وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض

نگاشت های خطی و دو-خطی در فضاهای دو-نرم

توسط:
ملیحه میرزایی

استاد راهنما:
دکتر غلامرضا عباس‌پور تبادکان

استاد مشاور:
دکتر محمد رمضان‌پور

اسفند ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

نگاشت های خطی و دو-خطی در فضاهای دو-نرم

توسط:

ملیحه میرزایی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **خوب**

دکتر غلامرضا عباسپور تبادکان استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز تابعی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر محمد رمضانپور استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر علی غفاری دانشیار ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک دانشکده ریاضی دانشگاه سمنان (داور اول)

دکتر قدیر صادقی استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز تابعی دانشکده ریاضی دانشگاه تربیت معلم سبزوار (داور دوم)

دکتر محمد ابری استادیار ریاضی محض گرایش توپولوژی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نمایندهٔ تحصیلات تکمیلی)

اسفند ۱۳۹۰

تقدیم به

تقدیم به پدر بزرگوارم ومادر مهربانم :

آن دو فرشته‌ای که از خواسته هایشان گذشتند سختیها را به جان خریدند و خود را سپر بلای مشکلات وناملایمات کردند تا من در جایگاهی که اکنون در آن ایستادم برسم.

همسرم،پناه خستگیم وامید بودنم.

سپاسگزاری

سپاسگزاری می‌کنم از:

استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر عباس پور که سپیدی را بر تخته سیاه زندگیم نگاشت و سرزمین دل را روشنی بخشید وگلشن سرای علم ودانش را با راهنمایی‌های کار ساز و سازنده بارور ساخت.

همسر مهربانم که همیشه در کنارم بود.

دختر عمه عزیزم مرضیه جان و دوست عزیزم سائده.

چکیده

نگاشت های خطی و دو-خطی در فضاهای دو-نرم

به وسیله‌ی:
ملیحه میرزایی

دراین پایان نامه به معرفی خواص عمومی فضاهای دو-متریک و دو-نرم می‌پردازیم، فضاهای محدب اکید ودو-محدب اکید را معرفی می‌کنیم، پیوستگی نگاشت‌های خطی روی فضاهای دو-نرم خطی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در نهایت به بررسی عملگرهای دو-خطی کراندار از یک مجموعه دو-نرم به یک فضای نرم دار می‌پردازیم و قضیه باناخ-اشتینهوس را برای یک خانواده از عملگرهای دو-خطی کراندار به توی یک فضای باناخ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فهرست مطالب

پیشگفتار

در ۱۹۶۳، گاهلر فضاهای دو-نرم خطی و دو-متریک را معرفی کرد و ریاضی دانان دیگری روی ساختار هندسی این فضاها از جمله محدب اکید، دو-محدب و ... به طور گسترده مطالعه کردند.

گاهلر رابطه بین فضای دو-نرم خطی را با فضای دو-ضرب داخلی، فضای دو-متریک، فضای محدب اکید ودو-محدب اکید بیان نمود. و همچنین ثابت کرد که اگر فضا، فضای خطی نرمدار باشد در این صورت روی آن یک دو-نرم می‌توان تعریف کرد.

در فصل اول این پایان‌نامه، فضاهای دو-نرم خطی، دو-ضرب داخلی، دو-بردار و دو-متریک معرفی می‌شوند که بیشتر نتایج حاصل از آنها توسط گاهلر مطرح شده‌است. سپس در فصل دوم مفهوم محدب اکید و دو-محدب اکید را برای فضاهای دو-نرم خطی مطرح می‌کنیم. سپس پیوستگی نگاشت‌های خطی روی فضاهای دو-نرم را بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم جزئیاتی از عملگرهای دو-خطی کراندار از یک مجموعه دو-نرم به توی یک فضای نرمدار را در نظر می‌گیریم که فضای این عملگرها تحت بعضی شرایط به فضای باناخ و فضای دو-نرم متقارن تبدیل می‌شوند.

