دانشگاه تبریز
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی محض، گرایش آنالیز

عنوان

مشخص سازی‌های نوع لیپشیتز برای فضاهای برگمن

استاد راهنما

حمید واعظی

استاد مشاور

حسین امامعلی‌پور

پژوهشگر

عاطفه وظیفه

شهریور ۱۳۹۳

بسم الله الرّحمن الرّحیم

خدایا! تویی سزاوار ستایش های نیکو، و بسیار و بی شمار تو را ستودن، اگر تو را آرزو کنند پس بهترین آرزویی، و اگر به تو امید بندند، بهترین امیدی.
خدایا! درهای نعمت بر من گشودی که زبان به مدح غیر تو نگشایم، و بر این نعمت ها غیر از تو را ستایش نکنم، و زبان را در مدح نومید کنندگان، و آنان که مورد اعتماد نیستند باز نکنم. خداوندا! هر ثناگویی از سوی ستایش شده پاداشی دارد، به تو امید بستم که مرا به سوی ذخائر رحمت و گنج های آمرزش آشنا کنی.
خدایا! این بنده توست که تو را یگانه می خواند، و توحید و یگانگی تو را سزاست، و جز تو کسی را سزاوار این ستایش ها نمی داند. خدایا! مرا به درگاه تو نیازی است که جز فضل تو جبران نکند، و آن نیازمندی را جز عطا و بخشش تو به توانگری مبدّل نگرداند، پس در این مقام رضای خود را به ما عطا فرما، و دست نیاز ما را از دامن غیر خود کوتاه گردان، که تو بر هر چیزی توانایی. .

فرازی از خطبه ۹۱ نهج البلاغه

تقدیم به:

عزیزانم که به زندگیم عشق بخشیدند

پدر عزیزم

و

مادر مهربانم

بنام خدا

و من لَمْ يَشْكُر الْمَخلوق لَمْ يَشْكُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.
در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای **دکتر حمید واعظی** ، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از جناب آقای **دکتر حسین امامعلی‌پور** که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان‌نامه به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم. از جناب آقای **دکتر اصغر رنجبری** که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم.
از تمام معلمان، اساتید و دوستان دوران تحصیلم کمال تشکر و قدردانی را دارم.
از کلیه اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل تحصیل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم
و در پایان از دوست عزیزم خانم محبوبه قیطران که بهترین دوست دوران تحصیلم بودند را تشکر می‌کنم.

عاطفه وظیفه
شهریور ۱۳۹۳

نام خانوادگی دانشجو: وظیفه نام: عاطفه
عنوان: مشخص سازی‌های نوع لیپشیتز برای فضاهای برگمن
استاد راهنما : حمید واعظی استاد مشاور : حسین امامعلی‌پور
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز دانشگاه تبریز دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ۱۳۹۳ تعداد صفحات: ۵۶
کلید واژه‌ها: فضاهای برگمن، متر شبه هذلولوی، متر هذلولوی، شرایط لیشیتز.

چکیده

ما در اینجا مشخصه های جدیدی را برای فضاهای برگمن با وزن استاندارد به وسیله‌ی شرایط نوع لیپشیتز، در متر اقلیدسی، متر هذلولوی و شبه هذلولوی بدست می‌آوریم. به عنوان یک نتیجه، قضایای جانشانی بهینه زمانی که تابع تحلیلی بر روی دیسک واحد به طور متقارن به دیسک دوگانه بالا برده می‌شود، ثابت خواهیم نمود.

فهرست مطالب

پیشگفتار

در این پایان‌نامه با استفاده از سه متر مختلف و با بکار بردن خواص آنها مشخص سازی‌های جدیدی از فضاهای برگمن برحسب شرایط از نوع لیپشیتز بدست خواهیم آورد. سپس عملگر بالابر متقارن را در نظر گرفته و با بکار بردن نتایج حاصل از مشخص سازی فضاهای برگمن، این عملگر را روی فضای برگمن وزن‌دار $A^p_\alpha(\mathbb{D})$ مورد مطالعه قرار داده و برخی از خواص آن را مطالعه خواهیم نمود.
فضاهای برگمن وزن‌دار توسط دورن [۱] ، هدن مالم [۲] و کورن بلوم [۳] در [۱] و [۶] مورد بررسی قرار گرفته است. اثر عملگر قطری روی فضاهای هاردی و برگمن از پلی دیسک توسط دورن، شیلدز [۴] ، هورو ویتز [۵] و اوبرلین [۶] در [۲] و [۹] مورد مطالعه قرار گرفته است.
سه متر مختلف روی دیسک واحد $\mathbb{D}$ که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار خواهند گرفت بصورت زیر می‌باشند:

