دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان

روش نقطه ثابت برای آشفتگی دومضروب ها و دومضروب های جردن در C^*-جبرهای سه تایی

استاد راهنما

دکتر علی عبادیان

نگارش
مریم ولی پور ثانی رضایی

شهریور ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به آنان که

لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز آنهاست.

تقدیم به

پدر و مادر عزیزتر از جانم

خدایا...

جهل و نادانی من و عصیان و گستاخی من، تو را باز نداشت از اینکه راهنمایی‌ام کنی به سوی صراط قربتت و موفقم گردانی به آنچه رضا و خشنودی توست.

پس

هرگاه که تو را خواندم، پاسخم گفتی؛

هرچه از تو خواستم، عنایتم فرمودی؛

هرگاه اطاعتت کردم، قدردانی و تشکر کردی؛

و هر زمان که شکرت را بر جا آوردم، بر نعمتهایم افزودی؛

و اینها همه چیست؟

جز نعمت تمام و کمال و احسان بی‌پایان تو!؟

...من کدام یک از نعمت‌های تو را می‌توانم بشمارم یا حتی به یاد آورم و به خاطر بسپارم؟

...خدایا! الطاف خفیه‌ات و مهربانی‌های پنهانی‌ات بیشتر و پیشتر از نعمتهای آشکار توست.

خدایا ! من را آزرمناک خویش قرار ده آن‌سان که انگار می‌بینمت.

من را آنگونه حیامند کن که گویی حضور عزیزت را احساس می‌کنم.

خدایا! من را با تقوای خودت سعادتمند گردان

و با مرکب نافرمانی‌ات به وادی شقاوت و بدبختی‌ام مکشان.

در قضایت خیرم را بخواه

و قدرت برکاتت را بر من فروریز تا آنجا که تأخیر را در تعجیل‌های تو و تعجیل را در تأخیرهای تو نپسندم.

آنچه را که پیش می‌اندازی دلم هوای تاخیرش را نکند

و آنچه را که بازپس می‌نهی من را به شکوه و گلایه نکشاند.

...پروردگار من!

...من را از هول و هراس‌های دنیا و غم و اندوه‌های آخرت، رهایی ببخش و من را از شر آنان که در زمین ستم می‌کنند در امان بدار.

سپاس گزاری...

سپاس مخصوص خدای بزرگ است که عقل را در وجود انسان به ودیعت نهاد. پیامبران و امامان معصوم را برای استفاده درست از این امانت الهی فرستاد و انسان‌هایی پاک سرشت را در مسیر زندگی او قرار داد. آن‌هایی که ذرات وجودشان را در راه دانایی انسان به کار می‌گیرند تا ندای فطرت را در وجودش بیدار سازد، به این امید که در صراط مستقیم قدم بردارد.

تشکر می‌کنم از همه کسانی که در زندگی، راه کسب علم و معرفت را به من نمایاندند.

از خانواده عزیز، دلسوز و مهربانم که همیشه و در هر کار و تصمیمی بهترین راهنما، مشاور و حامی‌ام بوده و همواره مرا به ادامه تحصیل، کسب علم و رسیدن به مراحل بالاتر تشویق نموده اند، تشکر می‌نمایم.

سپاس گزارم از تمام اساتید بزرگواری که در کلاس درس، راه زندگی را برایم روشن کردند. قدردانی می‌کنم از جناب آقای دکتر علی عبادیان که تبیین و هدایت پایان‌نامه را به عهده داشتند. همچنین از جناب آقای دکتر سعید استاد باشی و جناب آقای دکتر سعید شمس که زحمت مطالعه و داوری این پایان‌نامه را تقبل فرمودند، کمال امتنان را دارم.

مریم ولی پور ثانی رضایی
شهریور ۱۳۹۱

نام خانوادگی: ولی پور ثانی رضایی نام: مریم

عنوان پایان‌نامه: روش نقطه ثابت برای آشفتگی دومضروب‌ها و دومضروب‌های جردن درC^*-جبرهای سه تایی.

استاد راهنما: دکتر علی عبادیان

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز

دانشگاه: ارومیه دانشکده: علوم

تاریخ فارغ‌التحصیلی: شهریور ۱۳۹۱ تعداد صفحه: ۱۰۵

کلیدواژه‌ها: C^*-جبر سه تایی، دومضروب، دومضروب جردن، روش نقطه ثابت، پایداری.

