-۲۹}$$

که اگر $a_0\neq0$ در نظر بگیریم برای b دو مقدار به شکل زیر به دست می آید

$$b=0, \tag{۱-۳۰}$$

$$b=1-c, \tag{۱-۳۱}$$

همچنین رابطه بازگشتی ما خواهد شد

$$a_{n+1}=\frac{n+b+a}{(n+b+1)(n+b+c)}a_n. \tag{۱-۳۲}$$

با به کار بردن رابطه بازگشتی (۱-۳۲) به ازای $b=0$، سری فروبنیوسی (۱-۲۶) خواهد شد

$$\phi(y)=a_0[1+\frac{a}{c}\frac{y}{1!}+\frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{y^2}{2!}+\frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{y^3}{3!}+...]. \qquad (۱-۳۳)$$

عبارت داخل کروشه در معادله (۱-۳۳) را با نماد $M(a,c;y)$ نشان می دهند که $M(a,c;y)$ به تابع فوق هندسی همشار معروف است[۴]، پس

$$M(a,c;y)=1+\frac{a}{c}\frac{y}{1!}+\frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{y^2}{2!}+\frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{y^3}{3!}+...,$$

$$c\neq 0,-1,-2,... \ . \qquad (۱-۳۴)$$

با معرفی نماد پوکهامر به صورت[۴]

$$(a)_0=1$$

$$(a)_n=a(a+1)...(a+n-1), \quad n=1,2,3,... \qquad (۱-۳۵)$$

تابع فوق هندسی همشار در معادله (۱-۳۴) را می توان چنین نوشت

$$M(a,c;y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n}\frac{y^n}{n!}. \qquad (۱-۳۶)$$

حال پاسخ معادله کومر (۱-۲۵) را به ازای $b=1-c$ به دست می آوریم. فرض می کنیم که این پاسخ را بتوان به صورت

$$\phi(y)=y^{1-c}z(y), \qquad (۱-۳۷)$$

نوشت. داریم:

$$\frac{d\phi(y)}{dy}=y^{1-c}\left[\frac{dz(y)}{dy}+\frac{1-c}{y}z(y)\right], \qquad (۱-۳۸)$$

$$\frac{d^2\phi(y)}{dy^2}=y^{1-c}\left[\frac{d^2z(y)}{dy^2}+\frac{2(1-c)}{y}\frac{dz(y)}{dy}-\frac{c(1-c)}{y^2}z(y)\right]. \qquad (۱-۳۹)$$

با جایگذاری روابط (۱-۳۷) تا (۱-۳۹) در معادله (۱-۲۵) به دست می آوریم

$$y\frac{d^2z(y)}{dy^2}+(2-c-y)\frac{dz(y)}{dy}-(a+1-c)z(y)=0. \qquad (۱-۴۰)$$

معادله (۱-۴۰) دارای پاسخی به شکل زیر است

$$z\left(y\right)=M\left(a+1-c,2-c;y\right),\quad c\neq 2,3,4,\ldots\ . \qquad (۱-۴۱)$$

بنابراین با به کار بردن معادلات (۱-۳۷) و (۱-۴۱) جواب دوم معادله دیفرانسیل کومر (۱-۲۵) خواهد شد

$$\phi\left(y\right)=y^{1-c}M\left(a+1-c,2-c;y\right),\quad c\neq 2,3,4,\ldots\ . \qquad (۱-۴۲)$$

با به کار بردن معادلات (۱-۳۳) و (۱-۴۲) به ازای مقادیر غیر صحیح c معادله دیفرانسیل کومر (۱-۲۵) دارای جواب عمومی به شکل زیر خواهد بود

$$\phi\left(y\right)=C_1\,M\left(a,c;y\right)+C_2\,y^{1-c}M\left(a+1-c,2-c;y\right),\quad c\neq 0,\pm1,\pm2,\ldots \qquad (۱-۴۳)$$

که C_1 و C_2 اعداد ثابتی هستند.

