



دانشکده مهندسی مکانیک

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
گرایش طراحی کاربردی

تخمین مسیر شکست در ورقی با ترک مرکزی

توسط:

سید نصیرالدین میرلوحی

استاد راهنما:

دکتر مجیدرضا آیت اللهی

پاییز ۸۵

چکیده

در بسیاری از سازه ها و قطعات مهندسی به واسطه فرایندهای نادرست ساخت و بعضی از عملیات مکانیکی، ترکهای مویی ایجاد می شود. معمولا قطعات ترک دار دارای هندسه های پیچیده ای می باشند و تحت شرایط بارگذاری مختلف قرار می گیرند. از سوی دیگر میزان خسارت ناشی از شکست ترد بستگی زیادی به مسیر رشد ترک داشته و بنابراین تعیین مسیر رشد ترک در قطعات ترک دار می تواند نقش مهمی در تخمین میزان صدمات وارده به قطعه مهندسی یا سازه تحت بار گذاری ایفاء نماید.

ترک مرکزی از موارد رایج در قطعات مهندسی معیوب می باشد. برای تخمین مسیر رشد ترک های مرکزی از دو روش عمده استفاده می شود.

روش اول بهره گیری از شرایط آستانه شکست در قطعه می باشد. در این روش بدون در نظر گرفتن رشد تدریجی برای ترک، مسیر رشد ترک بر اساس توزیع پارامترهای مکانیکی مانند تنش، کرنش و مشابه آن درست در آستانه شکست تخمین زده می شود. در این پایان نامه با بهره گیری از معیار ماکزیمم تنش محیطی و معیار ماکزیمم کرنش محیطی نمونه های از پیش شکسته شده مورد بررسی قرار می گیرد. نمونه های مذکور شامل دو سری نمونه از جنس ماده ترد PMMA می باشد که مسیر های شکست در آن در مراجع موجود ارائه شده است. همچنین همین روش (روش تخمین مسیر رشد ترک بر اساس شرایط تنش کرنش اطراف ترک در آستانه شکست) برای پیش بینی مسیر رشد ترک در نمونه سوم به کار می رود. نمونه سوم شامل پنج قطعه دارای ترک زاویه دار مرکزی می باشد. نمونه های فوق با زوایای معین و متفاوت از یکدیگر شرایط بارگذاری مد ترکیبی را ایجاد می نماید.

روش دوم، روش رشد نموی ترک می باشد. در این روش بر اساس یکی از پارامترهای مهم مکانیکی و با انتخاب نمو معینی برای هر مرحله از رشد ترک، هندسه ترک مرتبا اصلاح می شود و طول آن بر مبنای شرایط پارامتر مکانیکی انتخاب شده مرتبا افزایش می یابد. در این پایان نامه با بهره گیری از مدلسازی اجزاء محدود روش رشد نموی ترک بکار گرفته می شود. بنابراین یکی از نرم افزارهای پیشرفته برای گسترش ترک انتخاب شده و توسط آن مدل سازی نمونه هایی که مسیر های رشد ترک در آن از پیش معلوم است انجام می گیرد.

هم زمان با پیش بینی مسیر رشد ترک توسط دو روش فوق مقایسه بین مسیر های تخمینی و تجربی انجام می پذیرد و پس از بحث و بررسی نتایج حاصله جمع بندی و نتیجه گیری نهایی ارائه می گردد.

