دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده **علوم ریاضی**

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد آمار

مدل‌بندی آماری مقادیر کرانگین فضایی

توسط

بهزاد محمودیان

اساتید راهنما

دکتر محسن محمدزاده
دکتر موسی گل‌علی‌زاده

تیر ۱۳۸۹

قدردانی

ثنا و حمد بی پایان خدا را که صنعش در وجود آورد ما را

امتنان و سپاس می‌گزارم تلاش‌ها، زحمات و راهنمایی‌های ارزشمند و صبورانهٔ اساتید فرزانه و گرانمایه‌ام، جناب دکتر محسن محمدزاده و دکتر موسی گل‌علی‌زاده را که با حمیت و جدیت، مرا به دقت، اندیشه، درک و تعمق وا می‌داشتند.

تیر ۱۳۸۹

چکیده

مقادیر کرانگین به مشاهدات خیلی بزرگ یا کوچک حاصل از یک فرآیند اطلاق می‌گردد. تحلیل این مقادیر در نظریهٔ مقادیر کرانگین با پذیره‌هایی چون استقلال و هم‌توزیعی همراه است. با این حال در عمل گاهی این فرض‌ها غیر واقعی هستند. وابستگی زمانی مانند روندهای دراز مدت و الگوهای فصلی در داده‌ها، همچنین وابستگی فضایی مشاهدات نسبت به موقعیت قرارگیری‌شان از جمله مواردی است که این پذیره‌ها نقض می‌شوند. بعلاوه گاهی بررسی اثرهای غیرخطی متغیرهای تبیینی در مدل‌های رگرسیونی با پاسخ‌های کرانگینی مورد توجه هستند. در این پایان‌نامه مدل رگرسیون ناپارامتری در قالب مدل آمیخته برای پارامتر مکان و مقیاس توزیع مقدار کرانگین تعمیم‌یافته معرفی می‌شود، که به واسطهٔ آن می‌توان، مدل‌هایی مانند اسپلاین هموار‌ی، اسپلاین هموار‌ی جمعی و مدل ضرایب متغیر را برای مقادیر کرانگین بکار برد. امکان مدل‌بندی اثر غیرخطی، جمعی و متقابل متغیرهای تبیینی از جمله مزیت‌های مدل بیان شده می‌باشد. از آن جایی که در عمل مقادیر کرانگین حاصل از برخی از فرآیندها به صورت سری زمانی در موقعیت‌های فضایی ثبت می‌شوند، مسئله مدل‌بندی مقادیر کرانگین فضایی-زمانی نیز در چارچوب مدل خطی پویا با رهیافت بیزی مورد مطالعه قرار گرفته است. با مدل خطی پویا همبستگی فضایی، روندهای زمانی و الگوی فصلی در مقادیر کرانگین مدل‌بندی و پهنه‌بندی فضایی-زمانی مقدار بازگشت به همراه عدم قطعیت آن محاسبه شده است.

واژه‌های کلیدی : مقادیر کرانگین فضایی-زمانی، توزیع مقدار کرانگین تعمیم‌یافته، اسپلاین هموار‌ی، مدل آمیختهٔ خطی تعمیم‌یافته، مدل خطی پویا

فهرست مندرجات

لیست اشکال

فصل ۱

نظریهٔ مقادیر کرانگین

۱.۱ مقدمه

نظریهٔ مقادیر کرانگین[۱] که رفتار مشاهدات خیلی بزرگ یا کوچک را در فرآیندی تصادفی تحلیل می‌کند، در زمینه‌های علمی مختلف مورد مطالعه و استفاده قرار گرفته است. از آن جمله می‌توان به علوم هواشناسی در تحلیل مقدار بارش (کولی و همکاران، ۲۰۰۷)، مهندسی در تحلیل خوردگی (رایس و تامس، ۲۰۰۷)، زمین‌شناسی در تحلیل بزرگی زمین‌لرزه‌ها (کایرس و همکاران، ۱۹۹۹)، مالی در توصیف ریسک مالی (چاوز-دملاین و امبرکتز، ۲۰۰۴) و در تحلیل شکل‌های DNA و بافت ماهیچه‌ای (درایدن و ذمپلنی، ۲۰۰۶) اشاره نمود.