چکیده

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر سه تایی باشد. نگاشت $\mathbb{C}$-دوخطی $T : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ را یک C^*-دومضروب جبرهای سه تایی می‌نامیم اگر به ازای هر $a, b, c, d \in \mathcal{A}$ در

$$T([a,b,c],d) = [T(a,b),c,d]$$

و

$$T(a,[b,c,d]) = [a,b,T(c,d)]$$

صدق کند. همچنین نگاشت $\mathbb{C}$-دوخطی $T : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ را C^*-دومضروب جردن جبرهای سه تایی می‌نامیم اگر به ازای هر $a \in \mathcal{A}$ در

$$T([a,a,a],a) = [T(a,a),a,a]$$

و

$$T(a,[a,a,a]) = [a,a,T(a,a)]$$

صدق کند. با استفاده از روش نقطه ثابت پایداری هایرز-اولام-راسیاس تعمیم یافته دومضروب‌ها و دومضروب‌های جردن را در C^*-جبرهای سه تایی بررسی می‌کنیم. مفهوم پایداری هایرز-اولام-راسیاس از قضیه پایداری تی. ام. راسیاس که در مقاله‌اش [۴۱] آمده، نتیجه شده است.

فهرست مطالب

پیشگفتار

مسأله پایداری در سال ۱۹۴۰ با سؤال اولام[۱] آغاز شد[۴۷]. بعد از آن، پایداری به صورت‌های متفاوتی مطرح شد[۲۴، ۴۱، ۲۲]. در چند دهه‌ی اخیر نیز بسیاری از ریاضیدانان پایداری انواع معادلات تابعی و ترکیبی از آن‌ها را مورد بررسی قرار داده‌اند[۴۶، ۲۶، ۳۷، ۴۹، ۴۳]. این پایان نامه بر اساس مقاله زیر تدوین گردیده است:

A. Ebadian, N. Ghobadipour, and M. Eshaghi Gordji, A fixed point method for perturbation of bimultipliers and Jordan bimultipliers in C^*-ternary algebras, J. Math. Phys. 51, 1–10 Article ID 103508 (2010).

در فصل اول که شامل چهار بخش است یک سری تعاریف و قضایای مقدماتی را بیان کرده‌ایم. بخش اول شامل مباحثی مقدماتی از آنالیز می‌باشد. در بخش دوم مفهوم اندازه پذیری را شرح داده‌ایم. بخش سوم آن شامل مباحثی مقدماتی از آنالیز حقیقی و جبرهای باناخ می‌باشد. همچنین در این بخش مفهوم یک C^*−جبر را بیان کرده‌ایم. بخش چهارم را ضمن تعریف یک معادله تابعی به معرفی یک سری معادله تابعی اختصاص داده‌ایم.

فصل دوم شامل چهار بخش است. بخش اول C^*−جبر سه تایی را معرفی کرده و در بخش دوم

[۱] S. M. Ulam

مفهوم پایداری و تاریخچه آن را بیان نمودهایم. در بخش سوم نیز از روش‌های پایداری معادلات تابعی، روش نقطه ثابت را که در فصل بعد نقش بسزایی دارد مورد مطالعه قرار دادهایم و در بخش چهارم به حل معادله تابعی

$$f(a+b,c-d)+f(a-b,c+d)=۲f(a,c)-۲f(b,d) \qquad (۱)$$

پرداخته ایم.

فصل سوم که هدف اصلی این پایان نامه است، شامل دو بخش است. در بخش اول پایداری هایرز-اولام-راسیاس تعمیم یافته از دومضروب‌ها را در C^*-جبر سه تایی برای معادله تابعی (۱) و در بخش دوم پایداری هایرز-اولام-راسیاس تعمیم یافته از دومضروب‌های جردن را در C^*-جبر سه تایی برای معادله تابعی (۱) ثابت کردهایم.

فصل ۱
تعاریف و قضایای مقدماتی

این فصل حاوی تعاریف و مفاهیم مقدماتی می‌باشد که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است.