در بخش سوم قضیه باناخ-اشتینهوس را برای یک خانواده از عملگرهای دو-خطی کراندار از یک مجموعه دو-نرم به توی فضای باناخ بررسی می‌کنیم.

فصل ۱

مفاهیم اساسی ومقدماتی

در این فصل مفاهیم مقدماتی را ذکر می‌کنیم. هدف از این فصل، یادآوری، فراهم کردن اصطلاحات و مقدماتی است که در فصل های آتی مورد نیاز خواهد بود.

۱-۱ معرفی فضاهای دو-نرم خطی

تعریف ۱.۱.۱. فرض‌کنید X یک فضای برداری روی میدان$K(\mathcal{R}$ یا $\mathcal{C})$ باشد. یک ضرب داخلی روی فضای X تابع $(x|y) \to (x,y)$ از $X \times X$ به توی K می‌باشد، که در شرایط زیر صدق کند:

$$(I_۱) \qquad (i)\ (x|x) \geq ۰, \quad (ii)\ (x|x) = ۰ \Leftrightarrow x = ۰;$$

$$(I_۲) \qquad (x|y) = (\overline{y|x});$$

$$(I_۳) \qquad (x+y|z) = (x|z) + (y|z);$$

$$(I_۴) \qquad (\alpha x|y) = \alpha(x|y) \quad \forall x,y,z \in X\ , \alpha \in K;$$

که $(\overline{y|x})$ نمایش دهنده مزدوج مختلط $(x|y)$ می‌باشد.

بردار X با یک ضرب داخلی $(\cdot|\cdot)$ فضای ضرب داخلی گفته می‌شود که با $(X,(\cdot|\cdot))$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. فرض‌کنیدX یک فضای خطی روی $K(\mathcal{R}$ یا $\mathcal{C})$ باشد، یک نرم روی X، تابع حقیقی

مقدار $\|x\| \rightarrow x$ می‌باشد، که در شرایط زیر صدق کند:

$$(I_1) \qquad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$
$$(I_2) \qquad \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|;$$
$$(I_3) \qquad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|; \quad \forall x, y \in X \ \ , \alpha \in K$$

فضای خطی X با نرم $\|.\|$ فضای خطی نرمدار گفته می‌شود، که با $(X, \|.\|)$ نمایش داده می‌شود.

قضیه ۳.۱.۱. *اگر $(X, (\cdot|\cdot))$ فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه*

$$|(x|y)| \leq (x|x)^{\frac{1}{2}} (y|y)^{\frac{1}{2}}$$

برای هر $x, y \in X$، و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر x, y وابستهٔ خطی باشند.

نامساوی در قضیه‌ي فوق به نامساوی کشی- شوارتز [1] معروف می‌باشد.

قضیه ۴.۱.۱. *اگر $(X, (\cdot|\cdot))$ فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ یک نرم در X تعریف می‌کند.*

اثبات. رجوع شود به[۵] □

تعریف ۵.۱.۱. فرض‌کنیم X یک فضای خطی با بعد بزرگتر از یک باشد و $(\cdot, \cdot|\cdot)$ یک تابع حقیقی مقدار در $X \times X \times X$ باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$(I_1) \qquad (i)\ (a, a|b) \geq 0, \quad (ii)\ (a, a|b) = 0 \Leftrightarrow$ وابستهٔ خطی باشند b, a;

$$(I_2) \qquad (a, a|b) = (b, b|a);$$
$$(I_3) \qquad (a, b|c) = (b, a|c);$$
$$(I_4) \qquad (\alpha a, b|c) = \alpha(a, b|c) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$
$$(I_5) \qquad (a + a', b|c) = (a, b|c) + (a', b|c) \quad \forall a, a', b, c \in X;$$

$(\cdot, \cdot|\cdot)$ یک دو-ضرب داخلی روی X نامیده می‌شود و $(X, (\cdot, \cdot|\cdot))$ فضای دو-ضرب داخلی نامیده می‌شود.