فصل اول

مقدمه

فصل اول : مقدمه

میزان خسارت ناشی از شکست ترد می‌تواند بستگی قابل ملاحظه‌ای به مسیر رشد ترک داشته باشد و بنابراین تعیین مسیر رشد ترک در قطعات ترکدار می‌تواند نقش مهمی در تخمین نوع آسیب‌ها و میزان صدمات وارده به سازه یا قطعه مهندسی ایفا نماید. به دلایل فوق تبیین روشهای تئوری مناسب جهت تخمین مسیر شکست در قطعات و سازه‌های ترکدار از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. علیرغم پیچیدگیهای قطعات مهندسی بکارگیری تئوریه‌ها از طریق شبیه‌سازی مفاهیم در ساخت قطعات مورد آزمایش امکان پذیر شده است. نمونه‌ای از این روشهای تحقیقاتی استفاده از تئوریه‌های مکانیک شکست در تخمین مسیر رشد ترک مرکزی زاویه دار و ساده است. این روش تحقیقاتی منجر به امکان بسط سریع تئوریه‌های موجود و بکارگیری آنها در مسائل مهندسی شده است. کاهش هزینه‌های بازرسی از جمله مزایای دیگر این روشها است. از سوی دیگر این ساده‌سازیهای مفهومی و شبیه‌سازیها، محدودیتهایی را در حیطه واقعیت منجر شده و موجب خطاهایی نیز می‌گردد ولی حقیقت آن است که بسیاری از مشکلات موجود در قطعات مهندسی ترکدار یا بسیار شبیه به نمونه‌های تحقیقاتی است و یا با تقریب خوبی پاسخ سوالات را ارائه می‌نماید.

برای حل مسائل فوق و موفقیت در تخمین مسیر رشد ترک یکی از مباحث مهم مهندسی مکانیک یعنی مکانیک شکست در حالت الاستیک خطی مطرح می‌شود. مکانیک شکست الاستیک خطی شاخه‌ای از مکانیک شکست می‌باشد که شکست و واماندگی را در مواردی بررسی می‌نماید که اندازه ناحیه تغییر شکل پلاستیک به وجود آمده در نوک ترکهای موجود در این مواد، در مقایسه با طول ترک بسیار ناچیز می‌باشد. به تعبیر دیگر عمدتاً از مکانیک شکست الاستیک خطی، برای مواد ترد و شکننده استفاده می‌شود. یکی از کاربردهای عملی مکانیک شکست، تشخیص لحظه شروع رشد ترک و همچنین مسیر رشد آن می‌باشد. محققان برای پیش‌بینی لحظه شروع رشد ترک و همچنین تعیین جهت گسترش آن در یک قطعه تحت بارگذاری روشهایی را با استفاده از میدان تنش و کرنش به وجود آمده در اطراف نوک ترک، ارائه نموده‌اند. بسط سری میدان‌های تنش و کرنش اطراف ترک شامل بی‌نهایت ترم می‌باشد، در حالی که برای پیش‌بینی لحظه شروع رشد ترک (تخمین بار بحرانی شکست) و تعیین مسیر گسترش آن، معمولاً از ترمهای مرتبه بالاتر (ترمهای غیر تکین) صرف نظر شده است. مودهای بارگذاری در یک قطعه مهندسی به طور جداگانه و مودهای ترکیبی از جمله مواردی است که توسط مکانیک شکست الاستیک خطی طرح و بررسی می‌گردد. نکته دیگر آنکه عمدتاً از میدان‌های تنش و کرنش بوجود آمده در اطراف نوک ترک برای پیش‌بینی لحظه شروع رشد و جهت گسترش اولیه ترک استفاده می‌شود و پیش‌بینی مسیر رشد ترک با استفاده از میدان‌های تنش و کرنش اطراف نوک ترک، کمتر مورد بررسی

قرار گرفته است. مطالعات انجام گرفته جهت تعیین مسیر گسترش به دو روش عمده زیر منتهی شده است.

روش شرایط آستانه شکست:

در این روش بدون در نظر گرفتن هیچ گونه رشد تدریجی برای ترک، مسیر رشد ترک بر اساس توزیع پارامترهای مکانیکی مانند تنش، کرنش و مشابه آن درست در آستانه شکست تخمین زده می شود.