به هنگام مطالعه معادله دیفرانسیل کومر اغلب با شرایطی مواجه می گردیم که لازم می شود رفتار تابع $M\left(a,c;y\right)$ را به ازای مقادیر کوچک y $(y\to 0)$ و نیز مقادیر بزرگ y $(y\to\infty)$ بدانیم. در مرجع[۴] رفتار مجانبی تابع فوق هندسی همشار مورد مطالعه قرار گرفته و نشان داده شده است که

$$M\left(a,c;y\right)\sim 1,\qquad y\to 0 \qquad (۱-۴۴)$$

یا

$$M\left(a,c;y\right)\sim 1+\frac{a}{c}y,\qquad y\to 0 \qquad (۱-۴۵)$$

$$M\left(a,c;y\right)\sim\frac{\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(a\right)}y^{a-c}e^{y},\quad y\to\infty. \qquad (۱-۴۶)$$

در بخش بعد به بررسی پاسخ های نوسانگر کلاین-گوردن یک بعدی بر حسب توابع فوق هندسی همشار خواهیم پرداخت.

۱-۴ به دست آوردن ویژه توابع و ویژه مقادیر انرژی برای نوسانگر کلاین-گوردن یک بعدی

با مقایسه ای میان معادلات (۱-۲۴) و (۱-۲۵) در می یابیم که جواب عمومی معادله (۱-۲۴) به شکل زیر است

$$\phi(y)=C_1\,M\left(a,\frac{1}{2};y\right)+C_2\,y^{\frac{1}{2}}M\left(a+\frac{1}{2},\frac{3}{2};y\right), \qquad (۱-۴۷)$$

که

$$a=-\left(\frac{k'}{2}-\frac{1}{4}\right). \qquad (۱-۴۸)$$

بنابراین شکل نهایی تابع موج $\psi(x)$ بر طبق روابط (۱-۱۴)، (۱-۱۷)، (۱-۲۱) و (۱-۴۷) به صورت زیر تعیین می گردد

$$\psi(x)=C_1\,e^{-(\frac{m\omega}{2\hbar})x^2}M\left(a,\frac{1}{2};\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)+$$
$$C_2\,e^{-(\frac{m\omega}{2\hbar})x^2}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\,M\left(a+\frac{1}{2},\frac{3}{2};\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right). \qquad (۱-۴۹)$$

همان طور که (۱-۴۹) نشان می دهد ویژه توابع $\psi(x)$ از دو قسمت مجزا به شکل زیر تشکیل شده است

$$\psi_{even}(x)=e^{-\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)x^2}M\left(a,\frac{1}{2};\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right), \qquad (۱-۵۰)$$

$$\psi_{odd}(x)=e^{-\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)x^2}x\,M\left(a+\frac{1}{2},\frac{3}{2};\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right). \qquad (۱-۵۱)$$

تحت اثر عملگر پاریته $(x \to -x)$ رفتار ویژه توابع معرفی شده در معادلات (۱-۵۰) و (۱-۵۱) به شکل زیر است

$$\psi_{even}(x) \to \psi_{even}(-x) = \psi_{even}(x), \tag{۵۲-۱}$$

$$\psi_{odd}(x) \to \psi_{odd}(-x) = -\psi_{odd}(x). \tag{۵۳-۱}$$

در نزدیکی مبداء $(x \to 0)$ هر دو ویژه تابع متناهی بوده و داریم

$$\psi_{even}(x) \sim 1 \quad , \; x \to 0 \tag{۵۴-۱}$$

$$\psi_{odd}(x) \sim 0 \qquad x \to 0. \tag{۵۵-۱}$$

از طرفی هر دو ویژه تابع در نواحی دور از مبداء $(x \to \pm\infty)$ باید مقادیر متناهی داشته باشند. با توجه به رابطه مجانبی (۱-۴۶) رفتار مجانبی توابع (۱-۵۰) و (۱-۵۱) به ازای $x \to \pm\infty$ خواهد شد

$$\psi_{even}(x) \sim x^{2a-1}\, e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad , \; x \to \pm\infty \tag{۵۶-۱}$$

$$\psi_{odd}(x) \sim x^{2a-1}\, e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad , \; x \to \pm\infty. \tag{۵۷-۱}$$