---

[1] Cauchy-Schwarz

مثال ۶.۱.۱. فرض‌کنیم $(X,(\cdot|\cdot))$ یک فضای ضرب داخلی باشد یک دو-ضرب داخلی روی X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(a,b|c)=\begin{vmatrix}(a|b) & (a|c)\\ (b|c) & (c|c)\end{vmatrix}=(a|b)\|c\|^{۲}-(a|c)(b|c)$$

برخی خواص پایه ای دو-ضرب داخلی به صورت زیر می‌باشند:

لم ۷.۱.۱. *اگر $(\cdot,\cdot|\cdot)$ یک دو-ضرب داخلی روی X باشد آنگاه*

$$۱)|(a,b|c)|\leq\sqrt{(a,a|c)}\sqrt{(b,b|c)}\qquad \text{برای هر } a,b,c\in X$$

$$۲)(a,b|b)=۰\qquad \text{برای هر } a,b,\in X$$

$$۳)(a,b|\gamma c)=\gamma^{۲}(a,b|c)\qquad \text{برای هر } \gamma\in R,a,b,c\in X$$

اثبات. (۱)

برای هر عدد حقیقی β داریم:

$$\begin{aligned}
& (a+\beta(a,b|c)b,a+\beta(a,b|c)b|c)\\
= & (a,a+\beta(a,b|c)b|c)+(\beta(a,b|c)b,a+\beta(a,b|c)b|c)\\
= & (a+\beta(a,b|c)b,a|c)+(a+\beta(a,b|c)b,\beta(a,b|c)b|c)\\
= & (a,a|c)+(\beta(a,b|c)b,a|c)+(a,\beta(a,b|c)b|c)\\
+ & (\beta(a,b|c)b,\beta(a,b|c)b|c)\\
= & (a,a|c)+\beta(a,b|c)(b,a|c)+\beta(a,b|c)(b,a|c)+\beta^{۲}(a,b|c)^{۲}(b,b|c)\\
= & (a,a|c)+\beta(a,b|c)^{۲}+\beta^{۲}(a,b|c)^{۲}(b,b|c)+\beta(a,b|c)^{۲}\\
= & (a,a|c)+\beta^{۲}(a,b|c)^{۲}(b,b|c)+۲\beta(a,b|c)^{۲}\geq ۰
\end{aligned}$$

اگر $(b,b|c)=۰$ ازنامساوی بالا نتیجه می‌شود

$$(a,a|c)\geq -۲\beta(a,b|c)^{۲}\Rightarrow (a,b|c)^{۲}\leq -\frac{(a,a|c)}{۲\beta}\qquad (\beta<۰).$$

زمانی که $\beta\to-\infty$، $-\frac{(a,a|c)}{۲\beta}\longrightarrow ۰$ لذا داریم:

$$(a,b|c)^{۲}\leq ۰\Rightarrow (a,b|c)=۰$$

اگر $(b,b|c)\neq ۰$، آنگاه با درنظر گرفتن $\beta=\dfrac{-۱}{(b,b|c)}$ نامساوی بدست می‌آید.

$$(a,a|c)-\frac{۲(a,b|c)^{۲}}{(b,b|c)}+\frac{(a,b|c)^{۲}}{(b,b|c)}\geq ۰$$
$$(a,a|c)\geq\frac{(a,b|c)^{۲}}{(b,b|c)}\Rightarrow (a,b|c)^{۲}\leq (a,a|c)(b,b|c)$$
$$\Rightarrow |(a,b|c)|\leq\sqrt{(a,a|c)}\sqrt{(b,b|c)}$$