روش رشد نموی (مرحله ای):

در این روش رشد تدریجی ترک بر اساس یکی از پارامترهای مهم مکانیکی مانند دانسیته انرژی کرنشی، نرخ آزادسازی انرژی یا ضریب شدت تنش معادل مدل سازی می شود. به این منظور ضمن انتخاب نمو معینی برای هر مرحله از رشد ترک، هندسه ترک همواره در حال اصلاح بوده، طول آن بر مبنای شرایط بحرانی پارامترهای مکانیکی فوق الذکر مرتبا افزایش می یابد. با توجه به خارج شدن قطعه ترکدار از حالت ساده اولیه و تغییر دائمی شکل ترک در آن، استفاده از روشهای عددی مانند روش اجزاء محدود در این گونه مدلسازی اجتناب ناپذیر به نظر می رسد و با پیگیری هندسی ترک در طول رشد تدریجی آن، مسیر شکست در قطعه تخمین زده می شود.

در این پایان نامه با توجه به استفاده از معیارهای شکست موجود در تخمین مسیر رشد ترک، اهداف زیر دنبال می شود. اول آن که با بهره گیری از مفهوم روش آستانه شکست، از معیار ماکزیمم تنش محیطی (M.T.S) و معیار ماکزیمم کرنش محیطی (M.T.SN) استفاده می شود. پس از آن بسط سری ویلیامز برای میادین تنش و کرنش اطراف نوک ترک تا شش ترم مطرح می گردد. با استفاده از سری موجود و معیارهای فوق الذکر مسیر رشد ترک در نمونه های موجود تخمین زده می شود. این تخمین مسیر به تفکیک با ترم تکین موجود در سری و سپس مجموع دو جمله اول و به همین ترتیب تا مجموع شش جمله از سری انجام می پذیرد. نتایج آزمایشگاهی برای دو سری نمونه از یک ماده ترد که در حالت مود I بارگذاری در حالت بار تک محوره و بار دو محوره قرار گرفته و مسیر شکست آنها ارائه شده موجود است. همچنین نتایج آزمایشگاهی (مسیر شکست تجربی) منبع دیگری در حالت بارگذاری مود ترکیبی برای ۵ قطعه دارای ترک زاویه دار مرکزی موجود می باشد. پس از بکارگیری میدانهای تنش و کرنش اطراف نوک ترک مسیر رشد تخمینی توسط یک ترم و مجموع شش ترم از سری تنش یا کرنش با مسیر آزمایشگاهی مقایسه شده و مورد بحث قرار می گیرد.

دومین هدف عمده این پایان نامه تخمین مسیر با استفاده از روش رشد نموی و بهره گیری از روش اجزاء محدود و نرم افزار متناسب می باشد. نتایج اجزاء محدود برای ۲ سری قطعه تحت بارگذاری در حالت مود I بارگذاری بدست می آید و سپس نتایج حاصله با نتایج آزمایشگاهی موجود مقایسه شده و

مورد بحث قرار می گیرد. نتایج حاصل از روش اجزاء محدود برای ۵ نمونه موجود در حالت مود ترکیبی نیز با نتایج آزمایشگاهی موجود مقایسه شده و پیرامون آن بحث می گردد. مقایسه اجمالی معیارهای بکارگرفته شده در تخمین مسیر رشد ترک انجام می شود. همچنین اعتبار و درستی پیش بینی های بدست آمده مورد مذاقه قرار می گیرند. همچنین تلاش می شود تاثیر استفاده از ترمهای بالاتر سری ویلیامز میدان تنش و کرنش اطراف نوک ترک در بهبود پیش بینی مسیر رشد ترک در هر یک از حالت بارگذاری مود I و مود ترکیبی جداگانه مورد بحث قرار گیرد. جمع بندی نهایی برای استفاده بهینه از روشهای تئوری استفاده شده در تخمین مسیر رشد ترک در قطعه مهندسی واقعی بر اساس نتایج حاصله در این پایان نامه ارائه خواهد شد.

