بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه

گروه فیزیک

(گرایش نظری)

روش جبری و گروههای دینامیکی در سیستمهای کوانتومی

از:

مارال بزرگ چنانی

استاد راهنما:

دکتر حسین پناهی

آبان ماه ۱۳۸۷

تقدیم به پدر و مادر عزیزم که زندگی ام بخشیدند

و همسرم که همواره در کنارم بود و یاورم.

به نام آنکه جان را فکرت آموخت

ستایش و فروتنی **یزدان** پاک را سزاوار است که آدمی را نیروی بسیار بخشید؛ تا دریابد، شگفتی کند و باز شناسد، هر آنچه را که در دایره هستی او را به سوی رشد و یگانگی رهنمون می گردد. در این مسیر هر انسانی را راهنمایانی است که یاریش می رسانند تا در جاده زندگی رهسپار شود و به آنچه چشم دارد، دست یابد.

تشکر و قدردانی بی دریغ از **پدر** و **مادر** عزیزم که در تمامی مراحل زندگی تا به امروز، مشوق و پشتیبانم بوده اند و از همین جا دست هر دوشان را می بوسم.

سپاس ویژه از **همسرم** که همراه همیشگی ام بوده اند و هستند.

تشکر می نمایم از **خواهر** خوبم که در بخش تایپ پایان نامه مرا یاری رساند.

تشکر بی دریغ از جناب آقای **دکترحسین پناهی** که در طول دوران انجام این پایان نامه با حسن اخلاق همیشگی شان در به سر انجام رساندن آن، کمک شایانی کردند.

سپاس از اساتید محترم، جناب آقای **دکتر حسین فرج اللهی** و جناب آقای **دکتر رضا صفاری** که زحمت داوری و بازبینی پایان نامه را بعهده داشتند.

تشکر می نمایم از جناب آقای **دکتر مجید سیفی** که نماینده کمیته تحصیلات تکمیلی برای این پایان نامه بودند.

سپاس و درود بر دیگر **اساتید محترم گروه فیزیک** که در طول این دوره، افتخار شاگردی و کسب دانش و معرفت را از ایشان داشتم.

از دوستان و همکلاسی های عزیز، مهربان و نازنینم که در طول این دوره لحظات و خاطرات خوشی در کنارشان رقم خورد، تشکر و قدردانی می نمایم.

فهرست مطالب:

ج

فهرست شکل ها:

چکیده

عنوان: روش جبری و گروههای دینامیکی در سیستمهای کوانتومی

نگارنده: مارال بزرگ چنانی

در این پایان نامه پتانسیل های حل پذیر ادغام شده با جبر $su(1,1)(\sim so(2,1))$ مطالعه شدند. ابتدا با استفاده از روش های جبری و روش فاکتورگیری اینفلد-هیول، پتانسیل های پوشل-تلر و مورس-روزن بررسی شده و طیف انرژی و توابع موج آنها محاسبه شدند. سپس با استفاده از روش مکانیک کوانتومی ابرتقارنی فرمالیسم کلی برای ایجاد پتانسیل های حل پذیر این جبر از معادله دیفرانسیل چند جمله ای های متعامد لاگر تعمیم یافته، هرمیت و ژاکوبی ارائه شد. همچنین عملگرهای نردبانی J_+ و J_- و عملگرهای نردبانی مکانیک کوانتومی ابرتقارنی A و A^+ محاسبه شدند و معادله دیفرانسیل این چند جمله ای ها با استفاده از تبدیلات متغیری و تشابهی محاسبه گردید.

به عنوان مثالی از پتانسیل های حل پذیر و با توجه به کاربردهای پتانسیل های تناوبی در فیزیک، پتانسیل اسکارف بررسی شد. تقارن دینامیکی هامیلتونین ها در $so(2,1)$ و $so(2,2)$ بصورت عملگر شرودینگر پتانسیل اسکارف و اسکارف تعمیم یافته ایجاد کرده و با استفاده از نمایش های گروه دیده شد که سری های مکملی از نمایش های تصویری یکانی با گاف ها و نمایش های غیر یکانی آنها با باندها متناظر هستند و سری های گسسته برای لبه های باند استفاده می شوند. بعلاوه ماتریس انتقال، رابطه پاشندگی، سرعت گروه و جرم موثر در هر دو مورد محاسبه گردید.