□

اثبات. (۲)

$$|(a,b|b)|\leq\sqrt{(a,a|b)}\sqrt{(b,b|b)}=۰\qquad\Longrightarrow (a,b|b)=۰$$

□

اثبات. (۳)

$$\begin{aligned}
&\frac{۱}{۴}\big[(a+b,a+b|\gamma c)-(a-b,a-b|\gamma c)\big]\\
&=\frac{۱}{۴}\big[(a,a+b|\gamma c)+(b,a+b|\gamma c)-(a,a-b|\gamma c)+(b,a-b|\gamma c)\big]\\
&=\frac{۱}{۴}\big[(a+b,a|\gamma c)+(a+b,b|\gamma c)-(a-b,a|\gamma c)+(a-b,b|\gamma c)\big]\\
&=\frac{۱}{۴}\big[(a,a|\gamma c)+(b,a|\gamma c)+(a,b|\gamma c)+(b,b|\gamma c)-(a,a|\gamma c)\\
&+(b,a|\gamma c)+(a,b|\gamma c)-(b,b|\gamma c)\big]\\
&=\frac{۱}{۴}\big[۲(b,a|\gamma c)+۲(b,a|\gamma c)\big]=\frac{۱}{۴}(۴(a,b|\gamma c))=(a,b|\gamma c)
\end{aligned}$$

و لذا

$$\begin{aligned}
(a,b|\gamma c) &= \frac{۱}{۴}\big[(a+b,a+b|\gamma c)-(a-b,a-b|\gamma c)\big]\\
&= \frac{۱}{۴}\big[(\gamma c,\gamma c|a+b)-(\gamma c,\gamma c|a-b)\big]\\
&= \frac{۱}{۴}\big[\gamma(c,\gamma c|a+b)-\gamma(c,\gamma c|a-b)\big]\\
&= \frac{\gamma}{۴}\big[(\gamma c,c|a+b)-(\gamma c,c|a-b)\big]\\
&= \frac{\gamma^{۲}}{۴}\big[(c,c|a+b)-(c,c|a-b)\big]\\
&= \frac{\gamma^{۲}}{۴}\big[(a+b,a+b|c)-(a-b,a-b|c)\big]\\
&= \frac{\gamma^{۲}}{۴}(۴(a,b|c))=\gamma^{۲}(a,b|c)
\end{aligned}$$

$\square$

تعریف ۸.۱.۱. فرض‌کنیم X فضای خطی حقیقی با بعد بزرگتر از یک باشد و $\|.,.\|$ یک تابع حقیقی مقدار در $X \times X$ که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$(I_۱)$ $\quad \|x,y\| = ۰, \quad \Leftrightarrow$ x, y وابستهٔ خطی باشند

$(I_۲)$ $\quad \|x,y\| = \|y,x\|;$

$(I_۳)$ $\quad \|\alpha x, y\| = |\alpha| \|x,y\|;$

$(I_۴)$ $\quad \|x, y+z\| \leq \|x,y\| + \|x,z\| \qquad$ براي هر $x,y,z \in X \ , \alpha \in \mathbb{R}$;

$\|.,.\|$ یک دو-نرم روی X نامیده می‌شود و $(X, \|.,.\|)$ یک فضای دو-نرم خطی نامیده می‌شود.

نکته ۹.۱.۱. *برای هر* $x,y \in X$ *و* $\alpha \in \mathbb{R}$ *داریم:*

$$\|x,y\| = \|x, y+\alpha x\|$$

زیرا:

$$\begin{aligned} \| x,y \| &= \| x, y+\alpha x - \alpha x \| \leq \| x, y+\alpha x \| + \| x, -\alpha x \| \\ &= \|x, y+\alpha x\| \end{aligned}$$

از طرفی

$$\| x, y+\alpha x \| \leq \| x,y \| + \| x, \alpha x \| \quad \Longrightarrow \| x, y+\alpha x \| \leq \| x,y \|$$