فصل دوم
مفاهیم مرتبط در
مکانیک شکست الاستیک
خطی

فصل دوم : مفاهیم مرتبط در مکانیک شکست الاستیک خطی

۱-۲ مقدمه

عموما مکانیزم شکست مواد به دو گروه اصلی "شکست ترد" و "شکست نرم" تقسیم می شود. شکست ترد پدیده ای ناگهانی و سریع می باشد که این نوع شکست معمولا در مواد تردی که دارای فرم پذیری کمتری هستند، رخ می دهد. در مقابل چنانچه ماده نرم باشد رشد ترک به صورت تدریجی در نظر گرفته می شود و شکست ماده از نوع نرم محسوب می شود. مکانیک شکست اگرچه از قدمت طولانی برخوردار نیست ولی دارای پیشرفتهای مرحله ای روشنی است که شناخت آن به درک پدیده کمک می نماید. مکانیک شکست را می توان به دو بخش اصلی با عناوین مکانیک شکست در حالت الاستیک خطی و مکانیک شکست الاستیک پلاستیک تقسیم بندی نمود. برای تحلیل مسائل در مکانیک شکست الاستیک خطی از تئوری الاستیسیته کمک گرفته می شود. تئوری الاستیسیته با این فرض اساسی مطرح می شود که در قطعات قبل از شروع شکست اندازه ناحیه پلاستیک اطراف نوک ترک در مقایسه با طول آن ناچیز است. شناخت اصول پایه ای مکانیک شکست در حالت الاستیک خطی نیز به درک چگونگی استفاده از تئوری الاستیسیته کمک می نماید.

سایر مفاهیم نهفته در مکانیک شکست الاستیک خطی که توسط محققین روی میز بررسی قرار گرفت دامنه کاربرد این شاخه از علم مکانیک را توسعه کمی و کیفی قابل ملاحظه ای داد. لذا برای درک مفاهیم پیشرفته تر در زمینه بسط این تئوری ها به چگونگی تخمین مسیر رشد ترک، کلیات منتخب از مکانیک شکست الاستیک خطی را مورد بحث و بررسی قرار می گیرد.

۲-۲ مروری بر پیشرفتهای مکانیک شکست

اولین ارتباط عددی که بین تنش شکست و اندازه ترک اظهار شد نتیجه کارهای [1] Griffith بود که در سال ۱۹۲۰ میلادی منتشر شد. وی تحلیل تنش را برای بررسی سوراخ بیضوی شکل که ۷ سال قبل از آن توسط [2] Inglis (اینگلیس) مطرح شده بود، بکار گرفت تا رشد ناپایدار ترک را مشاهده و مطالعه نماید. [1] Griffith با بکارگیری قانون اول ترمودینامیک تئوری شکست را بر اساس تعادل ساده انرژی فرمول بندی کرد. با توجه به این تئوری هنگامیکه تغییر انرژی کرنشی ناشی از رشد بسیار کوچک ترک بر انرژی سطحی ماده غلبه نماید، ترک یا نقص موجود در قطعه ناپایدار می شود و به دنبال آن شکست رخ می دهد. مدل گریفیث (Griffith) به طور صحیحی رابطه بین اندازه ترک و استحکام (مقاومت) در یک نمونه شیشه ای را پیش بینی کرد. از آنجا که مدل گریفیث فرض می کند که کار لازم برای شکست قطعه انحصارا از انرژی سطحی ماده نتیجه می شود لذا کاربرد آن فقط به مواد ترد ایده ال محدود می گردد.

سه دسته کار عمده پس از جنگ جهانی دوم در تحقیقات پیرامون مکانیک شکست صورت گرفت. اول به فعالیت‌های دکتر Irwin اشاره می‌شود. [3] Irwin با مطالعه کارهای گریفیث و اینگلیس تلاش نمود تا روش گریفیث را بوسیله نرخ انرژی آزاد شده توسط جریان پلاستیک موضعی به عموم فلزات توسعه دهد. همزمان و به طور مستقل [4] Orawan روش اصلاحی مشابهی را در تئوری گریفیث به کار گرفت. سومین فعالیت مربوط به کار همزمان [5] Mott می‌شود که تئوری گریفیث را برای رشد سریع منحنی ترک مورد استفاده قرار داد.

سال ۱۹۶۰ میلادی را از آن جهت که اصول مکانیک شکست الاستیک خطی (LEFM) به شکل مناسبی بنا نهاده شد و پس از آن توجه محققان به سوی پلاستیسیته نوک ترک جلب شد را سالی که به لحاظ تاریخی مرزی را در این زمینه ایجاد می‌نماید می‌دانند.