هر دو پاسخ (۱-۵۶) و (۱-۵۷) در $x \to \pm\infty$ واگرا می باشند. تنها راه اجتناب از مشکل واگرایی این است که ثابت a در معادله (۱-۵۰) و ثابت $a+\frac{1}{2}$ در معادله (۱-۵۱) برابر اعداد صحیح منفی باشند، یعنی[۵]

(برای ویژه توابع زوج) $\quad a = -n \quad ; \quad n = 0,1,2,...$

(۱-۵۸)

. (برای ویژه توابع فرد) $\quad a + \frac{1}{2} = -n \quad ; \quad n = 0,1,2,...$

(۱-۵۹)

با به کار بردن روابط (۱-۱۶)، (۱-۴۸)، (۱-۵۰) و (۱-۵۸) طیف انرژی و ویژه توابع زوج برای نوسانگر کلاین-گوردن یک بعدی به صورت زیر به دست می آیند

$$E_n^2 = m^2c^4 + 2\,(2n+\frac{1}{2})\,m\,c^2\hbar\,\omega, \qquad (۱-۶۰)$$

$$\psi_{even,n}\left(x\right) = e^{-\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)x^2} M\left(-n\,,\frac{1}{2};\frac{m\,\omega}{\hbar}x^2\right), \quad n=0,1,2,\dots\ . \qquad (۱-۶۱)$$

با به کار بردن روابط (۱-۱۶)، (۱-۴۸)، (۱-۵۱) و (۱-۵۹) طیف انرژی و ویژه توابع فرد برای نوسانگر کلاین-گوردن یک بعدی به صورت زیر به دست می آیند

$$E_n^2 = m^2c^4 + 2\,(2n+\frac{3}{2})\,m\,c^2\hbar\,\omega, \qquad (۱-۶۲)$$

$$\psi_{odd,n}\left(x\right) = e^{-\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)x^2} x\; M\left(-n\,,\frac{3}{2};\frac{m\,\omega}{\hbar}x^2\right), \quad n=0,1,2,\dots\ . \qquad (۱-۶۳)$$

در جداول ۱ و ۲ مقادیر نوعی طیف انرژی برای نوسانگر کلاین-گوردن یک بعدی آورده شده اند.