قضیه ۱۰.۱.۱. *فضای دو-ضرب داخلی* $(X, (\cdot,\cdot|\cdot))$ *با رابطه* $\|x,y\| = \sqrt{(x,x|y)}$ *یک دو نرم روی* X *تعریف می‌کند که در شرایط زیر صدق می‌کند:*

$$(i) \qquad (x,y|z) = \frac{۱}{۴}(\|x+y,z\|^۲ - \|x-y,z\|^۲)$$

$$(ii) \qquad \|x+y,z\|^۲ + \|x-y,z\|^۲ = ۲(\|x,z\|^۲ + \|y,z\|^۲) \quad \forall x,y,z \in X.$$

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم $\|\cdot,\cdot\|$ یک دو نرم است.

$$۱)\qquad \|x,y\|=\sqrt{(x,x|y)}=0 \Leftrightarrow (x,x|y)=0 \Leftrightarrow \text{وابستهٔ خطی باشند } y,x;$$

$$۲)\qquad \|x,y\|=\sqrt{(x,x|y)}=\sqrt{(y,y|x)}=\|y,x\|;$$

$$۳)\qquad \|\alpha x,y\|=\sqrt{(\alpha x,\alpha x|y)}=\sqrt{\alpha(x,\alpha x|y)}=\sqrt{\alpha(\alpha x,x|y)}$$

$$=\quad \sqrt{\alpha^{2}(x,x|y)}=|\alpha|\|x,y\|;$$

و در پایان نشان می دهیم:

$$۴)\qquad \|x,y+z\|\leq\|x,y\|+\|x,z\|$$

$$\begin{aligned}
(\|x,y\|+\|x,z\|)^{2} &= \|x,y\|^{2}+\|x,z\|^{2}+2\|x,y\|\|x,z\|\\
&= (x,x|y)+(x,x|z)+2\sqrt{(x,x|y)}\sqrt{(x,x|z)}\\
&= (x,x|y)+(x,x|z)+2\sqrt{(y,y|x)}\sqrt{(z,z|x)}\\
&\geq (x,x|y)+(x,x|z)+2(y,z|x)\\
&= (x,x|y)+(y,z|x)+(x,x|z)+(y,z|x)\\
&= (y,y|x)+(z,y|x)+(z,z|x)+(y,z|x)\\
&= (y+z,y|x)+(y+z,z|x)=(y,y+z|x)+(z,y+z|x)\\
&= (y+z,y+z|x)=(x,x|y+z)
\end{aligned}$$

لذا

$$\begin{aligned}
&(\|x,y\|+\|x,z\|)^{2}\geq(x,x|y+z)\\
&\|x,y\|+\|x,z\|\geq\sqrt{(x,x|y+z)}=\|x,y+z\|
\end{aligned}$$

برهان (i):

$$\begin{aligned}
(x,y|z) &= \frac{1}{4}\left[(z,z|x+y)-(z,z|x-y)\right]\\
&= \frac{1}{4}\left[(x+y,x+y|z)-(x-y,x-y|z)\right]\\
&= \frac{1}{4}(\|x+y,z\|^{2}-\|x-y,z\|^{2})
\end{aligned}$$

برهان (ii):

$$\|x+y,z\|^{۲}+\|x-y,z\|^{۲}=(x+y,x+y|z)+(x-y,x-y|z)$$
$$=(x,x+y|z)+(y,x+y|z)+(x,x-y|z)-(y,x-y|z)$$
$$=(x+y,x|z)+(x+y,y|z)+(x-y,x|z)-(x-y,y|z)$$
$$=(x,x|z)+(y,x|z)+(x,y|z)+(y,y|z)+(x,x|z)$$
$$-\quad (y,x|z)-(x,y|z)+(y,y|z)=۲(x,x|z)+۲(y,y|z)$$
$$=۲((x,x|z)+(y,y|z))=۲(\|x,z\|^{۲}+\|y,z\|^{۲})$$

□

مثال ۱۱.۱.۱. فرض‌کنیم $(X,(\cdot|\cdot))$ یک فضای ضرب داخلی با بعد بزرگتر از یک باشد. تابع $\|.,.\|$را روی $X\times X$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|x,y\|:=\begin{vmatrix}(x|x) & (x|y)\\(y|x) & (y|y)\end{vmatrix}^{\frac{۱}{۲}}$$

بنا به قضیه فوق و مثال (۶.۱.۱)، $\|\cdot,\cdot\|$ یک دو نرم رویX است که آنرا دو-نرم استاندارد در X می‌نامیم.