واژه های کلیدی:
تئوری نمایش، مکانیک کوانتومی ابرتقارنی، تقارن دینامیکی، پتانسیل های دقیقا حل پذیر، پتانسیل های تناوبی، $so(2,1)$ و $so(2,2)$.

Abstract

Title: The Algebraic Approach and Dynamical Groups in Quantum Systems
Author: Maral Bozorgchenani

In this thesis solvable potentials associated with su(1,1) (~so(2,1)) algebra have been studied. First by using of algebraic methods and Infeld-Hull factorization approach, Pöschl-Teller and Morse-Rosen potentials have been investigated and energy spectrum and wave functions of them have been obtained. Then by using of supersymmetry quantum mechanic (SUSYQM) method, the general formalism for construction of solvable potentials of this algebra from the differential equation of orthogonal polynomials of Generalized Laguerre, Hermite and Jacobi has been represented. Also ladder operators J_+, J_- and SUSYQM ladder operators A^+, A have been obtained, and differential equation of these Polynomials has been obtained by means of variable and similarity transformations.

As an example of solvable potentials, and according to applications of the periodic potentials in physics, the Scarf potential has been investigated. Dynamical symmetry Hamiltonians in so(2,1) and so(2,2) have been constructed as schrödinger operators of Scarf and Generalized Scarf potential. By using group representation, it has been demonstrated that the complementary series of these algebras and their non-unitary representations are corresponds to band structures and discrete series of the algebras are used for band edges. Moreover, transfer matrix, dispersion relation, group velocity and effective mass have been obtained in both of cases.

Key words:
Representation theory, Supersymmetry quantum mechanic, Dynamical symmetry, Exactly solvable models, Periodic potentials, so(2,1), so(2,2).

فصل اول

مقدمه

فصل اول: مقدمه

تقارن به دلیل ارتباط با قانون پایستگی مفهوم مهمی در فیزیک است. تبدیلات تقارنی در سیستم فیزیکی مانند هر تبدیل دیگری سیستم را ناوردا باقی می گذارند. اکثر عملگرهای تقارنی در فیزیک عناصر گروه معینی هستند، بنابراین تئوری گروه ابزار ریاضی مناسبی است که تقارن را بیان می کند. تئوری گروه به دسته بندی و تحلیل سیستماتیکی بسیاری از تقارن های مختلف که در طبیعت ظاهر می شوند کمک می کند. اگرسیستم تحت تبدیلات بی نهایت پیوسته ناوردا بماند، این تبدیلات متناظر با گروه های نامتناهی بوده و تقارن بصورت پیوسته دسته بندی می شود. تقارن های پیوسته بطورکلی در زبان گروه های لی و بصورت موضعی در جبرهای لی بیان می شوند. مثال هایی از تقارن های پیوسته شامل دوران و انتقال می باشند. اگر سیستم فقط تحت مجموعه متناهی تبدیلات ناوردا بماند، آنگاه تقارن بصورت گسسته دسته بندی می شود و این تبدیلات متناظر با گروه های متناهی هستند. مثال هایی از تقارن های گسسته شامل تقارن انعکاسی (پاریته) و ناوردایی برگشت زمان هستند.

ریشه همه قوانین تقارنی در ارتباط بین کمیت های پایسته، ناوردایی فرضی تحت تبدیل ریاضی و نتایج فیزیکی قوانین پایستگی یا قوانین گزینش قرار دارد. این در مطالعه سیستم های خیلی پیچیده، حتی وقتی جزئیات درباره نیروها و برهمکنش های سیستم ناشناخته است، کمک می کند.