پس از ارائه توزیع مجانبی مشاهدات بزرگ یا کوچک در دههٔ دوم قرن اخیر، در دههٔ پنجم این قضایا برای مدل‌سازی آماری توسط گامبل (۱۹۵۸) بکار رفت. در دههٔ هفتم توزیع مجانبی فزونی‌ها توسط پیکندز (۱۹۷۵) بدست آمد. پرسکات و والدن (۱۹۸۰) برآوردگرهای ماکسیمم

[۱] Extreme value theory

درستنمایی و نحوهٔ محاسبهٔ ماتریس اطلاع فیشر، هاسکینگ (۱۹۸۵) الگوریتمی را برای محاسبهٔ برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی، هاسکینگ و همکاران (۱۹۸۵) برآوردگر گشتاوری، کلز و تان (۱۹۹۶) و کلز و پاول (۱۹۹۶) برآوردگر بیزی و کلز و دیکسن (۱۹۹۹) برآوردگر ماکسیمم درستنمایی تاوانیده را برای پارامترهای توزیع مشاهدات خیلی بزرگ یا کوچک یعنی همان ماکزیما یا مینیماهای مشاهدات پیشنهاد کردند. اسمیت (۱۹۸۵) خواص مجانبی برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی را بررسی کرد. مقایسه برآوردگرها از نظر عملکرد آنها برای مقادیر مختلف پارامتر شکل توسط مدسن و همکاران (۱۹۹۷) و کلز و دیکسن (۱۹۹۹) در یک مطالعهٔ شبیه‌سازی انجام شد. مدل‌بندی مقادیر کرانگین در حضور متغیرهای تبیینی با اثرات خطی یا غیرخطی، اثرات وابستگی فضایی و زمانی مثل الگوهای دوره‌ای، فصلی و روندها از جمله مسائلی است که بتدریج مورد توجه گرفته است.

برخلاف روش‌های کلاسیک آماری در بررسی رفتار توزیع در اطراف میانگین، نظریهٔ مقادیر کرانگین به تحلیل رفتار دم توزیع‌ها می‌پردازد. در نتیجه با وجود مجموعه داده‌های بزرگ برای مطالعهٔ این نظریه معمولاً اطلاعات کمی در مورد دم توزیع در اختیار است. هنگام بررسی تغییرات در میانگین توزیع، قضیه حد مرکزی نشان می‌دهد که توزیع میانگین‌ها مجانباً نرمال بوده و تقریب نرمال برای رفتار میانگین‌ها مناسب می‌باشد. مشابه با قضیهٔ حد مرکزی قضیهٔ انواع کرانگینی (فیشر و تیپت، ۱۹۲۸) رفتار مجانبی توزیع مقادیر کرانگین (ماکزیما یا مینیماها) را مشخص می‌کند. به طور متدوال در روش‌های مختلف آماری به تحلیل مشاهداتی که بخش قابل توجه توزیع را توصیف می‌کنند پرداخته می‌شود و مقادیر خیلی بزرگ یا کوچک را کنار گذاشته یا مدل را در مقابل اثر مقادیر دورافتاده استوار می‌سازند. در حالی که در تحلیل مقادیر کرانگین تنها این مقادیر حفظ شده و از آن برای توصیف دم توزیع استفاده می‌شود. در مدل‌بندی ماکزیمای بلوکی مشاهدات، ابتدا