قضیه ۱۲.۱.۱. *فرض‌کنیم در تعریف، $\|\cdot,\cdot\|$ در شرایط $I_۱$، $I_۲$ و $I_۳$ صدق کند در این صورت شرط $I_۴$ با شرط زیر معادل است.*

$$I'_۴:\|x+z,y+z\|\leq\|x,y\|+\|y,z\|+\|z,x\|$$

اثبات. ابتدا فرض‌کنیم $I_۴$ برقرار باشد. نشان می‌دهیم:

$$\|x+z,y+z\|\leq\|x,y\|+\|y,z\|+\|z,x\|$$

داریم:

$$\begin{aligned}\|x+z,y+z\| &\leq \|x+z,y\|+\|x+z,z\|=\|y,x+z\|+\|z,x+z\|\\ &\leq \|y,x\|+\|y,z\|+\|z,x\|+\|z,z\|\\ &= \|x,y\|+\|y,z\|+\|z,x\|\end{aligned}$$

زیرا بنا به $(I_۱)$، $\|z,z\|=۰$. □

تعریف ۱.۱.۱۳. اگر X فضای خطی با بعد بزرگتر از یک باشد. قرار می‌دهیم B'_X مجموعه همه نمایش ها به فرم $\sum_{i=1}^{m} x_i \times y_i$ ، که x_i و y_i، $i = 1, 2, \ldots m$، بردارهایی در X هستند.
رابطه " $\sim$ " را در B'_X، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \times y_i \sim \sum_{i=1}^{m'} x'_i \times y'_i$$

اگر برای هر تابع خطی دلخواه f و g در X

$$\sum_{i=1}^{m} \begin{vmatrix} f(x_i) & g(x_i) \\ f(y_i) & g(y_i) \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{m'} \begin{vmatrix} f(x'_i) & g(x'_i) \\ f(y'_i) & g(y'_i) \end{vmatrix}$$

برقرار باشد رابطه فوق یک رابطه هم ارزی روی B'_X می‌باشد.
B_X را فضای خارج قسمتی $B'_X / \sim$ در نظر می‌گیریم. عناصر B_X دو بردار بر X نامیده می‌شوند. و عناصر B'_X نمایشی از دو بردار نامیده می‌شوند.
یک دو بردار با نماینده $\sum_{i=1}^{m} x_i \times y_i$ به صورت $\mathfrak{b}(\sum_{i=1}^{m} x_i \times y_i)$ نمایش می‌دهیم.
فضای B_X، فضای خطی به صورت زیر می‌باشد.

$$\mathfrak{b}(\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i) + \mathfrak{b}(\sum_{i=1}^{m} x_{i+n} \times y_{i+n}) = \mathfrak{b}(\sum_{i=1}^{m+n} x_i \times y_i)$$
$$\alpha\mathfrak{b}(\sum_{i=1}^{m} x_i \times y_i) = \mathfrak{b}(\sum_{i=1}^{m} x_i \times \alpha y_i) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

قضیه ۱.۱.۱۴. *اگر $\|.\|$ یک نرم روی B_X باشد، آنگاه $\|x, y\| = \|\mathfrak{b}(x \times y)\|$ یک دو-نرم روی X تعریف می‌شود.*

اثبات.