روش های تقارنی نقش خاصی را در فیزیک کوانتومی ایفا می کنند، زیرا آنها ابزارهای محاسباتی مفیدی برای بررسی بسیاری مسائل فیزیکی هستند که اصول ناوردایی، فرمولبندی قوانین دینامیکی و دسته بندی حالت های کوانتومی را ایجاد می کنند. ساختار تقارنی به ما کمک می کند تا محاسبات نظری دقیقی درباره تئوری های فیزیکی که از راه آزمایش امتحان شده اند، تهیه کنیم. تئوری نسبیت روی تقارنی که قوانین فیزیکی برای همه ناظرهای داخلی یکسان است، پایه ریزی شده است. تئوری عام نسبیت روی تقارنی که قوانین فیزیکی تحت تبدیل مختصات کلی ناوردا باقی می مانند پایه ریزی شده است. در فیزیک ذرات، برهمکنش های بین ذرات اولیه از طریق اصل ناوردایی پیمانه ای موضعی تعیین می شود.

برای مدت زمان طولانی تئوری تقارنی فقط به حالت های خطی یعنی گروه های لی و جبرهای لی منحصر شده بود. فرمالیسم گروه های لی و جبرهای لی، مخصوصا حالت های همدوس تعمیم یافته و روش های مربوطه، راه حل های زیبا و ساده ای به مسائل تحولی و طیفی می دهند[۱].

در سال های اخیر روش های جبر لی موضوع مورد علاقه در بسیاری از زمینه های فیزیک بوده اند. کوردرو[1] و هوجمان[2] در سال ۱۹۷۰ [۲]، بروندو[3] و پالما[4] در ۱۹۸۰ [۳]، الحسید[5] و همکارانش در ۱۹۸۳ [۴] نشان دادند که برای سیستم های مکانیک کوانتومی یک بعدی ویژه مقادیر می توانند با استفاده از روش های جبری، و ویژه توابع (حالت های مقید) می توانند از حالت پایه با استفاده از عملگرهای ایجاد شده از جبر لی تعیین شوند. الحسید و همکارانش در سال ۱۹۸۶ [۵] بیان کردند که هرگاه عملگرها ویژه توابع وابسته به ویژه مقادیر یکسان سیستم ها با پارامترهای پتانسیلی متفاوت ایجاد کنند، جبر مربوطه جبر پتانسیلی است، و روش جبری نتایجی را برای خانواده پتانسیلی ارائه می دهد[۶]. این روش، تقارن دینامیکی نامیده می شود. نقطه شروع معمول در این روش معرفی جبر طیف مولدی[6] (SGA) برای مسئله مورد نظر است. SGA وجود دارد هر گاه هامیلتونین H بتواند بر حسب مولدهای جبر بیان شود، آنگاه تئوری نمایش می تواند برای تعیین حدهای دقیقا حل پذیر استفاده شود. بعنوان یک نتیجه، آنگاه حل معادله شرودینگر یک مسئله جبری می شود، که می تواند با استفاده از ابزار تئوری گروه بررسی شود. علاوه بر ایجاد یک روش کلی برای مسئله مورد نظر SGA همچنین می تواند به عنوان حالت های خاص، حدهای دقیقا حل پذیر را ایجاد کند. اینها به عنوان تقارن دینامیکی نامیده می شوند و اغلب می توانند با انتخاب مفید پارامترهای مدل بیان شوند. مسائل تقارن دینامیکی تا کنون روی مسائل حالت های مقید و پراکنده متمرکز شده اند. با نگاشت مسائل مکانیک کوانتومی به یک ساختار جبری، تئوری نمایش فورا انرژی های برانگیخته و حالت های ویژه را ایجاد می کند [۷]. باروت[7] و همکارانش در ۱۹۸۷ از $so(4,2)$ بعنوان جبر پتانسیل دینامیکی برای پتانسیل مورس[8] استفاده کردند [۸]، و همچنین لی[9] و کوزنزو[10] از $so(2,1)\sim su(1,1)$ بعنوان تقارن دینامیکی برای پتانسیل اسکارف[11] استفاده نموده اند[۷].