۱)متر معمول اقلیدسی بصورت

$$| z - w | \quad , \quad z, w \in \mathbb{D}$$

[۱] P. Duren

[۲] H. Hedenmalm

[۳] B. Korenblum

[۴] A. Shields

[۵] C. Horowitz

[۶] M. Oberlin

۲)متر شبه هذلولوی روی $\mathbb{D}$ بصورت

$$\rho(z,w) = \mid \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \mid \quad , \quad z,w \in \mathbb{D}$$

۳)متر هذلولوی روی $\mathbb{D}$ توسط

$$\beta(z,w) = \frac{1}{2}\, log\, \frac{1+\rho(z,w)}{1-\rho(z,w)} \quad , \quad z,w \in \mathbb{D}$$

تعریف می‌شوند.

متریک های هذلولوی و شبه هذلولوی و مفاهیم مربوط به آنها توسط گارنت [7] در [۳] همچنین توسط هدن مالم و زو [8] در [۶] و [۱۹] مورد مطالعه قرار گرفته است.

$A^p_\alpha(\mathbb{D})$ ، برای $p > 0$ و $\alpha > -1$ را فضای همه توابع تحلیلی f در $\mathbb{D}$ تعریف می‌کنیم به طوری که

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z) < \infty$$

که در آن dA_α اندازه مساحت وزن‌دار است که به صورت

$$dA_\alpha(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)dA(z) \quad \forall \alpha > -1$$

تعریف می‌شود.

$A^p_\alpha(\mathbb{D})$ را فضای برگمن وزن‌دار با وزن استاندارد می‌نامیم.

قضیه اصلی که در این پایان‌نامه آن را ثابت خواهیم کرد به صورت زیر است

قضیه: فرض کنید $p > 0$ و $\alpha > -1$ و f در $\mathbb{D}$ تحلیلی است. آنگاه حالات زیر با یکدیگر معادل هستند:

۱. f متعلق است به $A^p_\alpha(\mathbb{D})$

۲. تابع پیوسته $g \in L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ چنان موجود است که برای هر z و w در $\mathbb{D}$ داریم

$$\mid f(z) - f(w) \mid \leq \rho(z,w)\,(g(z)+g(w))$$

۳. تابع پیوسته $g \in L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ چنان موجود است که برای هر z و w در $\mathbb{D}$ داریم

$$\mid f(z) - f(w) \mid \leq \beta(z,w)\,(g(z)+g(w))$$

[7] J. Garnett

[8] K. Zhu

۴. تابع پیوسته $g \in L^p(\mathbb{D}, dA_{\alpha+p})$ چنان موجود است که برای هر z و w در $\mathbb{D}$ داریم

$$| f(z) - f(w) | \leq | z - w | (g(z) + g(w))$$

قضیه فوق را در سه قضیه جداگانه مطرح کرده و ثابت خواهیم کرد.
مشخصه‌های مشابه برای فضاهای هاردی-سوبولوف توسط هاجلاس [۹] در [۴] و [۵] مورد بررسی قرار گرفته است. علاوه بر آن در این زمینه می‌توان به [۱۰] مراجعه کرد. انگیزه نگارش پایان‌نامه کنونی از مرجع [۱۰] نشأت می‌گیرد. به عنوان مورد دیگری که در جهت رسیدن به نتیجه‌ی مطلوب به ما انگیزه داد یادآوری می‌کنیم که فضای بلاک کلاسیک $\mathfrak{B}$ شامل توابع تحلیلی f در $\mathbb{D}$ است چنان که