جدول۱: ویژه مقادیر انرژی نوسانگر کلاین-گوردن

یک بعدی برای ویژه توابع زوج

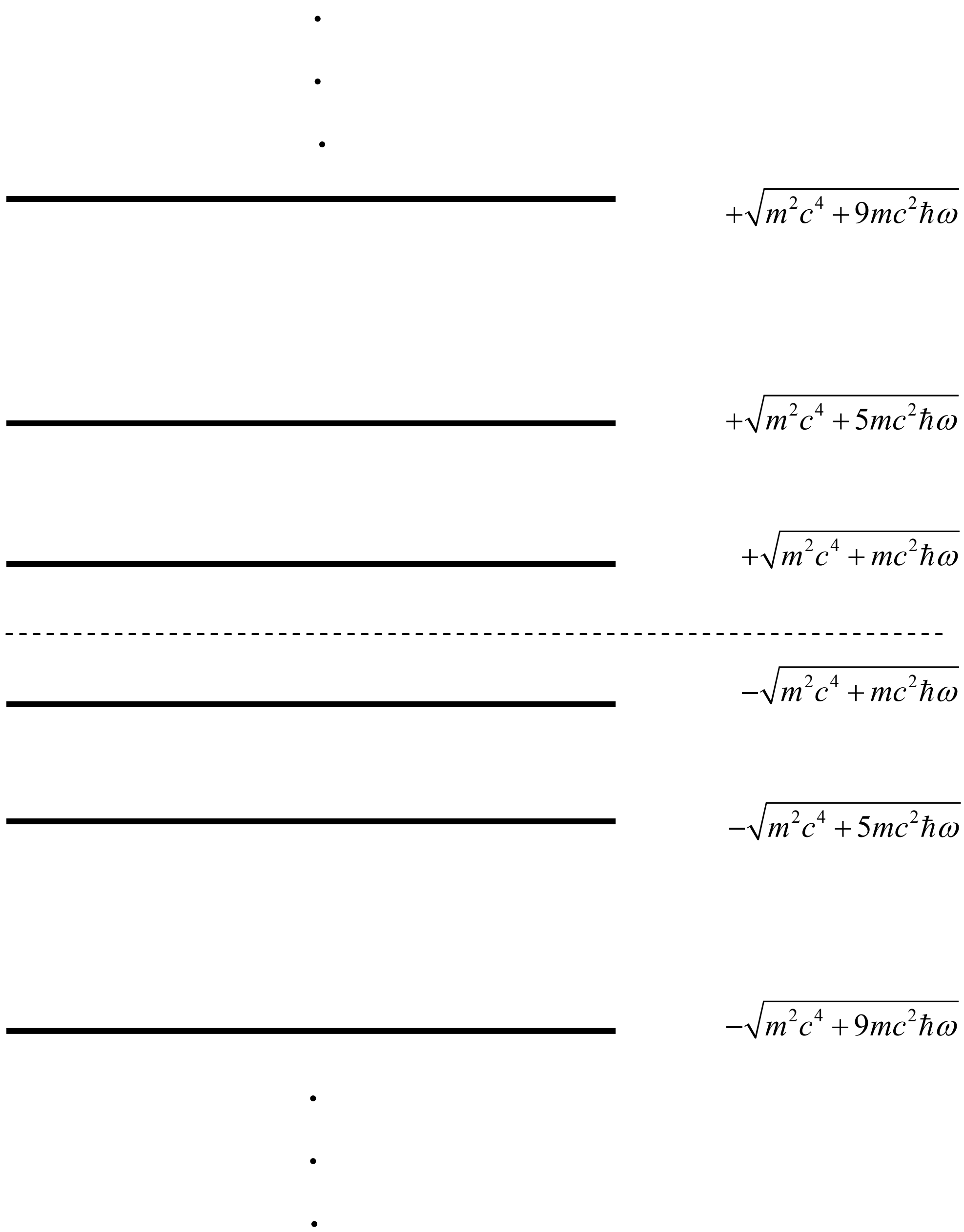
n	E_n^2
۰	$m^2c^4 + mc^2\hbar\omega$
۱	$m^2c^4 + 5mc^2\hbar\omega$
۲	$m^2c^4 + 9mc^2\hbar\omega$
۳	$m^2c^4 + 13mc^2\hbar\omega$