مفهوم جبر پتانسیلی تا حدی شبیه به جبر تبهگنی است به این معنی که عناصر جبر ترازهای تبهگن را که هر چند متعلق به هامیلتونین های متفاوتی هستند را به هم مربوط می کنند. مسائل بحث شده بر حسب مفهوم جبر پتانسیلی در واقع می توانند با استفاده از روش مکانیک کوانتومی ابر تقارنی نیز بررسی شوند[۹]. روش مکانیک کوانتومی ابر تقارنی ابزار مهمی درشاخه های مختلف فیزیک نظری است. به عنوان مثال بررسی دسته ای از سیستم های کوانتومی دقیقا حل پذیر با چنین روشی را می توان در

[1]Cordero
[2]Hojman
[3]Berrondo
[4]Palma
[5]Alhassid
[6]Spectrum Generating Algebra
[7] Barut
[8] Morse
[9] Li
[10] Kusnezov
[11] Scarf

مراجع[۹و۱۰و۱۱] پیدا کرد. اولین اقدام منحصر به فرد در مسیر مکانیک کوانتومی ابرتقارنی توسط شرودینگر[1] انجام شد[۱۲] که روش فاکتورگیری معروفی را مطرح نمود. این روش سپس توسط اینفلد[2] و هیول[3] [۱۳] و دیگران تعمیم یافت. روش فاکتورگیری، روش مفیدی برای محاسبه ویژه مقادیر و روابط بازگشتی است. دراین روش معادله شرودینگر که یک معادله دیفرانسیلی درجه دوم است، به دو عملگر درجه اول که هرمیتی الحاقی یکدیگر هستند، فاکتورگیری می شود. این از ساختاری استنباط می شود که عملگرهای درجه اول حالت های ویژه هامیلتونین های مختلف متناظر با ویژه مقدار انرژی یکسان را به هم مربوط می کنند. اخیرا این روش ها به ساختاری از مسائل دقیقا حل پذیر تعمیم یافته اند. مدل های دقیقا حل پذیر یا پتانسیل های دقیقا حل پذیر، در بررسی بسیاری از سیستم های فیزیکی در ماده چگال، اپتیک کوانتومی و فیزیک حالت جامد مورد استفاده قرار می گیرند. مثال های نوعی در این دسته بزرگ پتانسیل ها در مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی شامل پتانسیل مورس، پتانسیل پوشل-تلر[4] و پتانسیل کولمب می شود. مخصوصا پتانسیل مورس تقریب مناسبی را برای مطالعه ناهماهنگی و گسستگی پیوند مولکول های دواتمی در ترازهای نوسانی ضعیف ایجاد می کند. پتانسیل پوشل-تلر همواره به دلیل خواص کوتاه برد آن مورد بررسی قرار گرفته است و حالت های همدوس تعمیم یافته، خواص غیر خطی و ابرتقارنی آن کاملا مطالعه شده اند[۱۴].

در سال ۱۹۸۱ با کار پیشگامانه ویتن[5] تشخیص داده شد که ابرتقارنی[6] (*SUSY*)، تقارن شامل عملگرهای جابجاشونده و پادجابجاشونده و مربوط کردن فرمیون ها به بوزون ها، می تواند در مکانیک کوانتومی بصورت حالت حدی نظریه میدان استفاده گردد[۱۵].

مفهوم اساسی در ارتباط بین پتانسیل های حل پذیر و *SUSY* نیز توسط جندن اشتاین[7] در ۱۹۸۳ به نام "شکل ناوردایی[8]" بیان شد[۱۶]. به این ترتیب که پتانسیل های سیستم مربوطه شکل ناوردا هستند، هرگاه آنها دارای شکل تابعی یکسان باشند ولی در بعضی پارامترهای عددی متفاوت باشند. توابع موج برای این پتانسیل ها توسط دابروسکا[9] و همکارانش با استفاده از عملگرهای جبرپتانسیلی و همچنین توسط پرتسچ[10] با استفاده از روش معمول استفاده توابع خاص برای حل معادله شرودینگر محاسبه شد.