(۱)

$$\|x, y\| = \|\mathfrak{b}(x \times y)\| = 0 \iff (x \times y) \sim (0 \times 0)$$

لذا

$$\mathfrak{b}(x \times y) = 0_{B_X} \iff x \text{ و } y \text{ وابسته خطی باشند}$$

(۲) چون $\mathfrak{b}(x \times y) = \mathfrak{b}(y \times x)$ لذا $\|x, y\| = \|y, x\|$

(۳) چون $\mathfrak{b}(\alpha x \times y) = \alpha\mathfrak{b}(x \times y)$ لذا

$$\|\alpha x, y\| = \|\mathfrak{b}(\alpha x \times y)\| = |\alpha|\|\mathfrak{b}(x \times y)\| = |\alpha|\|x, y\|$$

(۴) چون $\mathfrak{b}(x \times (y+z)) = \mathfrak{b}(x \times y) + \mathfrak{b}(x \times z)$ لذا

$$\begin{aligned} \|x, y+z\| &= \|\mathfrak{b}(x \times (y+z))\| \\ &= \|\mathfrak{b}(x \times y) + \mathfrak{b}(x \times z)\| \\ &\leq \|\mathfrak{b}(x \times y)\| + \|\mathfrak{b}(x \times z)\| \\ &= \|x, y\| + \|x, z\| \end{aligned}$$

□

تعریف ۱.۱.۱۵. یک متریک روی مجموعهٔ X تابع حقیقی مقدار $(x, y) \to d(x, y)$ می‌باشد که در شرایط زیر صدق کند:

$$\begin{aligned} &(I_۱) \quad d(x, y) \geq ۰; \\ &(I_۲) \quad d(x, y) = ۰ \quad \Leftrightarrow \quad x = y; \\ &(I_۳) \quad d(x, y) = d(y, x); \\ &(I_۴) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z); \qquad x, y, z \in X \end{aligned}$$ برای هر

مجموعهٔ X با یک متریک d فضای متریک گفته می‌شود، که با (X, d) نمایش می‌دهند.

گزاره ۱.۱.۱۶. *اگر $(X, \|.\|)$ یک فضای خطی نرمدار باشد، آنگاه $d(x, y) = \|x - y\|$ یک متر تعریف می‌کند.*

اثبات. رجوع شود به [۵] □

یک فضای خطی نرمدار، یک فضای متریک می‌باشد با متری که در گزارهٔ فوق تعریف شده است.

تعریف ۱.۱.۱۷. مجموعه غیر تهی X با تابع نامنفی حقیقی مقدار d، که روی $X \times X \times X$ تعریف می‌شود به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

(۱a) برای هر جفت $x, y \in X$ که $x \neq y$ نقطهٔ $z \in X$ وجود داشته باشد به طوری‌که $d(x, y, z) \neq ۰$،

(۱b) $d(x, y, z) = ۰$ زمانی که حداقل دوتا از نقاط x, y, z مساوی باشند،

(۲) $d(x, z, y) = d(x, y, z) = d(y, z, x)$،

(۳) $d(x, y, z) \leq d(x, y, w) + d(x, w, z) + d(w, y, z)$

یک دو-متریک برای فضای X گفته می‌شود و (X,d) یک فضای دو-متریک گفته می‌شود.

گزاره ۱۸.۱.۱. *اگر* $(X,\|.,.\|)$ *فضای دو- نرم خطی باشد آنگاه تابع* $d(x,y,z)=\|x-z,y-z\|$ *یک دو- متریک روی* X *تعریف می‌کند.*

اثبات. $(۱a)$ برای هر جفت $x,y\in X$ که $x\neq y$ دو حالت اتفاق می‌افتد:

حالت اول: x و y وابستهٔ خطی باشند، $۱\neq\alpha\in\mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $y=\alpha x$ و x و z وجود داشته باشند بطوری که وابسته خطی نباشند. داریم:

$$d(x,y,z)=\|x-z,y-z\|=\|x-z,\alpha x-z\|=\|x-z,\alpha x-z+x-x\|$$
$$=\|x-z,\alpha x-x\|=\|x-z,\alpha x-x\|=\|x-z,(\alpha-۱)x\|=|\alpha-۱|\|x-z,x\|$$
$$=|\alpha-۱|\|x-z,x-z+z\|=|\alpha-۱|\|x-z,z\|=|\alpha-۱|\|x-z+z,z\|$$
$$=|\alpha-۱|\|x,z\|\neq ۰$$