بلوک‌های زمانی به صورت روزانه، سالانه یا بازه‌های زمانی دیگر تعریف و به ماکزیمای بلوک‌ها توزیع مقدار کرانگین تعمیم‌یافته برازش می‌شود. از آنجا که در مدل‌بندی ماکزیماها تنها ماکزیمای هر بلوک حفظ می‌شود، اطلاعات زیادی از دست می‌رود. روش جایگزین می‌تواند مدل‌بندی فزونی‌ها باشد، که با تعریف یک سرحد و برازش توزیع تقریبی به مشاهدات بیش از آن انجام می‌گیرد. بنابراین زمانی که اطلاعات به صورت کامل در اختیار باشد می‌توان با مدل‌بندی فزونی‌ها از اطلاعات بیشتر استفاده نمود. هر دو روش با پذیرهٔ استقلال و هم‌توزیعی همراه است، البته به دلیل در نظر گرفتن ماکزیمای هر بلوک پذیرهٔ استقلال برای روش ماکزیمای بلوکی منطقی‌تر به نظر می‌رسد. این امر از اینجا ناشی می‌گردد که در نظر گرفتن چند مقدار بزرگ‌تر از یک سرحد مشخص در یک بلوک زمانی وابستگی به یکدیگر و خوشه‌ای شدن مشاهدات در هر بلوک زمانی را موجب می‌شود.

در عمل علاقه‌مند به یافتن احتمال وقوع پیشامدهایی هستیم که قبلاً رخ نداده است یا اطلاعاتی در مورد آنها موجود نیست. از این‌رو هدف از تحلیل مقادیر کرانگین را می‌توان محاسبهٔ احتمال فزونی یافتن متغیر کرانگینی از مقدار بزرگ دلخواه و مقادیر بازگشت ذکر کرد. در واقع به پیشامدهایی که در مورد آنها اطلاعاتی در دست نیست، علاقه‌مند بوده و با معرفی نظریهٔ مقادیر کرانگین مسئله برون‌یابی مورد توجه قرار می‌گیرد.

در این فصل نظریهٔ مقادیر کرانگین برای ماکزیمای بلوکی و فزونی‌های بیش از سرحد به اختصار بیان می‌شود. در مدل‌بندی ماکزیمای بلوکی توزیع مقدار کرانگین، توزیع پارامتری و مجانبی که تابع توزیع آن فرم ریاضی بسته‌ای دارد، برای ماکزیماها یا مینیماها معرفی می‌شود. روش‌های برآورد پارامترهای مدل و مقدار بازگشت برای این توزیع در ادامه شرح داده می‌شود. در فصل دوم مقادیر کرانگین حاصل از فرآیندهای وابسته و نامانا مدل‌بندی می‌گردد. مشاهده می‌شود

که توزیع مجانبی برای مدل‌بندی مقادیر کرانگین حاصل از فرآیندهای وابسته و نامانا با شرایطی نظیر استقلال در زمان‌هایی که از یکدیگر دورند و در نظر گرفتن پارامترهای توزیع به صورت تابعی از اطلاعات متغیر تبیینی امکان‌پذیر می‌شود. به دلیل این که مدل‌بندی مقادیر کرانگین وابسته به متغیر تبیینی و تعیین روابط پیچیده موجود بین آنها همیشه به صورت خطی نیستند، استفاده از یک مدل اسپلاین هموار در قالب مدل آمیختهٔ خطی تعمیم‌یافته در فصل سوم مطالعه می‌گردد. در فصل چهارم مدل خطی پویا برای مدل‌بندی اثر زمانی مانند روندهای دراز مدت و الگوی فصلی به همراه همبستگی فضایی ماکزیماهای فضایی-زمانی بکار می‌رود. پیشگویی مقدار کرانگین، برآورد احتمال تخطی از یک مقدار مشخص، پهنه‌بندی مقدار بازگشت و محاسبهٔ خطای برآورد این کمیت‌ها با در نظر گرفتن مدل‌های آمیختهٔ خطی تعمیم‌یافته و خطی پویا برای پارامترهای توزیع با رهیافت بیزی انجام می‌شود. سپس کاربرد مدل‌های ارائه شده در تحلیل مینیماهای روزانهٔ ازن شهر تهران و تحلیل فضایی-زمانی ماکزیماهای ماهانهٔ سرعت باد استان خوزستان نشان داده می‌شود.