[1]Schrödinger
[2]Infeld
[3]Hull
[4] Pöschl-Teller
[5]Witten
[6]Supersymmetry
[7]Gendenshtein
[8]Shape-invariance
[9]Dabrowska
[10]Pertsch

مفاهیم ریاضی پتانسیل های شکل ناوردا همچنین در موضوع های دیگری مانند تقریب WKB و فاز بری[1] و فرمولبندی انتگرال مسیر انجام شده است.

روش مشابهی توسط کوردرو و همکارانش در ۱۹۷۱ [۱۷] و همچنین وو[2] و الحسید در۱۹۹۰ [۱۸] ، برخی عملگرها را که به شکل حقیقی سازی یک جبر یا یک گروه، مخصوصا $SO(2,1)$ را تعیین کرده و سپس پتانسیل هایی را بدست آوردند که در معادله شرودینگر مربوطه ظاهر می شوند، و حقیقی سازی آنها از طریق جبر پتانسیلی است. این روش پتانسیل مورس و دو حالت خاص پتانسیل های پوشل-تلر را ایجاد کرد، که برای آنها جبرهای مربوطه قبلا مشخص شده بود. سپس مشخص شد که وو و الحسید از حقیقی سازی عمومی $SO(2,1)$ استفاده نکرده اند، هنگامی که چنین تعمیمی انجام شد، پتانسیل های مربوطه ایجاد شدند که شامل دو دسته از پتانسیل های جنـدن اشتاین می شدند. این پتانسیل ها همراه با پتانسیل مورس، دارای ویژه مقادیر یکسانی هستند. خواص معمول این سه دسته به محاسبه توابع ویژه و ارزیابی عناصر ماتریس تعمیم یافت. همچنین مشخص شده است که این سیستم های ظاهرا متفاوت دارای جبر پتانسیلی یکسانی هستند، همچنین جبرهای دینامیکی آنها محاسبه شده است[۶].

از اینرو در فصل دوم بعضی مفاهیم پایه و نمایش های $so(2,1)$ مطرح می گردد که از این نمایش ها در فصل های بعدی، مخصوصا در فصل چهارم استفاده می شود. در فصل سوم پتانسیل های پوشل-تلر و مورس-روزن را با استفاده از روش های جبری بررسی کرده و ویژه مقادیر و توابع موج آنها محاسبه می شود. سپس از حقیقی سازی خاص جبـر $su(1,1)$ که توسط روش گروه پتانسیلی ایجاد شده، برای استنتاج معادلات دیفرانسیلی درجه دوم چند جمله ای های متعامد استفاده می شود و همچنین عملگر دیفرانسیلی درجه دوم که در معادله دیفرانسیلی این توابع ظاهر می شود را بر حسب عملگر کازیمیر جبر $su(1,1)$ بیان می کنیم، و در انتها با توجه به روش وو و همکارانش [۱۸و۱۹] برای بدست آوردن معادله شرودینگر برای پتانسیل های مختلف، تبدیلات متغیری و تشابهی به مولدهای گروه اعمال می شود. سپس عملگرهای نردبانی J_+ و J_- را ایجاد کرده که می توانند اعضای نامتناهی حالت های پایه را به هم مربوط کنند و از طریق مولدهای نردبانی حاصل، طیف پتانسیل گروهی محاسبه می گردد.
در فصل چهارم نیز با استفاده از روش های تقارن دینامیکی هامیلتونین اسکارف که دارای پتانسیل تناوبی است، مورد بررسی قرار داده و با استفاده از نمایش های گروه متناظر با پتانسیل گروه، ماتریس انتقال، رابطه پاشندگی، جرم موثر و سرعت گروه محاسبه می گردد. در نهایت در فصل پنجم نتیجه گیری و پیشنهادات مطرح می شود.