۱.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۱. یک فضای متریک مجموعه‌ای است مانند X که در آن یک تابع فاصله(یا متر) مانند d با خواص زیر تعریف شده است:

۱) به ازای هر $x, y \in X$، $۰ \leq d(x, y) < \infty$؛

۲) $d(x, y) = ۰$ اگر و فقط اگر $x = y$؛

۳) به ازای هر $x, y \in X$، $d(x, y) = d(y, x)$؛

۴) به ازای هر $x, y, z \in X$، $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

(X, d) را یک فضای متریک می نامیم. اگر در شرط اول به ازای هر $x, y \in X$، $۰ \leq d(x, y) \leq \infty$ و شرایط دیگر همچنان برقرار باشند، گوییم d یک متر توسعه یافته و X یک فضای متریک توسعه یافته است.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم (X,d) و (Y,ρ) فضاهایی متریک باشند. اگر $E \subseteq X$، $p \in E$ و $f : E \longrightarrow Y$ آن‌گاه گوییم f در p پیوسته است اگر استلزام زیر برقرار باشد:

$$\forall \epsilon > ۰;\ \exists \delta > ۰\ ; d(x,p) < \delta \ \Rightarrow\ \rho(f(x), f(p)) < \epsilon \qquad (x \in E).$$

f را بر E پیوسته گوییم، هرگاه در هر نقطه‌ی E پیوسته باشد.

تعریف ۳.۱.۱. دنباله $\{x_n\}$ در فضای متریک (X,d) را یک دنباله همگرا می‌گوییم هرگاه به ازای هر $\epsilon > ۰$، عدد صحیح N و $x \in X$ چنان موجود باشد که به ازای هر $n \geq N$، $d(x_n, x) < \epsilon$.

تعریف ۴.۱.۱. دنباله $\{x_n\}$ در فضای متریک (X,d) را یک دنباله کوشی می‌گوییم هرگاه به ازای هر $\epsilon > ۰$، عدد صحیح N چنان نظیر باشد که اگر $m,n \geq N$، $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

تعریف ۵.۱.۱. یک فضای متریک که هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد فضای متریک کامل(یا تام) می‌نامیم.

۲.۱ مفهوم اندازه پذیری

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه باشد. در این صورت τ را یک توپولوژی بر X گوییم هرگاه:

۱) $\tau \subseteq p(X)$ (که $p(X)$ مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های X است)؛

۲) $\emptyset, X \in \tau$؛

۳) اگر $\{A_i\}_{i\in\mathbb{I}} \subseteq \tau$، آن‌گاه $\bigcup_{i\in\mathbb{I}} A_i \in \tau$؛

۴) اگر $\{A_n\}_{n=1}^{k} \subseteq \tau$ آن‌گاه $\bigcap_{n=1}^{k} A_n \in \tau$.

مجموعه X با این توپولوژی را یک فضای توپولوژیکی و اعضای τ را مجموعه‌های باز در X می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک باشد. در این صورت $f : X \longrightarrow Y$ را پیوسته گوییم هرگاه برای هر مجموعه بازی مانند V در Y، $f^{-1}(V)$ یک مجموعه باز در X باشد.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم X مجموعه‌ای غیرتهی و $m \subseteq p(X)$ باشد. در این صورت m را یک $\sigma-$جبر روی X گوییم هرگاه:

۱) $X \in m$؛

۲) اگر $A \in m$ آن‌گاه $A^C = X \setminus A \in m$؛

۳) اگر $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq m$ آن‌گاه $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in m$.

(X, m) را یک فضای اندازه پذیر گوییم و هر عضو m را یک مجموعه اندازه پذیر می‌نامیم.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم (X, m) یک فضای اندازه پذیر و (Y, τ) یک فضای توپولوژیک باشد. در این صورت $f : (X, m) \longrightarrow (Y, \tau)$ را اندازه پذیر گوییم هرگاه برای هر مجموعه بازی مانند V در Y، $f^{-1}(V)$ در X اندازه پذیر باشد(یعنی $f^{-1}(V) \in m$ باشد).

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی باشد. در این صورت کوچکترین $\sigma-$جبر β را که شامل همه مجموعه‌های باز X می‌باشد $\sigma-$جبر بورل می‌نامیم و اعضای این $\sigma-$جبر را مجموعه‌های بورل گوییم.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک باشد. در این صورت $f : X \longrightarrow Y$ را اندازه پذیر بورل(یا تابع بورل) گوییم هرگاه برای هر مجموعه بازی مانند V در Y، $f^{-1}(V)$ یک مجموعه بورل در X باشد(یعنی $f^{-1}(V) \in \beta_X$ باشد).