جدول۲: ویژه مقادیر انرژی نوسانگر کلاین-گوردن

یک بعدی برای ویژه توابع فرد

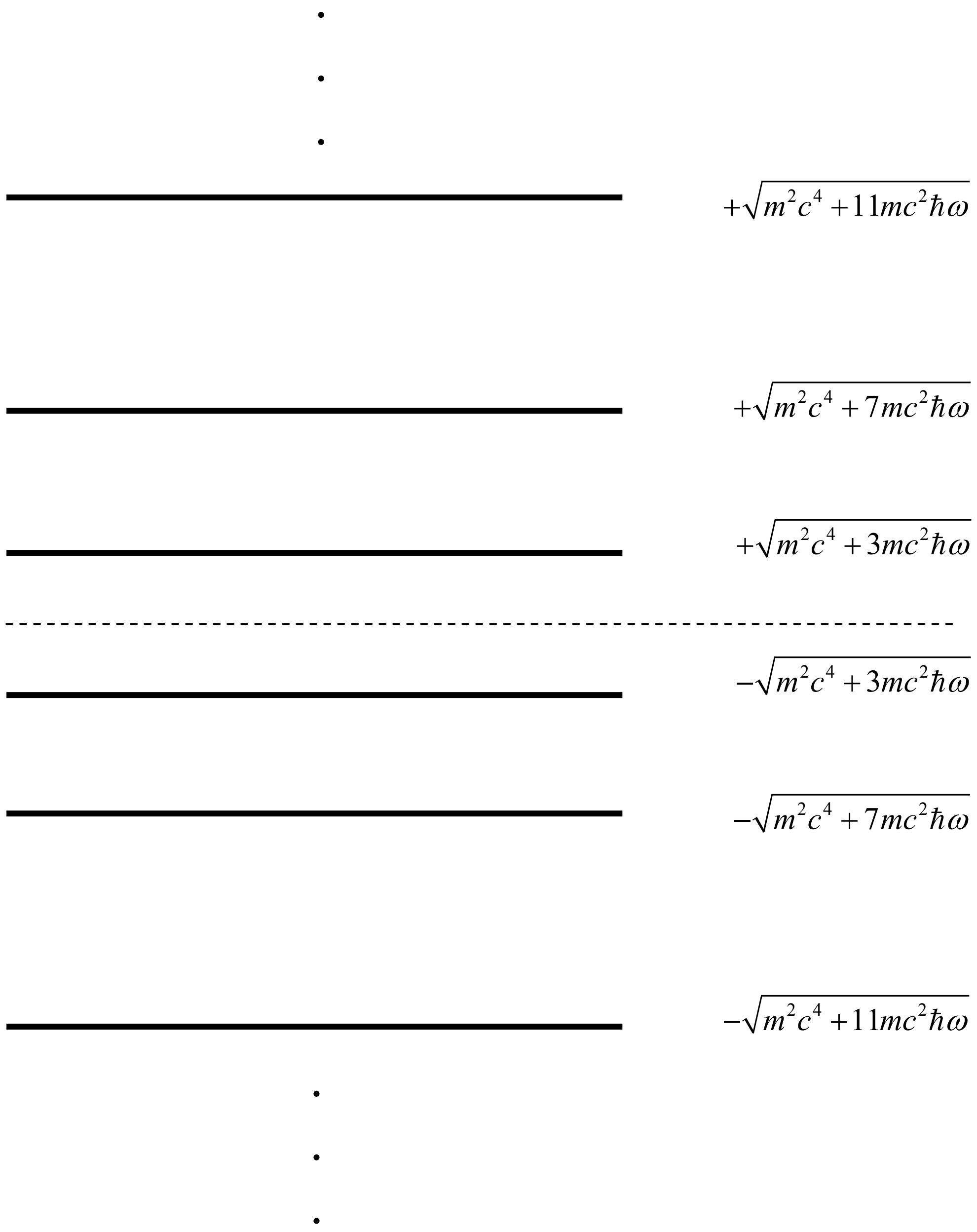
n	E_n^2
۰	$m^2c^4 + 3mc^2\hbar\omega$
۱	$m^2c^4 + 7mc^2\hbar\omega$
۲	$m^2c^4 + 11mc^2\hbar\omega$
۳	$m^2c^4 + 15mc^2\hbar\omega$

در شکل ۱ و شکل ۲ ترازهای انرژی مربوط به نوسانگر کلاین-گورن یک بعدی ترسیم شده اند.



شکل۱: ترازهای انرژی نوسانگر کلاین-گوردن

یک بعدی برای ویژه توابع زوج



شکل۲: ترازهای انرژی نوسانگر کلاین-گوردن

یک بعدی برای ویژه توابع فرد

همان طور که اشکال ۱ و ۲ نشان می دهند ترازهای انرژی وابسته به نوسانگر کلاین-گوردن یک بعدی همانند ترازهای انرژی مربوط به نوسانگر هماهنگ یک بعدی غیر نسبیتی گسسته می باشند. البته در این حالت بر خلاف حالت غیر نسبیتی فاصله میان ترازهای متوالی انرژی با یکدیگر برابر نیستند. لازم به ذکر است که می توان روابط (۱-۶۰) برای ویژه مقادیر انرژی متناظر با ویژه توابع زوج و (۱-۶۲) برای ویژه مقادیر انرژی متناظر با ویژه توابع فرد را با یکدیگر ادغام نموده و رابطه واحدی برای ترازهای انرژی مربوط به نوسانگر کلاین-گوردن یک بعدی به شکل زیر ارائه نمود

$$E_n^2 = m^2c^4 + 2(n+\frac{1}{2})m c^2\hbar\omega, \quad n = 0,1,2,\dots \; . \tag{۱-۶۴}$$