[1] Berry Phase
[2] Wu

فصل دوم

تعاریف و مفاهیم پایه

۲-۱) مبحث کلی جبرهای لی

گروه های لی[۱] و جبرهای لی[۲] وابسته به آنها نقش عمده ای را در مکانیک کوانتومی بازی می کنند. دامنه کاربرد های آنها تئوری میدان های کوانتومی، تقارن ذرات اولیه و قوانین بقاء توابع خاص، تئوری اندازه حرکت زاویه ای، مطالعات هسته ای و مولکولی و مسائل چند جسمی را در بر می گیرد[۲۰و۲۱و۲۲].

در این بخش بعضی تعاریف و اصطلاحات مربوط به جبرهای لی و نمایـش ها[۳] و حقیقی سازی[۴] آنها مطرح می شود.

۲-۱-۱) تعریف جبر لی

جبـر لـی یک فضای برداری V روی میدان F است و با قانون ترکیب (ضـرب لی) دو تایی که معمولا با $[A,B]$ نمـایـش داده می شود و با خواص زیر مشخص می شود:

$$i)\ [A,B]\in V$$
$$ii)\ [A,B+C]=[A,B]+[A,C]$$
$$iii)\ \alpha[A,B]=[\alpha A,B]=[A,\alpha B]$$
$$iv)\ [A,A]=0$$
$$v)\ [A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0$$

برای هر $\alpha\in F$ و $A,B,C\in V$.

خاصیت (i) بسته بودن جبر لی تحت ضرب لی را بیان می کنند. خواص (ii) و (iii) با اسکالرهای فضای برداری V ترکیب شده و خاصیت دو خطی را ایجاد می کنند، لذا برای ترکیب خطی از بردارها داریم:

$$\left[\sum_i \alpha_i A_i,\sum_i \beta_j B_j\right]=\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j[A_i,B_j] \tag{۲-۱}$$

انواع مختلف جبـر ها می توانند با اعمـال خواص دیگر غیر از (i) و (iii) ایجاد شوند. به عنوان مثال، یک جبر جابجایی پذیر[۵] دارای خاصیـت اضافی $AB=BA$ است و یک جبر شرکت پذیر[۶] دارای خاصیت شرکت پـذیری $A(BC)=(AB)C$ مـی باشـد. بـرای جبر لی خواص اضافی با (iv) و (v) نیز داده می شوند و مشاهده می گردد که جبر لی جابجایی پـذیر نمـی باشـد، زیـرا خاصـیت

[1] Lie groups
[2] Lie algebras
[3] Representations
[4] Realizations
[5] Commutative
[6] Associative

$[A+B,A+B]=0$، خاصیت پادجابجایی $[A,B]=-[A,B]$ را ایجاب می کند و شرکت پذیر نیز نمی باشد. در واقع (۷) با خاصیت شرکت پذیری معمول جایگزین شده و اتحاد ژاکوبی نامیده می شود.

در مکانیک کوانتومی اغلب با جبرهای شرکت پذیر از عملگرها و ماتریس هایی مواجه می شویم که جابجایی پذیر نیستند. جبرهای لی اغلب می توانند از جبرهای شرکت پذیر عملگرها و ماتریس ها ایجاد شوند. در واقع، همه ی جبر های لی که کاربرد فیزیکی دارند، می توانند در این روش ایجاد گردند. بنابراین یک جبر شرکت پذیر، تعریف شده با ضرب AB را می توان از ضرب لی با جابجاگر یا براکت لی A و B بصورت زیر تعریف نمود:

$$[A,B]=AB-BA. \tag{۲-۲}$$

از آنجا که جبر لی دارای ساختار فضای برداری است، می توان مجموعه ی پایه $\{E_i : i=1,\dots,N\}$ را برای جبرلی انتخاب نمود، بعلاوه، بدلیل خاصیت دو خطی (۲-۱)، جبر لی کاملا با تعیین جابجاگرهای این عناصر پایه تعریف می شود:

$$[E_i,E_j]=\sum_k C_{ijk}E_k \qquad \text{و} \qquad i,j,k=1,\dots,N. \tag{۳-۲}$$