۲.۱ مدل‌بندی ماکزیمای بلوکی

فرض کنید $\{Y_t\}_{t\geq 1}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع معلوم $F(y)$ باشد. در این صورت توزیع ماکزیمای بلوکی، $M_n = \max_{t=1,\ldots,n} Y_t$ به صورت

$$\begin{aligned} F_{M_n}(y) &= P\Big(Y_1 \leq y, \ldots, Y_n \leq y\Big) \\ &= P(Y_1 \leq y) \cdots P(Y_n \leq y) \\ &= F^n(y) \qquad (۱.۲.۱) \end{aligned}$$

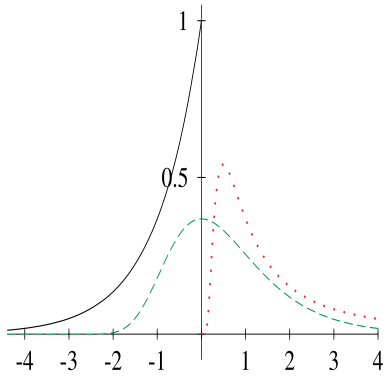
تعیین می‌شود. توجه شود که وقتی n به سمت بی‌نهایت میل کند اگر y^* کوچکترین مقداری باشد که $F(y^*) = ۱$ آنگاه به ازای هر $y < y^*$ توزیع (۱.۲.۱) تباهیده خواهد شد (کلز، ۲۰۰۱). بدون فرض هم‌توزیعی عبارت $\prod_{i=۱}^{n} F_i(y)$ جایگزین تابع توزیع در (۱.۲.۱) می‌شود. بدون فرض‌های هم‌توزیعی و استقلال، توزیع $F^n(y)$ را می‌توان باز هم به عنوان تقریبی از توزیع واقعی M_n بکار برد. در عمل F نامعلوم است، و باید برآورد شود. هر گونه نقصان در برآورد F موجب نقصان خیلی بزرگتری در برآورد F^n می‌شود. برای تعیین توزیع پارامتری و مجانبی ماکزیماها، همانند تقریب توزیع میانگین‌ها توسط قضیه حد مرکزی با قبول دو فرض هم‌توزیعی و استقلال، ثابت‌های حقیقی $a_n > ۰$ و b_n را طوری می‌یابیم، که توزیع $P(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq y)$ در صورت افزایش n $(n \to \infty)$ به تابع توزیع غیرتباهیده $G(y)$ همگرا شود. قضیه انواع کرانگینی که در زیر بیان می‌شود ابتدا توسط فیشر و تیپت (۱۹۲۸) ارائه گردید و سپس ندنکو (۱۹۴۳) صورت کامل‌تری از آن را اثبات کرد.

قضیه ۱.۲.۱ (قضیهٔ انواع کرانگینی، ندنکو، ۱۹۴۳): اگر دنبالهٔ ثابت‌های حقیقی $\{a_n > ۰\}$ و $\{b_n\}$ موجود باشند به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq y\Big) = \lim_{n\to\infty} F^n(a_n y + b_n) = G(y)$$

که در آن G یک تابع توزیع غیر تباهیده است، آنگاه G یکی از توزیع‌های زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
I : G(y) &= \exp\Big\{-\exp\Big\{-\Big(\frac{y-b}{a}\Big)\Big\}\Big\} \qquad -\infty < y < \infty && \text{گامبل}\\
II : G(y) &= \begin{cases} ۰ & y \leq b \\ \exp\Big\{-(\frac{y-b}{a})^{-\alpha}\Big\} & y > b \end{cases} && \text{فرەشه}\\
III : G(y) &= \begin{cases} \exp\Big\{-\Big\{-(\frac{y-b}{a})^{\alpha}\Big\}\Big\} & y < b \\ ۱ & y \geq b \end{cases} && \text{وایبل}
\end{aligned}$$



شکل ۱.۲.۱: نمودار تابع چگالی توزیع‌های مقدار کرانگین، توزیع وایبل (خط‌پر)، فره‌شه (نقطه‌چین) و گامبل (خط‌چین)

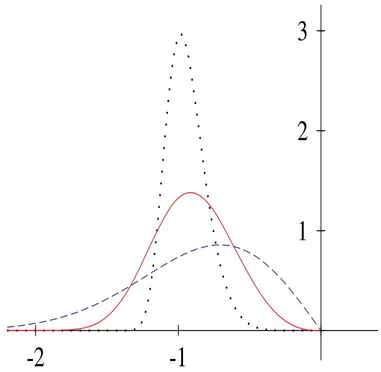
که در آن‌ها $a > ۰$، b و $\alpha > ۰$ پارامترهای توزیع می‌باشند.