از سوی دیگر ویژه توابع (۱-۶۱) و (۱-۶۳) را می توان بر حسب چند جمله ای های شناخته شده هر میت بیان کرد. داریم[۶]

$$\mathrm{H}_{2n}\left(\xi\right) = \left(-1\right)^n \frac{(2n)!}{n!} M\left(-n, \frac{1}{2}; \xi^2\right), \tag{۱-۶۵}$$

$$\mathrm{H}_{2n+1}\left(\xi\right) = \left(-1\right)^n \frac{2\left(2n+1\right)!}{n!}\, \xi\, M\left(-n, \frac{3}{2}; \xi^2\right). \tag{۱-۶۶}$$

با به کار بردن معادله (۱-۶۵) ویژه توابع زوج معرفی شده در معادله (۱-۶۱) خواهند شد

$$\psi_{even,n}\left(x\right) = N_{2n} e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} \mathrm{H}_{2n}\left(\sqrt{\lambda}x\right), \quad n = 0,1,2,\dots \;, \tag{۱-۶۷}$$

که N_{2n} یک ثابت بهنجارش است. همچنین با استفاده از معادله (۱-۶۶) ویژه توابع فرد معرفی شده در معادله (۱-۶۳) را می توان چنین نوشت

$$\psi_{odd,n}(x) = N_{2n+1} e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} \mathrm{H}_{2n+1}\left(\sqrt{\lambda} x\right), \quad n = 0,1,2,\ldots \; , \qquad (۶۸-۱)$$

که N_{2n+1} ثابت بهنجارش مربوط به ویژه توابع فرد می باشد. در نهایت می توان ویژه توابع زوج در معادله (۱-۶۷) و ویژه توابع فرد در معادله (۱-۶۸) را با یکدیگر ترکیب نموده و رابطه واحدی برای ویژه توابع به صورت زیر ارائه نمود

$$\psi_n(x) = N_n e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} \mathrm{H}_n\left(\sqrt{\lambda} x\right), \quad n = 0,1,2,\ldots \; . \qquad (۶۹-۱)$$

در مرجع[۶] ثابت بهنجارش N_n در معادله (۱-۶۹) به دست آورده شده و مقدار آن برابر است با

$$N_n = \sqrt{\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \frac{1}{2^n n!}} \; . \qquad (۷۰-۱)$$

بنابراین ویژه توابع ایستای بهنجار وابسته به نوسانگر کلاین-گوردن یک بعدی خواهد شد

$$\psi_n(x) = \sqrt{\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \frac{1}{2^n n!}} \, e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} \mathrm{H}_n\left(\sqrt{\lambda} x\right), \quad n = 0,1,2,\ldots \; . \qquad (۷۱-۱)$$

۱-۵ بررسی طیف انرژی نوسانگر کلاین-گوردن یک بعدی در حد غیر نسبیتی

اکنون به بررسی حد غیر نسبیتی عبارت (۱-۶۴) می پردازیم. برای این منظور لازم است که از بسط زیر استفاده کنیم

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\ldots,\qquad |x|<1. \tag{۷۲-۱}$$

داریم

$$E_n=mc^2\left[1+\frac{2\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega}{mc^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=mc^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega-\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\hbar^2\omega^2}{mc^2},\qquad n=0,1,2,\ldots\ .$$

(۷۳-۱)

جمله اول در سمت راست معادله (۱-۷۳) مربوط به انرژی در حال سکون نوسانگر می باشد. دومین جمله در سمت راست معادله (۱-۷۳) همان جمله آشنای مربوط به انرژی نوسانگر هماهنگ یک بعدی غیر نسبیتی است. جمله سوم در سمت راست معادله (۱-۷۳) معرف تصحیح نسبیتی انرژی می باشد. بنابراین نوسانگر کلاین-گوردن یک بعدی معرفی شده در مرجع[۵] را به درستی می توان تعمیمی نسبیتی از نوسانگر هماهنگ در مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی دانست. در فصول بعد به بررسی مکانیک آماری نوسانگر کلاین-گوردن یک بعدی می پردازیم.