در طول دوره کوتاهی از ۱۹۶۰ تا ۱۹۶۱ محققان چندی تحلیل توسعه یافته ای را برای تصحیح تسلیم در نوک ترک ارائه نمودند که از آن جمله [9] Wells, [8] Barenblatt, [7] Dugdale, [6] Irwin را می‌توان بر شمرده تصحیح ناحیه پلاستیک که توسط [6] Irwin ارائه شد، بسط نسبتاً ساده ای از تئوری های الاستیسیته خطی مکانیک شکست (LEFM) بود، در حالیکه [7] Dugdale, [8] Barenblatt هر کدام مدل مشکلاتی را بر اساس نوار باریک تسلیم شده از ماده در نوک ترک طرح کردند. [9] Wells جابجایی وجوه ترک را به عنوان معیار دیگری در شکست مطرح نمود، هنگامیکه پلاستیک شدگی قابل توجه منجر به واماندگی (failure) می‌شود. "ولز" در موسسه تحقیقات ذوب انگلستان تلاش کرد تا LEFM را برای تحلیل فولادهای با استحکام کم و متوسط بکار گیرد. این مواد بسیار نرمتر از آن بودند که بتوان مکانیک شکست الاستیک خطی را در موردشان بکار گرفت، اما "ولز" توجه داشت که وجوه ترک همراه با تغییر شکل پلاستیک از یکدیگر جدا می‌شوند. این مشاهدات به این نکته رهنمون شد تا پارامتری مطرح گردد که اکنون به عنوان "جابجایی باز شدن نوک ترک" (CTOD) شناخته می‌شود. [10]

در سال ۱۹۶۸ [11] Rice پارامتر دیگری را برای تعریف رفتار مواد غیر خطی در نوک ترک مطرح نمود. وی نشان داد که نرخ غیر خطی آزادسازی انرژی می‌تواند توسط یک انتگرال خط بیان شود که وی آن انتگرال را J نامید، اگر چه کارهای "رایس" و همکاران بعدی او نشان داد که می‌توان انتگرال J را به تنش نوک ترک در موارد غیر خطی بسط داد و از آن به عنوان یک پارامتر تمرکز تنش غیر خطی همچون نرخ آزاد شدن انرژی بهره برد. استحکام مواد فقط بخشی از مکانیک شکست می‌باشد. برای بکارگیری این علم در طراحی لازم است تا در رابطه ریاضی بین استحکام، تنش و اندازه ترک شناخته شود. اما استفاده عملی از روابط موجود تا سال ۱۹۷۶ که توسط [12] Hutchinson, Shih ارائه شد ممکن نگردد.

۲-۳ : اصول تئوری الاستیسیته در مکانیک شکست

مواد غیر نرم (ترد) در مقابل تغییر شکلهای پلاستیک ظرفیت بسیار پایینی دارند و لذا قادر نیستند تا تنشهای حد بالا را در عیوب ترک مانند، آزاد سازند. در چنین موادی ترک با تغییر شکل پلاستیک کمی در ناحیه اطراف نوک ترک، به سرعت رشد می کند که چنین اتفاقی را شکست ترد گویند. عموماً چنین شکستی به وسیله عباراتی نظیر رشدترک به صورت ناگهانی، سریع یا ناپایدار نیز تعریف می شود. در عمل این تعریف از ترد بودن ماده که به آغاز ناپایداری زیر تنش اعمال شده کمتر از تنش لازم برای تغییر شکل پلاستیک می انجامد، بسیار مفیدتر است. تعداد قابل توجهی شکست ترد در عمل رخ داده است و مثالهای روشننگر در این مورد در تعداد زیادی از سازه های مکانیکی که در حوزه مهندسی مکانیک قرار دارد می باشد. این موارد شامل کشتیها، پل ها، مخازن تحت فشار، لوله های نفت، توربین ها و امثال آن موجود است. لذا با توجه به اهمیت فراوان شکست ترد در زندگی روزمره نظام معینی که به آن اختصاراً LEFM (مکانیک شکست الاستیک خطی) گویند تعیین شده است. LEFM ما را قادر می سازد تا میزانهای قابل محاسبه ای برای مقاومت مواد ترد در مقابل رشد ناپایدار و مصیبت بار ترک بدست آوریم. بسط این تئوری به نظامهای غیر خطی و تغییر شکلهای پلاستیک تئوری الاستیسیته - پلاستیسیته مکانیک شکست را حاصل کرده است [33]. فرضیات اساسی تئوری مکانیک شکست الاستیک خطی از قرار زیر است:

۱- وجود ترک در مواد غیر قابل اجتناب است و دلیل آن نیز محدودیتهای فنی و مالی مربوط به دستگاههای تشخیص ترک در مواد است.

۲- ترک سطحی آزاد، داخلی و صفحه ای در ناحیه تنش الاستیسیته و با چنین فرضیه ای تنش در ناحیه نزدیک نوک ترک تابعی است از r و θ (مختصات قطبی) و ضریب ثابت K که به آن ضریب (فاکتور) شدت تنش گوئیم.

۳- رشد ترک منجر به واماندگی (failure) اعضاء سازه می شود و می توان به صورت عبارتی شامل تنش کششی عامل روی نوک ترک پیش بینی شود. به عبارت دیگر موقعیت تنش در نوک ترک با مقادیر K معین می شود. همچنین از طریق تئوری الاستیسیته می توان این رابطه را تعیین کرد [14].

۲-۴ : موده های بارگذاری

برای شکلهای ترکدار تحت بارگذاری خارجی، با فرض ایزوتروپیک بودن ماده و شرایط رفتار تئوری الاستیک خطی این امکان موجود است تا روابطی دقیق برای تنش در جسم بدست آوریم. [18] Williams, [17] Sneddon, [16] Irwin, [15] Westergaard از اولین محققینی بودند که چنین راه حلهایی را منتشر کردند. چنانچه دستگاه مختصات قطبی با محوریت نوک ترک همانند آنچه در

شکل (۲-۱) نشان داده شده تعریف نمائیم، می توان نشان داد که میدان تنش موجود در هر جسم ترکدار خطی و الاستیک بوسیله رابطه زیر معلوم می شود.

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{k}{\sqrt{r}} \right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} \cdot g_{ij}^{(m)}(\theta) \quad (2-1)$$

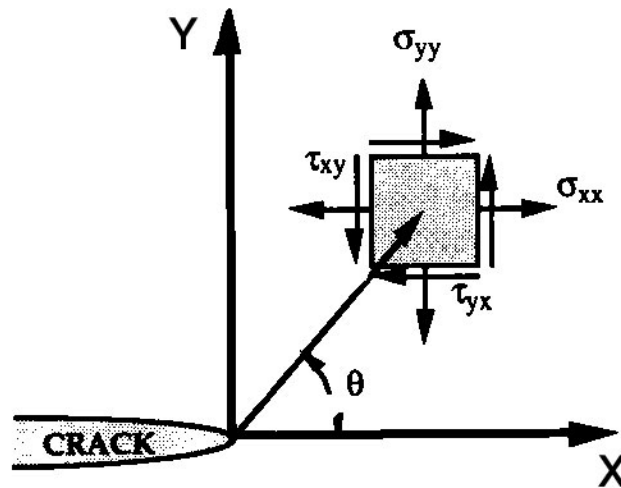
که در رابطه فوق داریم :

σ_{ij} تانسور تنش :

r, θ در شکل (۲-۱) تعریف شدند :

k مقدار ثابت :