در واقع قضیهٔ انواع کرانگینی نشان می‌دهد که ماکزیمای دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با ثابت‌های نرمال‌کننده، در صورت وجود، از یکی از توزیع‌های گامبل، فره‌شه و وایبل پیروی می‌کند. توزیع‌های مقادیر کرانگین که در قضیه ۱.۲.۱ معرفی شد، به ترتیب توزیع‌های گامبل، فره‌شه و وایبل نامیده شده و دارای پارامترهای مکان b و مقیاس a هستند. توزیع‌های فره‌شه و وایبل دارای پارامتر شکل α نیز می‌باشند. شکل ۱.۲.۱ توابع چگالی توزیع‌های وایبل $(a = ۱, b = ۰, \alpha = -۱)$، فره‌شه $(a = ۱, b = ۰, \alpha = ۱)$ و توزیع گامبل $(a = ۱, b = ۰)$ را نشان می‌دهد. توزیع‌های فره‌شه و گامبل چوله به راست بوده و هر سه توزیع تک مدی می‌باشند. توزیع وایبل خانواده غنی از توزیع‌های تک مدی را فراهم می‌کند. توزیع وایبل به ازای $\alpha > -۳/٦$ چوله به چپ، $\alpha = -۳/٦$ متقارن و $\alpha < -۳/٦$ چوله به راست خواهد بود. شکل ۲.۲.۱ چگالی توزیع وایبل را به ازای مقادیر مختلف α نشان می‌دهد. برای رسیدن به مدل واحد با بازپارامتریدن[۲]، توزیع مقدار کرانگین تعمیم‌یافته[۳] (GEV) بدست می‌آید، به طوری که تابع توزیع آن بر روی مجموعهٔ

---

[۲] Reparametrization

[۳] Generalized extreme value



شکل ۱.۲.۲: نمودار تابع چگالی توزیع وایبل با $\alpha = -۳/۶$ (خط‌پر)، $\alpha = -۸$ (نقطه‌چین)، $\alpha = -۲$ (خط‌چین)

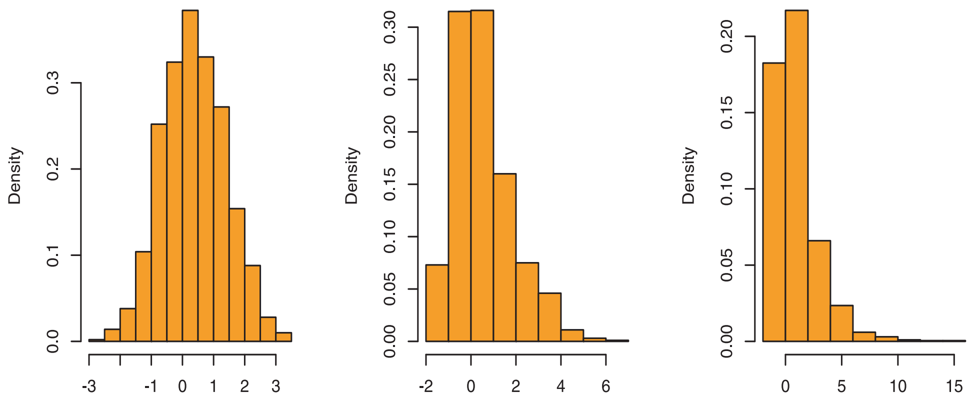
به صورت $\{y : ۱ + \xi(y-\mu)/\sigma > ۰\}$

$$G(y) = \exp\Big\{ -\Big[۱ + \xi(\frac{y-\mu}{\sigma}) \Big]_+^{-۱/\xi} \Big\} \qquad (۱.۲.۲)$$