$$\sup\{(1 - |z|^2)|f'(z)| : z \in \mathbb{D}\} < \infty$$

و همچنین دارای مشخصه نوع لیپشیتز می‌باشد. به طور دقیق‌تر یک تابع تحلیلی f در $\mathbb{D}$ به $\mathfrak{B}$ متعلق است اگر و تنها اگر ثابت C وجود داشته باشد به طوری که برای هر z و w متعلق به $\mathbb{D}$ داشته باشیم

$$|f(z) - f(w)| \leq C\beta(z, w).$$

یا می‌توان گفت یک تابع تحلیلی f در $\mathbb{D}$ به $\mathfrak{B}$ تعلق دارد اگر و تنها اگر یک تابع پیوسته g در $L^\infty(\mathbb{D})$ چنان موجود باشد که برای هر z و w متعلق به $\mathbb{D}$ داشته باشیم

$$|f(z) - f(w)| \leq \beta(z, w)(g(z) + g(w)).$$

این پایان‌نامه بر اساس مرجع [۱۷] تهیه و تنظیم شده و به صورت زیر پایه‌ریزی شده است:
- فصل اوّل این پایان‌نامه شامل برخی تعاریف و مفاهیم اولیه مربوط به فضاهای برگمن می‌باشد.
- در فصل دوم قضیه اصلی پایان‌نامه را در سه قضیه جداگانه مطرح کرده و اثبات خواهیم کرد.
- در فصل سوم عملگر بالابر متقارن را معرفی کرده سپس این عملگر را روی فضای برگمن وزن‌دار مطالعه خواهیم نمود.
- درفصل چهارم مطالب بیان شده را به گوی واحد در فضای $\mathbb{C}^n$ تعمیم داده و مشابه قضیه اصلی را برای تابع تحلیلی در گوی واحد تعمیم یافته اثبات خواهیم کرد.

[۹] P. Hajlasz

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

مقدمه

فصل نخست پایان‌نامه مروری بر مفاهیم وقضایای ارائه شده برای مفاهیم مورد نیاز فصلهای آتی است. در بخش نخست برخی از قضایای ارائه شده بدون اثبات بیان خواهند شد چرا که هدف یادآوری مفاهیمی است که بعداً به آن نیاز خواهد شد. در نهایت متر شبه هذلولوی و متر برگمن معرفی شده و خواص آنها را بررسی خواهیم کرد.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم مورد نیاز

تعریف ۱.۱.۱. تابعی حقیقی مقدار که بر روی مجموعه ای از رویدادها در فضای احتمال تعریف می‌شود و در خصوصیات مفهوم اندازه مانند شمارای جمعی صدق می کند اندازه احتمال [۱] نامیده می‌شود.
یک اندازه احتمال به ازای یک ورودی برابر کل فضای احتمال، مقدار یک را به آن اختصاص می‌دهد.

تعریف ۲.۱.۱. توابع هولومورفیک [۲] یا توابع تحلیلی توابعی هستند که بر روی یک زیر مجموعه باز از صفحه مختلط $\mathbb{C}$ تعریف شده‌اند با مقادیری در $\mathbb{C}$ که در هر نقطه مشتق مختلط دارند.
تحلیلی بودن یک شرط قویتر از مشتق پذیری مختلط است و آن دلالت بر این دارد که تابع بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است و می‌تواند با سری تیلورش نشان داده شود.
"تحلیلی در نقطه a " به معنی نه تنها مشتق‌پذیر در a بلکه مشتق‌پذیر در هر جا درون یک دیسک به مرکز a در صفحه مختلط است.

تعریف ۳.۱.۱. تابع دو تحلیلی [۳] ، یک تابع تحلیلی دوسویی است که معکوس آن نیز تحلیلی می باشد. در تعریفی دقیق‌تر، یک تابع دو تحلیلی تابعی مانند ϕ است که بر روی زیرمجموعه باز $U \subseteq \mathbb{C}^n$ تعریف شده و تابعی یک به یک و تحلیلی است. به طوری که تصویر این تابع مجموعه باز

[۱] Probability measure

[۲] Holomorfic functions

[۳] Biholomorphic function

$V \subset \mathbb{C}^n$ می باشد. همچنین معکوس این تابع یعنی $\phi^{-1} : V \to U$ نیز تحلیلی است.