قابل توجه است که اندازه پذیری یک تابع تنها به $\sigma-$جبرها وابسته است. بنابراین در حالت کلی برای نشان دادن این که یک تابع اندازه پذیر است، کافی است اندازه پذیری تصویر معکوس مجموعه‌هایی که $\sigma-$جبر فضای برد را تولید می‌کنند بررسی کنیم. همچنین به سادگی می‌توان دید که هر تابع پیوسته، تابع بورل است.

قضیه ۷.۲.۱. *فرض کنیم $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله ای از توابع اندازه پذیر بر مجموعه X باشد، و نیز به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم:*

۱) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq \infty$؛

۲) *وقتی* $n \to \infty$، $f_n(x) \to f(x)$.

در این صورت f اندازه پذیر است.

برهان. رجوع کنید به قضیه ۲۶.۱ از مرجع [۴۵]. □

تعریف ۸.۲.۱. مجموعه $S \subseteq \mathbb{R}$ اندازه پذیر لبگ است اگر برای هر مجموعه‌ی $A \subseteq \mathbb{R}$،

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap S) + \lambda^*(A \backslash S)$$

که λ^* برای هر $A \subseteq \mathbb{R}$، به صورت زیر تعریف شده است:

$$\lambda^*(A) = inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} L(I_k) : A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \text{ و } \{I_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ دنباله‌ای از بازه‌های باز است} \right\}$$

و $L(I_k)$ طول بازه‌ی I_k به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ می‌باشد.

گردایه‌ی تمام مجموعه‌های اندازه پذیر $\mathbb{R}$ را با $\mathfrak{m}_{\mathbb{R}}$ یا $\mathfrak{m}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۲.۱. تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ اندازه پذیر لبگ است اگر $f^{-1}(B)$ برای هر زیرمجموعه بورل B از $\mathbb{R}$ ($B \in \beta_{\mathbb{R}}$)، یک زیرمجموعه اندازه پذیر لبگ $\mathbb{R}$ باشد(یعنی $f^{-1}(B) \in \mathfrak{m}$).

گزاره ۱۰.۲.۱. *تمام زیرمجموعه‌های بورل $\mathbb{R}$، اندازه پذیر لبگ می‌باشند.*

برهان. رجوع کنید به گزاره‌ی ۱۱۴C مرجع [۲۰] . □

بنابراین به وضوح می‌توان دید هر تابع بورل $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع اندازه پذیر لبگ می‌باشد.

گزاره ۱۱.۲.۱. *فرض کنیم $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع اندازه پذیر لبگ باشد و به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$،*

$$f(x+y) = f(x) + f(y);$$

در این صورت f پیوسته است.

برهان. رجوع کنید به تمرین ۱۸ از فصل ۹ [۴۵]. □

۳.۱ مفاهیمی از جبرهای باناخ

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم A مجموعه ای غیرتهی و $f : A \times A \longrightarrow A$ یک تابع باشد. در این صورت f را یک عمل دوتایی(عمل) بر A می‌گوییم.

تعریف ۲.۳.۱. مجموعه غیرتهی G را همراه با عمل دوتایی $\circ$ بر G که دارای شرایط زیر باشد یک گروه می‌نامیم:

۱) عمل $\circ$ بر G شرکت پذیر باشد، یعنی به ازای هر $x, y, z \in G$ داشته باشیم:

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z;$$

۲) G دارای عضوی مانند e باشد به طوری که برای هر $x \in G$ داشته باشیم:

$$e \circ x = x \circ e = x$$

(e را عضو یکه G می‌گوییم)؛

۳) برای هر $x \in G$ عضوی مانند $y \in G$ وجود داشته باشد به طوری که

$$x \circ y = y \circ x = e$$

(y را معکوس x می‌گوییم).

اگر این G شرط سوم را نداشته باشد، آن‌گاه G را یک نیم‌گروه می‌گوییم.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنیم G همراه با عمل دوتایی $\circ$ یک گروه باشد. در این صورت G را گروه آبلی می‌نامیم هرگاه با عمل دوتایی $\circ$ تعویض پذیر باشد یعنی به ازای هر $x, y \in G$، داشته باشیم $x \circ y = y \circ x$.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنیم $(G_1, \circ)$ و $(G_2, *)$ دو گروه باشند. در این صورت تابع $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ را یک همریختی می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in G_1$ داشته باشیم:

$$\varphi(x \circ y) = \varphi(x) * \varphi(y).$$

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنیم A مجموعه ای غیرتهی با دوعمل + و . باشد. در این صورت $\mathbb{F}$ را یک میدان گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) $(\mathbb{F}, +)$ یک گروه آبلی باشد؛

۲) $(\mathbb{F}, .)$ یک گروه آبلی باشد؛

۳) عمل . روی عمل + پخشی باشد یعنی $\lambda.(\alpha+\beta) = \lambda.\alpha + \lambda.\beta$ به ازای هر $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{F}$ باشد.