تعریف می‌شود، که در آن $[x]_+ = \max\{۰, x\}$ است. تابع توزیع (۱.۲.۲) دارای سه پارامتر مکان $\mu \in R$، مقیاس $\sigma > ۰$ و شکل $\xi \in R$ است. پارامتر شکل ξ رفتار دم توزیع را توصیف می‌کند، $\xi > ۰$ توزیع فرهشه و $\xi < ۰$ توزیع وایبل را مشخص می‌کند. $\xi = ۰$ را به عنوان $\xi \to ۰$ تفسیر می‌کنیم، که توزیع گامبل با تابع توزیع

$$G(y) = \exp\Big\{ -\exp\Big\{ -\Big(\frac{y-\mu}{\sigma}\Big)\Big\}\Big\}, \qquad -\infty < y < \infty$$

را نتیجه می‌دهد. $\xi > ۰$ توزیعی دم کلفت با کاهش پذیری چندجمله‌ای، $\xi = ۰$ دم متوسط با کاهش پذیری نمایی و $\xi < ۰$ توزیعی با دم باریک و کران بالایی در نقطه $y = \mu - \xi/\sigma$ را مشخص می‌کند. تابع توزیع (۱.۲.۲) با توزیع‌های وایبل، فرهشه و گامبل از طریق $\alpha = ۱/\xi$ مرتبط می‌شود. شکل ۱.۲.۳ بافت‌نگار ۱۰۰۰ دادهٔ شبیه‌سازی شده از توزیع مقدار کرانگین تعمیم‌یافته به ازای مقادیر متفاوت پارامتر شکل و مقادیر صفر و یک پارامترهای مکان و مقیاس را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۲.۳: بافت‌نگار داده‌های شبیه‌سازی شده از توزیع مقدار کرانگین تعمیم‌یافته با $\xi = -۰/۲$ (سمت چپ)، $\xi = ۰$ (وسط)، $\xi = ۰/۲$ (سمت راست)

تعریف ۱.۲.۱ توزیع G ماکزیما-پایا[۴] نامیده می‌شود، اگر به ازای $n = ۲, ۳, \ldots$ ثابت‌هایی چون $a_n > ۰$ و b_n وجود داشته باشند به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} G^n(a_n y + b_n) = G(y).$$

مفهوم تعریف ۱.۲.۱ آن است که اگر دو مدل برای ماکزیمای مشاهدات یک و مثلاً چهار سال بسازیم، چون ماکزیمای مشاهدات در چهار سال بیشترین مقدار ماکزیمای مشاهدات در هر یک از این چهار سال است، پس دو مدل متقابلاً پایدارند. ارتباط بین قضیهٔ انواع کرانگینی و توزیع ماکزیما-پایا در قضیه زیر بیان می‌شود.

قضیه ۲.۲.۱ (کلز، ۲۰۰۱) توزیع G ماکزیما-پایا است، اگر و تنها اگر G توزیع مقدار کرانگین تعمیم‌یافته باشد.

---

[۴] Max-stable

یکی از پارامترهای مورد نظر در تحلیل مقادیر کرانگین مقدار بازگشت[۵] y_p با دورهٔ بازگشت[۶] $۱/p$ می‌باشد. مقدار بازگشت به صورت احتمال p از فزونی y_p در سال معین یا انتظار فزونی به طور متوسط هر $۱/p$ سال تعریف می‌شود ($۱/p$ اغلب دورهٔ بازگشت نامیده می‌شود). به عنوان مثال اگر در تحلیل مشاهدات بارش در یک منطقه مقدار بازگشت ۱۰۰ ساله ۱/۵ سانتیمتر باشد، آنگاه احتمال فزونی بارش به مقدار ۱/۵ سانتیمتر در هر سال ۰/۰۱ می‌باشد. مقدار بازگشت از حل $G(y_p) = ۱ - p$ که در آن G تابع توزیع مقدار کرانگین می‌باشد، به صورت

$$y_p = \begin{cases} \mu - \frac{\sigma}{\xi}[۱ - \{-\log(۱ - p)\}^{-\xi}] & \xi \neq ۰ \\ \mu - \sigma \log(-\log(۱ - p)) & \xi = ۰ \end{cases} \qquad (۳.۲.۱)$$