تعریف ۴.۱.۱. دو چند جمله ایی $p_n(t)$ و $p_m(t)$ را در فاصله (a, b) دو چند جمله‌ایی متعامد [۴] نامند هرگاه

$$\int_a^b p_n(t).p_m(t)dt = 0$$

قضیه ۵.۱.۱. ***قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال.*** *هرگاه f تابعی نتگرال‌پذیر بر $[a, b]$ و تابع مشتق‌پذیر F بر $[a, b]$ چنان باشد که $F' = f$ آنگاه*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

برهان. ر.ک. [۱۳]. □

قضیه ۶.۱.۱. ***قضیه فوبینی.*** *فرض کنید $(X, \sum_x, \mu)$ و $(Y, \sum_y, \lambda)$ دو فضای اندازه‌پذیر با اندازه σ -متناهی و f یک تابع $(\sum_x \times \sum_y)$ -اندازه‌پذیر بر X باشد.*

۱) هرگاه $0 \le f \le \infty$ ، $f_x(y) = f(x, y)$ و $f^y = f(x, y)$ آنگاه

(i) اگر $\varphi(x) = \int_Y f_x d\lambda$ و $\psi(y) = \int_X f^y d\mu$ ، آنگاه φ ، $\sum_x$ -اندازه‌پذیر و ψ ، $\sum_y$ -اندازه‌پذیر هستند.

(ii)

$$\int_X \varphi d\mu = \int_{X\times Y} f d(\mu \times \lambda) = \int_Y \psi d\lambda$$

۲) هرگاه f مختلط باشد و

$$\int_X \int_Y |f|_x d\lambda d\mu < \infty$$

آنگاه $f \in L^1(\mu \times \lambda)$

۳) هرگاه $f \in L^1(\mu \times \lambda)$ آنگاه تقریباً به ازای هر $x \in X$ ، $f_x \in L^1(\lambda)$ و به ازای تقریباً هر $y \in Y$ ، $f^y \in L^1(\mu)$ می‌باشند. توابع φ و ψ که تقریباً همه جا با (i) تعریف شده‌اند به ترتیب در $L^1(\mu)$ و $L^1(\lambda)$ قرار دارند و رابطه‌ی (ii) برقرار می‌باشد.

---
[۴] Orthogonal

برهان. ر.ک. [۱۲]. □

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید X و Y فضاهای نرمدار [۵] باشند. عملگر

$$T : \mathcal{D}(T) \subset X \to Y$$

یک عملگر خطی [۶] بسته است هرگاه گراف [۷] T یعنی

$$G(T) = \{(x, Tx) \mid x \in \mathcal{D}(T)\}$$

در فضای نرمدار $X \times Y$ بسته باشد.

قضیه ۸.۱.۱. ***قضیه گراف بسته*** *. فرض کنید X و Y فضاهای باناخ [۸] باشند و عملگر $T : \mathcal{D}(T) \subset X \to Y$ ، عملگر خطی بسته باشد. اگر $\mathcal{D}(T)$ بسته باشد آنگاه T کراندار [۹] است.*

برهان. ر.ک. [۱۱]. □

تعریف ۹.۱.۱. بردار $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n})$ را گرادیان تابع n متغیره f نامیده و با نماد ∇f نشان می‌دهیم.

$$\nabla f(x_1, ..., x_n) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n})$$

قضیه ۱۰.۱.۱. ***قضیه گرادیان.*** *فرض کنیم φ تابعی نرده‌ایی باشد. در آن صورت رابطه زیر برقرار است*

$$\varphi(q) - \varphi(p) = \int_L \nabla \varphi dx$$

که در آن $\nabla\varphi$ گرادیان تابع φ بوده و p و q به ترتیب نقاط ابتدایی و انتهایی منحنی L هستند.

تعریف ۱۱.۱.۱. به مجموعه A با بستار فشرده، فشرده نسبی [۱۰] می‌گویند.