$\mathbb{R}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{C}$ با اعمال جمع و ضرب معمولی، مثال‌هایی از یک میدان می‌باشند.

تعریف ۶.۳.۱. مجموعه ناتهی V را یک فضای برداری(یا خطی) روی میدان $\mathbb{F}$ می‌نامیم، هرگاه V با عمل جمع برداری، گروه آبلی بوده و به ازای هر $v \in V$ و $\alpha \in \mathbb{F}$، $\alpha v \in V$ باشد(این عمل را ضرب اسکالر می‌نامند) و به ازای هر $\alpha, \beta \in F$ و $v, w \in V$ داشته باشیم:

۱) $\alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$؛

۲) $\alpha v + \beta v = (\alpha+\beta)v$؛

۳) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$؛

۴) $ev = v$ (که در آن e نشان دهنده عنصر یکه $\mathbb{F}$ تحت عمل ضرب می‌باشد).

اعضای V را بردار و اعضای $\mathbb{F}$ را اسکالر می‌نامیم.

اگر $\mathbb{F} = \mathbb{C}$، V را فضای برداری مختلط(یا $\mathbb{C}-$خطی) و اگر $\mathbb{F} = \mathbb{R}$، V را فضای برداری حقیقی(یا $\mathbb{R}-$خطی) می‌نامیم.

تعریف ۷.۳.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای برداری باشند. در این صورت نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را یک نگاشت جمعی گوییم، هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

تعریف ۸.۳.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای برداری باشند. در این صورت نگاشت $f : X \times X \longrightarrow Y$ را یک نگاشت دوجمعی گوییم، هرگاه به ازای هر $x, x_۱, x_۲ \in X$ و $y, y_۱, y_۲ \in Y$ داشته باشیم:

$$f(x_۱ + x_۲, y) = f(x_۱, y) + f(x_۲, y),$$

$$f(x, y_۱ + y_۲) = f(x, y_۱) + f(x, y_۲).$$

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای برداری روی میدان F باشند. در این صورت نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را نگاشت خطی(یا عملگر خطی) گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ و هر اسکالر $\alpha \in F$ داشته باشیم:

۱) $f(x + y) = f(x) + f(y)$؛

۲) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

نگاشت خطی f را همریختی فضاهای برداری روی یک میدان نیز می‌گوییم. اگر $\mathbb{F} = \mathbb{C}$، f را نگاشت $\mathbb{C}-$خطی و اگر $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$، f را نگاشت $\mathbb{Q}-$خطی می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۳.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای برداری روی یک میدان $\mathbb{F}$ باشند. در این صورت نگاشت $f : X \times X \longrightarrow Y$ را نگاشت دوخطی گوییم هرگاه به ازای هر $x \in X$، $y \in Y$ و هر اسکالر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ داشته باشیم:

۱) f دوجمعی باشد؛

۲) $f(\alpha x, \beta y) = \alpha\beta f(x,y)$.

اگر $\mathbb{F} = \mathbb{C}$، f را نگاشت $\mathbb{C}$–دوخطی و اگر $\mathbb{F} = \mathbb{R}$، f را نگاشت $\mathbb{R}$–دوخطی می‌نامیم.

لم ۱.۳.۱۱. *فرض کنیم X و Y فضاهای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشند. اگر $f : X \longrightarrow Y$ نگاشتی جمعی باشد آن‌گاه f یک نگاشت $\mathbb{Q}$– خطی است.*

برهان. چون f جمعی است لذا داریم:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (x, y \in X). \tag{۱.۱}$$

با قرار دادن $x = y = ۰$ در رابطه‌ی (۱.۱) داریم:

$$f(۰) = ۰. \tag{۲.۱}$$

حال با جایگزینی $-x$ به جای y در (۱.۱) و استفاده از رابطه‌ی (۲.۱) خواهیم داشت:

$$f(-x) = -f(x). \tag{۳.۱}$$

پس f فرد است. با توجه به رابطه‌ی (۱.۱) و استقرای متناهی داریم:

$$f(x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n) = f(x_۱) + \ldots + f(x_n) \qquad (x_i \in X, i = ۱, ۲, \ldots, n). \tag{۴.۱}$$