این عبارات، روابط جابجایی تعریف شده برای جبر لی هستند و ضرایب C_{ijk} ثابت های ساختار[۱] نامیده می شوند. انتخاب متفاوت پایه ها منجر به مجموعه ی متفاوت ولی معادل ثابت های ساختار می شود. همچنین E_i ها مولد های جبر لی نیز نامیده می شوند[۲۰].

در پایان این مقدمه بسیار کم باید توجه کرد که مجموعه عملگرهایی که با همه ی عناصر جبر لی جابجا می شوند و در مطالعه جبرهای لی کاربرد دارند، عملگرهای کازیمیر[۲] نامیده می شوند. این عملگر ها به جبر لی متعلق نیستند[۲۳] و در بخش های بعدی نمونه هایی از آن برای جبرهای متفاوت ارائه می شود.

۲-۱-۲)حقیقی سازی فیزیکی جبرلی[۳]

وقتی یک جبر لی از طریق تعریف روابط جابجایی (۲-۳) تعریف می شود، یافتن حقیقی سازی فیزیکی مولدها که روابط جابجایی و همچنین یک مسئله فیزیکی را برآورده می کند، یکی از موضوع های مورد علاقه فیزیک دانان است. چنین مجموعه ای از عملگرهای پیوسته حقیقی سازی جبر لی نامیده می شود.

[1] Structure constants
[2] Casimir operators
[3] Physical Realization of a Lie Algebra

معمولا به روش معکوس رفتار می شود، با مجموعه ای از مولدهای پیوسته که تحت جابجایی بسته نیستند (یعنی شرط (I) برآورده نمی شود) شروع کرده و هر عملگر جدیدی به مجموعه، که برای بسته بودن روابط جابجایی نیاز باشد اضافه می شود. با این روش حقیقی سازی بعضی از جبرهای لی بدست می آید. این روش، روشی استاندارد برای ترکیب حقیقی سازی دو جبر لی مختلف در داخل حقیقی سازی جبر لی بزرگتر است.

به عنوان مثال، جبر لی سه بعدی مهمی که اغلب به صورت $so(3)$ یا $su(2)$ بیان می شود را در نظر بگیرید، که در روابط جابجایی تعریف شده می توانند به شکل زیر تعیین شوند:

$$\begin{aligned}[E_1, E_2] &= iE_3,\\ [E_2, E_3] &= iE_1,\\ [E_3, E_1] &= iE_2.\end{aligned} \qquad (۴-۲)$$

حقیقی سازی های معروفی از مولدهای این جبر لی با سه مؤلفه ی بردار اندازه حرکت زاویه ای مداری $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$، سه مؤلفه اسپینی $\vec{S} = 1/2\,\sigma$ بر حسب مـاتـریس های پـائـولی اسپین یا اندازه حرکت زاویه ای کلی یک الکترون $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ ایجاد می شوند. مؤلفه های هر یک از این عملگرهای برداری، در روابط جابجایی تعریف شده (۲-۴) صدق می کنند.

به طور کلی مطابق با هر عملگـر حقیقی سازی از جبر لـی، فضای برداری وجود دارد که این عملگـر ها در آن عمل می کنند. حقیقـی سازی داده شده با $\vec{L}$ باید به صـورت فضـای مجـردی از حالـت ها ی اندازه حـرکـت زاویه ای $|jm>$ که $j = 0,1...$ و $m = -j, -j+1, ..., j$ مشخص می شود و یا حقیقی سازی پیـوسته ای از آنها به صورت تـوابع همـاهنگ کروی $Y_j^m(\theta, j)$ باشد. آنگاه می توان عناصر ماتریس عملگرها را نسبت به این فضای برداری حالت ها در نظر گرفت و این منجر به مفهوم مهم نمایش ماتریسی[1] جبر لی می شود.