---

[۵] Normed spaces

[۶] Linear operator

[۷] Graph

[۸] Banach spaces

[۹] Bounded

[۱۰] Relatively compact

۲.۱ نگاشت دو خطی(نگاشت موبیوس) و برخی خواص آن

تعریف ۱.۲.۱. نگاشت دو خطی(نگاشت موبیوس [۱۱]) مشخص کننده‌ی همه‌ی نگاشتهایی است که دایره واحد را به دایره واحد می‌نگارد و ترکیب دو نگاشتی است که ابتدا نگاشت اول دایره را به نیم صفحه‌ی بالایی می‌نگارد و بعد نگاشت دوم نیم صفحه‌ی بالایی را به دایره می نگارد و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$w^*(z) = k\frac{z-\gamma}{\overline{\gamma}z-۱} \quad , \quad |k| = ۱ \quad , \quad |\gamma| < ۱$$

اگر $|\gamma| > ۱$ در این صورت نمایش همه تبدیلات دو خطی است که درون قرص واحد را به خارج قرص واحد می نگارد.

تعریف ۲.۲.۱. نگاشت ϕ_z که به صورت زیر تعریف می‌شود یک نگاشت موبیوس است.

$$\phi_z(w) = \frac{z-w}{۱-\overline{z}w}$$

روشن است که ϕ_z در $\mathbb{D}$ تحلیلی است. چون

$$۱-\overline{z}w = ۰ \Longrightarrow w = \frac{۱}{\overline{z}} \notin \mathbb{D}$$

$$\begin{aligned}\frac{۱}{\overline{z}} = \frac{۱}{re^{-i\theta}} \Longrightarrow |\frac{۱}{\overline{z}}| &= |\frac{۱}{re^{-i\theta}}| \\ &= \frac{۱}{r} > ۱.\end{aligned}$$

[۱۱] Möbius Mapping

خواص نگاشت فوق

الف) ϕ_z خاصیت برگشت [۱۲] دارد.

برهان.

$$\begin{aligned}\phi_z(\phi_z(w)) &= \phi_z(\frac{z-w}{1-\overline{z}w}) \\ &= \frac{z-\frac{z-w}{1-\overline{z}w}}{1-\overline{z}\frac{z-w}{1-\overline{z}w}} \\ &= \frac{\frac{z-z\overline{z}w-z+w}{1-\overline{z}w}}{\frac{1-\overline{z}w-z\overline{z}+\overline{z}w}{1-\overline{z}w}} \\ &= \frac{w(1-z\overline{z})}{1-z\overline{z}} \\ &= w.\end{aligned}$$

□

ب) $\phi_z(\partial\mathbb{D}) = \partial(\mathbb{D})$

برهان. چون اگر $w \in \partial\mathbb{D}$ در این صورت داریم

$$w = e^{i\theta} : |\phi_z(e^{i\theta})| = 1 \Rightarrow \phi_z(\partial\mathbb{D}) \subseteq \partial(\mathbb{D})$$

از طرفی طبق بند(الف) چون ϕ_z وارون خودش می‌باشد داریم

$$\phi_z^{-1}(\phi_z(\partial\mathbb{D})) \subseteq \phi_z^{-1}(\partial\mathbb{D})$$

$$\Rightarrow \partial\mathbb{D} \subseteq \phi_z(\partial\mathbb{D})$$

از دو رابطه فوق نتیجه می‌شود

$$\phi_z(\partial\mathbb{D}) = \partial(\mathbb{D}).$$

□

[۱۲] Involution

۳.۱ مفاهیم پایه برای فضاهای برگمن

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید $\mathbb{D}$ دیسک واحد [۱۳] باز در $\mathbb{C}$ باشد. برای هر $\alpha > -۱$ اندازه‌ی مساحت وزن‌دار [۱۴] را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$dA_\alpha(z) = (\alpha + ۱)(۱ - |z|^۲)^\alpha dA(z)$$

که در آن dA اندازه مساحت نرمال شده [۱۵] روی $\mathbb{D}$ است.

نکته ۲.۳.۱. dA_α یک اندازه احتمال روی $\mathbb{D}$ است.