در رابطه‌ی (۴.۱) برای $i = ۱, \ldots, n$ قرار می‌دهیم $x_i = x$ و با استفاده از رابطه‌ی (۳.۱) داریم:

$$f(nx) = nf(x) \qquad (n \in \mathbb{Z}, x \in X). \tag{۵.۱}$$

فرض کنیم $n \in \mathbb{Z} \neq ۰$ ، با تعویض x با $\frac{x}{n}$ در رابطه‌ی (۵.۱)، می‌توان نوشت:

$$f(\frac{x}{n}) = \frac{۱}{n} f(x) \qquad (x \in X, n \in \mathbb{Z} - \{۰\}). \tag{۶.۱}$$

فرض کنیم $r = \dfrac{m}{n}$ عددی گویا باشد که $m, n \in \mathbb{Z}$. در این صورت بنا به رابطه‌های (۵.۱) و (۶.۱) داریم:

$$f(rx) = f(m\frac{x}{n}) = mf(\frac{x}{n}) = rf(x) \qquad (x \in X, r \in \mathbb{Q}).$$

پس f نگاشت $\mathbb{Q}$−خطی است. $\square$

نکته ۱۲.۳.۱. *فرض کنیم X و Y فضاهایی برداری روی میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشند. اگر $f : X \longrightarrow Y$ نگاشتی دوجمعی باشد، آن‌گاه به سادگی می‌توان دید که به ازای هر $x, y \in X$ و $m, n \in \mathbb{Q}^+$ داریم:*

$$f(nx, my) = nmf(x, y).$$

تعریف ۱۳.۳.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. در این صورت نگاشت $\| \cdot \| : X \longrightarrow \mathbb{F}$ را یک نرم بر X می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ و اسکالر $\alpha \in \mathbb{F}$ داشته باشیم:

۱) $\| x \| \geq ۰$؛

۲) $\| x \| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$؛

۳) $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$؛

۴) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (نامساوی مثلثی).

تعریف ۱۴.۳.۱. فضای برداری X به همراه نرم $\| \cdot \|$ را یک فضای نرم‌دار(یا نرمیده) می‌نامیم.

اگر به ازای هر $x, y \in X$ تعریف کنیم $d(x, y) := \| x - y \|$، آن‌گاه d یک متر بر X است.

تعریف ۱.۳.۱۵. هر فضای نرم‌دار را که نسبت به متر تعریف شده توسط نرمش تام باشد، فضای باناخ گوییم.

تعریف ۱.۳.۱۶. فرض کنیم X و Y دو فضای برداری نرم‌دار باشند. در این صورت نگاشت خطی L از X به Y را کران‌دار گوییم اگر $M > 0$ چنان موجود باشد که برای هر $x \in X$،

$$\| Lx \|_Y \leq M \| x \|_X .$$

تعریف ۱.۳.۱۷. فرض کنیم X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. در این صورت مجموعه‌ی تمام نگاشت‌های خطی از X به توی Y را با $L(X, Y)$ نشان می‌دهیم و قرار می‌دهیم، $L(X, X) = L(X)$.

تعریف ۱.۳.۱۸. فرض کنیم X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. در این صورت مجموعه‌ی تمام نگاشت‌های خطی کران‌دار از X به توی Y را با $BL(X, Y)$ نشان می‌دهیم. در حالت خاص که $X = Y$، $BL(X, Y)$ را با $BL(X)$ نشان می‌دهیم. و در حالتی که $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{F} = \mathbb{C}$، $BL(X, \mathbb{F})$ را با نماد X^* نشان می‌دهیم که به آن فضای دوگان X گوییم.

تعریف ۱.۳.۱۹. فرض کنیم A یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. هرگاه یک عمل ضرب بر A تعریف شده باشد به طوری که به ازای هر $x, y, z \in A$ و هر اسکالر $\alpha \in \mathbb{F}$ داشته باشیم:

۱) $x(yz) = (xy)z$؛

۲) $(x + y)z = xz + yz$ و $x(y + z) = xy + xz$؛

۳) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$؛

آن‌گاه A را یک جبر می‌نامیم.