محاسبه می‌شود. تابع توزیع مقدار کرانگین برای مینیماهای بلوکی با تعریف $m_n = \min_{t=۱,\dots,n} Y_t$ و رابطهٔ آن با تابع توزیع ماکزیماها $P(\frac{m_n - d_n}{c_n} \leq y) \to ۱ - G(-y)$ بر مجموعهٔ $\{y : ۱ - \xi(y - \mu)/\sigma > ۰\}$ قابل تعریف است،

$$G(y) = ۱ - \exp\Big\{ - \Big[۱ - \xi(\frac{y - \mu}{\sigma})\Big]_+^{-۱/\xi}\Big\} \qquad (۴.۲.۱)$$

مقدار بازگشت برای توزیع مینیماهای بلوکی را می‌توان از رابطهٔ

$$y_p = \begin{cases} \mu + \frac{\sigma}{\xi}[۱ - (-\log p)^{-\xi}] & \xi \neq ۰ \\ \mu + \sigma \log(-\log p) & \xi = ۰ \end{cases}$$

بدست آورد (کلز، ۲۰۰۱). مدل‌بندی مینیماهای بلوکی را می‌توان براساس توزیع GEV در (۲.۲.۱) و رابطهٔ $\min_{t=۱,\dots,n} Y_t = -\max_{t=۱,\dots,n} -Y_t$ انجام داد، بنابراین پارامترهای توزیع مینیماها با توجه به آنچه برای ماکزیماها بیان خواهد شد، برآورد می‌شوند.

---

[۵] Return level

[۶] Return period

۳.۱ برآورد پارامترهای توزیع مقدار کرانگین تعمیم‌یافته

در عمل برازش مدل به این صورت است که ابتدا مشاهدات را در فاصله‌های زمانی (مثلاً سال و فصل) با اندازه‌های برابر بلوک‌بندی نموده و سپس توزیع مقدار کرانگین تعمیم‌یافته به ماکزیمای این بلوک‌ها برازش می‌شود. انتخاب اندازه بلوک‌ها توازنی بین واریانس و اریبی در استنباط برقرار می‌کند. اندازه بلوک بزرگ، ماکزیماهای کمتری (اطلاعات کمتر) را تولید کرده و در نتیجه واریانس افزایش می‌یابد در حالی که اندازهٔ بلوک کوچک‌تر، موجب عدم برازش صحیح مدل و اریبی در استنباط می‌گردد. البته در عمل هدف از تحلیل مشاهدات، اندازهٔ بلوک‌ها را مشخص می‌کند، مثلاً اگر تعیین ماکزیمای سالانهٔ مقدار بارش مورد نظر باشد اندازهٔ بلوک یک سال در نظر گرفته می‌شود. پارامترها را می‌توان با روش‌های گشتاوری، درستنمایی و بیزی برآورد نمود. مدسن و همکاران (۱۹۹۷) در یک مطالعهٔ شبیه‌سازی نشان دادند که برآوردگر گشتاوری جذر میانگین توان دوم خطای کمتری در مقادیر نزدیک به صفر پارامتر شکل داراست. از میان روش‌های متفاوت برآوردیابی، روش ماکسیمم درستنمایی در عین سادگی دارای مزیت‌هایی است. علاوه بر خواص مجانبی از لحاظ کاربردی دارای انعطاف‌پذیری مناسبی در مدل‌سازی اطلاعات متغیرهای تبیینی است. مشکلی که استفاده از برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی را در صورت وجود محدود می‌کند کوچک بودن حجم نمونه می‌باشد. در عمل با وجود مهیا بودن مجموعهٔ داده‌های بزرگ بعد از تعریف مقادیر کرانگین، مشاهدات کمی برای برازش باقی می‌ماند. از طرف دیگر ممکن است حجم داده‌ها مناسب باشد، اما پراکندگی زیاد داده‌ها موجب محدودیت در برآورد پارامترها با روش ماکسیمم درستنمایی شود. این محدودیت موجب می‌شود که برآوردهای ماکسیمم درستنمایی از دقت کافی برخوردار نباشند.