زیرا

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} dA_\alpha(z) &= \int_{\mathbb{D}} (\alpha + ۱)(۱ - |z|^۲)^\alpha \frac{dA(z)}{\pi} \\
&= \frac{۱}{\pi} \int_۰^۱ \int_۰^{۲\pi} r(\alpha + ۱)(۱ - |re^{i\theta}|^۲)^\alpha d\theta dr \\
&= \frac{۱}{\pi} \int_۰^۱ \int_۰^{۲\pi} r(\alpha + ۱)(۱ - r^۲)^\alpha d\theta dr \\
&= \frac{۱}{\pi} \int_۰^۱ r(\alpha + ۱)(۱ - r^۲)^\alpha ۲\pi dr \\
&= -(\alpha + ۱)\frac{(۱ - r^۲)^{\alpha+۱}}{\alpha + ۱}\Big|_۰^۱ \\
&= ۱.
\end{aligned}$$

تعریف ۳.۳.۱. برای هر $p > ۰$ و $\alpha > -۱$ ، A_α^p را فضای توابع تحلیلی f روی $\mathbb{D}$ به طوری که

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z) < \infty$$

تعریف می‌کنیم که فضای برگمن [۱۶] وزندار با وزن استاندارد نامیده می‌شود.

---

[۱۳] Unit disk

[۱۴] Weighted area measure

[۱۵] Normalized

[۱۶] Bergman space

قضیه ۴.۳.۱. *به ازای هر $1 \leq p \leq +\infty$ فضای برگمن یک فضای باناخ است.*

برهان. ر.ک. [۱۸]. □

تعریف ۵.۳.۱. کرنل [۱۷] فضای برگمن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$k(z,w) = \frac{1}{(1 - z\overline{w})^2} \quad , \quad z, w \in \mathbb{D}$$

۴.۱ متر شبه هذلولوی و خواص آن

تعریف ۱.۴.۱. متر شبه هذلولوی [۱۸] روی دیسک واحد به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\rho(z,w) = |\phi_z(w)| \quad , \quad \phi_z(w) = \frac{z - w}{1 - \overline{z}w} \quad , \quad z, w \in \mathbb{D}$$

خواص متر شبه هذلولوی

۱) ρ تحت هر عضو گروه موبیوس پایاست.

$$\forall \phi \in Aut(\mathbb{D}), \forall z, w \in \mathbb{D} : \rho(\phi(z), \phi(w)) = \rho(z, w)$$

برهان.

$$\begin{aligned}
\rho(\phi_a(z), \phi_a(w)) &= \rho(\frac{a - z}{1 - \overline{a}z}, \frac{a - w}{1 - \overline{a}w}) \\
&= |\frac{\frac{a-z}{1-\overline{a}z} - \frac{a-w}{1-\overline{a}w}}{1 - \overline{\frac{a-z}{1-\overline{a}z}}\frac{a-w}{1-\overline{a}w}}| \\
&= \frac{(1 - a\overline{a})(w - z)(1 - a\overline{z})}{(1 - \overline{a}z)(1 - \overline{z}w)(1 - a\overline{a})} \\
&= |\frac{z - w}{\overline{z}w - 1}||\frac{1 - a\overline{z}}{1 - \overline{a}z}| \\
&= |\frac{z - w}{1 - \overline{z}w}| \\
&= \rho(z, w).
\end{aligned}$$

---

[۱۷] Kernel

[۱۸] Psedo-hyperbolic

□

۲)

$$\forall z,w\in\mathbb{D}: 1-\left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right|^{2}=\frac{(1-|z|^{2})(1-|w|^{2})}{|1-\overline{z}w|^{2}}$$

برهان. با توجه به اینکه می‌دانیم $z\overline{z}=|z|^{2}$

$$\begin{aligned}
1-\left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right|^{2} &= 1-\frac{|z-w|^{2}}{|1-\overline{z}w|^{2}}\\
&=\frac{|1-\overline{z}w|^{2}-|z-w|^{2}}{|1-\overline{z}w|^{2}}\\
&=\frac{(1-\overline{z}w)(1-z\overline{w})-(z-w)(\overline{z}-\overline{w})}{|1-\overline{z}w|^{2}}\\
&=\frac{(1-w\overline{w})(1-z\overline{z})}{|1-\overline{z}w|^{2}}\\
&=\frac{(1-|w|^{2})-(1-|z|^{2})}{|1-\overline{z}w|^{2}}.
\end{aligned}$$

□

لم ۲.۴.۱. *ρ یک متر روی $\mathbb{D}$ می‌باشد.*

برهان. داریم

$1)\rho(z,w)\geq 0$

با توجه به تعریف متر شبه هذلولوی بدیهی است.