۲-۱-۳) نمایش ماتریسی جبر لی

برای یک جبر لی با روابط جابجایی تعریف شده، می توان مولد های E_i را به صورت عملگرهایی در نظر گرفت که روی فضای برداری n بعدی W عمل می کند. اگر $\{|i>; i = 1,..n\}$ مجموعه پایه برای W باشد. آنگاه داریم:

$$E_k|j\rangle = \sum_i |i\rangle\langle i|E_k|j\rangle \qquad ;\quad i,j = 1,...,n \qquad ;k = 1,...,N \qquad (۵-۲)$$

[1] Matrix representation

که $\langle i|E_k|j\rangle$ عناصر ماتریسی E_k است. با نماد گذاری $\vec{E}_k$ به عنوان نمایش ماتریسی E_k، به آسانی با توجه به (۲-۳) می توان نشان داد که:

$$\left[\overrightarrow{E_i},\overrightarrow{E_j}\right]=\sum_k C_{ijk}\overrightarrow{E_k} \qquad (۲-۶)$$

ماتریس های $\vec{E}_i$ نمایش ماتریس جبر لی را ایجاد می کنند، زیرا آنها دارای روابط جابجایی تعریف شده یکسانی هستند. وقتی فضای نمایش دقیقا معین نشده است، اغلب درباره حقیقی سازی جبر لی بحث می شود تا نمایش آن. به عنوان مثال حقیقی سازی (۲-۴) با اسپین $\vec{S}$ یک حقیقی سازی ماتریسی است. زیرا S می تواند در فضاهای اسپینی متفاوتی حاصل از نمایش های با بعد مختلف به کار رود. به عنوان مثال گروه دوران سه بعدی دارای حقیقی سازی ماتریسی مشابهی بر حسب زوایای اولر است که نمایش ماتریسی گروه بوده و می توان نمایش های ماتریسی با هر بعدی داشت. همچنین باید توجه داشت که هر جبر لی متناظر با یک یا چند گروه لی است.

مسـاله دسته بندی همه نمـایش های ماتریسی یک جبر لی مهم ولی دشوار است. اولین مرحله دسته بندی همه نمایش های کاهش ناپذیر[1] است. سپس هر نمایش ماتریسی می تواند با استفاده از نمایش های کاهش ناپذیر به صورت خانه های بلوکی ایجاد شـود. بنابراین برای نمایـش ماتریسی یک جبر لـی همواره می توان با به کار بردن تبدیل تشابهی به همه ماتریـس های شامل مولدها، نمایش ماتریسی معادل آن را بدست آورد. اگر این فرآیند به صورتی انجام شود که همه ماتریس ها دارای ساختار بلوک قطری یکسان باشند، آنگاه گفته می شود که نمایش کاهش پذیر است زیرا ماتریس های بلوکی به شکل نمایش های ماتریسی با بعد کوچکتری از جبر لی هستند. به عنوان مثال اگر E_i به شکل زیر باشد:

$$E_i=\begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & B_i \end{pmatrix},$$

که A_i و B_i به تـرتیب ماتـریس های $j\times j$ و $m\times m$ باشند، آنگاه بررسـی اینکه A_i و همچنین B_i دارای نمـایش ماتریسی هستند، به سادگی امکان پذیر است. اگر چنین تبدیلی با هر تبدیل تشابهی انجام نشود، نمایش کاهش ناپذیر است. به عبـارت دیگر نمایش کاهش نـاپذیر است، اگر فضـای برداری W که عملگـر های E_i روی آن عمل می کنند هیچ زیر فضای بدیهی ای نداشته باشد که به خودشان با همه ی E_i ها (زیر فضاهای ناوردا) نگاشته شوند. از این تعریف در بخش های بعدی برای ایجاد نمایش های کاهش ناپذیر جبر های لی مختلف استفاده می شود[۲۰].

[1] Irreducible representations