حالت دوم: xوy وابسته خطی نباشند،$z=x-y$ در نظر می‌گیریم.داریم:

$$\begin{aligned}d(x,y,z)&=\|x-z,y-z\|=\|x-x+y,y-x+y\|=\|y,۲y-x\|\\&=\|y,y+y-x\|=\|y,y-x\|\\&=\|y,-x\|=\|y,x\|\neq ۰\end{aligned}$$

$(۱b)$

$$d(x,y,z)=d(x,x,z)=\|x-z,x-z\|=۰$$

(۲)

$$\begin{aligned}d(x,y,z)&=\|x-z,y-z\|=|-۱|\|z-x,y-z\|=\|y-z,z-x\|\\&=\|y-x+x-z,z-x\|=\|y-x,z-x\|=d(y,z,x)\\d(x,z,y)&=\|x-y,z-y\|=\|z-y,x-y\|=|-۱|\|y-z,x-y\|\\&=\|y-z,x-z+z-y\|=\|y-z,x-z\|=\|x-z,y-z\|=d(x,y,z)\\d(x,z,y)&=\|x-y,z-y\|=\|x-y,z-x+x-y\|=\|x-y,z-x\|\\&=\|y-x,z-x\|=d(y,z,x)\end{aligned}$$

(۳)

$$\begin{aligned}
d(x,y,z) &= \|x-z, y-z\| = \|x-w+w-z, y-w+w-z\| \\
&\leq \|x-w+w-z, y-w\| + \|x-w+w-z, w-z\| \\
&= \|y-w, x-w+w-z\| + \|w-z, x-w+w-z\| \\
&\leq \|y-w, x-w\| + \|y-w, w-z\| \\
&+ \|w-z, x-w\| + \|w-z, w-z\| \\
&= \|x-w, y-w\| + \|y-w, z-w\| + \|z-w, x-w\| \\
&= d(x,y,w) + d(y,z,w) + d(z,x,w) \\
&= d(x,y,w) + d(w,y,z) + d(x,w,z).
\end{aligned}$$

□

تعریف ۱.۱.۱۹. یک دنبالهٔ $\{x_n\}$ در فضای نرمدار $(X, \|.\|)$ همگرا به x گفته می‌شود اگر برای هر $\varepsilon > \circ$، عدد صحیح $N = N(\varepsilon)$ وجود داشته باشد به طوری که براي هر $n \geq N$ ،

$$\|x_n - x\| < \varepsilon.$$

تعریف ۱.۱.۲۰. یک دنبالهٔ $\{x_n\}$ در فضای دو-نرم خطی $(X, \|.,.\|)$ دنباله همگراست اگر یک $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که براي هر $z \in X$ ،

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, z\| = \circ$$

تعریف ۱.۱.۲۱. یک دنبالهٔ $\{x_n\}$ در فضای نرمدار $(X, \|.\|)$ دنبالهٔ کشی گفته می‌شود اگر برای هر $\varepsilon > \circ$، عدد صحیح $N = N(\varepsilon)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $m, n \geq N$ ،

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

تعریف ۱.۱.۲۲. یک دنبالهٔ $\{x_n\}$ در فضای دو-نرم خطی $(X, \|.,.\|)$ دنبالهٔ کشی گفته می‌شود اگر نقطه $y \in X$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m, y\| = \circ$$

تعریف ۱.۱.۲۳. یک فضای خطی نرمدار $(X, \|.\|)$ که هر دنباله کشی در آن همگرا به نقطه ای باشد فضای باناخ گفته می‌شود.