$2)\rho(z,w)=0\Rightarrow z=w$

زیرا

$$\left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right|=0\Leftrightarrow |z-w|=0$$

$$\Leftrightarrow z=w.$$

$$۳)\rho(z,w)=\rho(w,z)$$

زیرا

$$\begin{aligned}\rho(z,w)&=|\frac{z-w}{۱-\overline{z}w}|\\&=\frac{|z-w|}{|۱-\overline{z}w|}\\&=\frac{|z-w|}{\overline{|۱-\overline{z}w|}}\\&=\frac{|w-z|}{|۱-\overline{w}z|}\\&=\rho(w,z).\end{aligned}$$

$$۴)\rho(z,a)\leq\rho(z,w)+\rho(w,a)$$

برای اثبات نامساوی فوق ابتدا نامساوی زیر را ثابت می‌کنیم

$$\frac{|\rho(z,w)-\rho(w,a)|}{۱-\rho(z,w)\rho(w,a)}\leq\rho(z,a)\leq\frac{\rho(z,w)+\rho(w,a)}{۱+\rho(z,w)\rho(w,a)}$$

اثبات نامساوی فوق

چون ρ تحت اعضای گروه موبیوس پایاست پس فرض کنید $w=۰$.

$$\rho(z,۰)=|z|$$

پس داریم

$$\frac{||z|-|a||}{۱-|z||a|}\leq|\frac{z-a}{۱-\overline{z}a}|\leq\frac{|z|+|a|}{۱+|z||a|}$$

حال فرض کنید $a\in\mathbb{R}^+$ و $|z|=r<a$ در این صورت نامساوی فوق به صورت زیر برقرار است

$$\frac{|r-a|}{۱-ra}\leq|\frac{z-a}{a-\overline{z}a}|\leq\frac{r+a}{۱+ra}$$

$$\frac{a-r}{۱-ra}\leq|\frac{z-a}{۱-\overline{z}a}|\leq\frac{a+r}{۱+ra}$$

پس

$$\frac{a-r}{۱-ar}\leq|\phi_a(z)|\leq\frac{a+r}{۱+ar}\quad(*)$$

حال در نظر بگیرید

$$A = se^{i\theta} \quad , \quad z_1 = ze^{-i\theta}$$

از برقراری رابطه (*) نتیجه می‌شود

$$\frac{||z_1| - |s||}{1 - |z_1||s|} \leq |\frac{z_1 - s}{1 - \overline{z_1}s}| \leq \frac{|z_1| + |s|}{1 + |z_1||s|}$$

چون

$$|z_1 - s| = |z - A|$$

و

$$|1 - \overline{z_1}s| = |1 - \overline{z}A|$$

هم چنین

$$|z_1| = |z| \quad , \quad |A| = |s|$$

پس داریم

$$\frac{||z| - |A||}{1 - |z||A|} \leq |\frac{z - A}{1 - zA}| \leq \frac{|z| + |A|}{1 + |z||A|}$$

لذا حکم برای هر $a \in \mathbb{C}$ برقرار است.

حال نامساوی مثلثی برای متر شبه هذلولوی را می‌توان از نامساوی مذکور استنتاج کرد.

$$\rho(z, a) \leq \frac{\rho(z, w) + \rho(w, a)}{1 + \rho(z, w)\rho(w, a)} \leq \rho(z, w) + \rho(w, a).$$

□

۵.۱ متر هذلولوی [19] و خواص آن

قرار می‌دهیم $H(z) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log k(z, z)$ که در آن $k(z, w)$ هسته برگمن بصورت

$$k(z, w) = \frac{1}{(1 - z\overline{w})^2} \quad , \quad z, w \in \mathbb{D}$$

[19] Hyperbolic