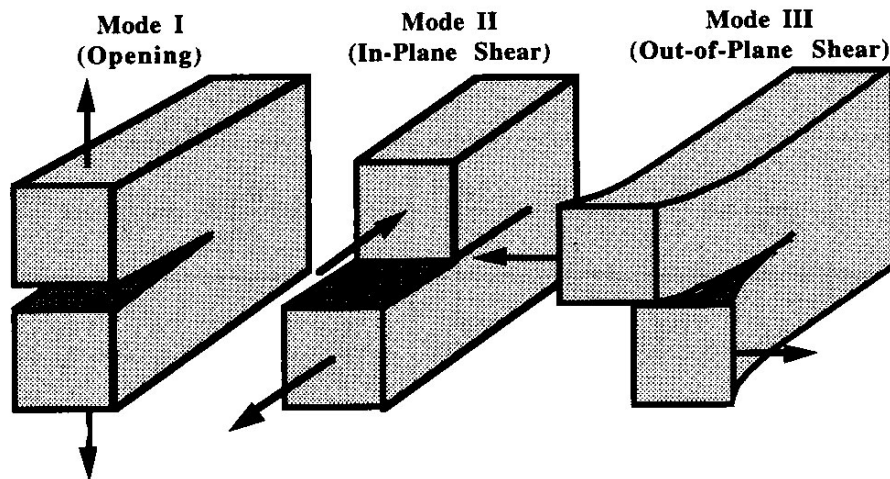
$f_{ij} : \theta$ تابع بدون بعد



شکل (۲-۱): تعریف دستگاه مختصات در نوک یک ترک. محور Z عمود بر صفحه است [10].

ترمهای مرتبه بالاتر به شکل جسم بستگی دارند ولی راه حل برای هر شکل مفروضی شامل یک عبارت اصلی است که با $\frac{1}{\sqrt{r}}$ مرتبط می باشد. هنگامیک $r \rightarrow 0$ ، ترم اصلی عبارت به سمت بی نهایت می رود ولی سایر ترمها محدود باقی می ماند یا به صفر میل می کند. بنابراین صرفنظر از شکل جسم ترکدار، میدان تنش نزدیک نوک ترک با مقدار $\frac{1}{\sqrt{r}}$ تغییر می کند. همچنین می توان نشان داد که تغییر مکان نزدیک نوک ترک با مقدار \sqrt{r} تغییر می کند. رابطه (۲-۱) نشان دهنده منفرد شدن تنش با نزدیک شدن r به صفر می باشد.

با توجه به توضیحات فوق سه نوع بارگذاری برای ترک قابل آزمایش است که در شکل (۲-۲) به نمایش گذاشته شده است.



(a) (b) (c)

شکل (۲-۲): سه مود بارگذاری اصلی برای ترک [10]

- a- بازشوندگی کششی (مود I)
 b- لغزش داخل صفحه ای (مود II)
 c- برش خارج صفحه ای (مود III)

مود I بارگذاری: جایی که بار اصلی به صورت عمود بر صفحه ترک وارد می شود و تمایل دارد تا ترک را باز نماید. (Opening mode) شکل (a) (۲-۲)

مود II: که بیانگر بارگذاری برشی صفحه ای است و تمایل دارد تا یکی از صفحات ترک را نسبت به دیگری بلغزاند که به آن "Sliding Mode" "In-plane shear" یا "Forward shear" "Mode" نیز می گویند. شکل (b) (۲-۲)

مود III: که "Out-of-plane shear" خوانده می شود هنگامی است که بارگذاری برشی موازی انتهای ترک باشد که به آن "Transverse shear mode" نیز می گویند. شکل (c) (۲-۲)

۲-۵: ضریب شدت تنش و میدانهای تنش و جابجایی در نوک ترک

هر مود بارگذاری که پیشتر مورد اشاره قرار گرفت حاوی عبارت $\frac{1}{\sqrt{r}}$ و بیانگر منفرد شدن تنش در نوک ترک می باشد. برای آسانی بیشتر مقدار ثابت k را با ضریب شدت تنش K که در آن $K = k\sqrt{2\pi}$ جایگزین کرده که این ضریب توصیف دیگری است که مود بارگذاری رایج صورت K_I (ضریب شدت تنش در مود I)، K_{II} (ضریب شدت تنش در مود II) K_{III} (ضریب شدت تنش در مود III) نشان می

دهد. بنابراین عبارت تنش در ناحیه مجاور نوک ترک در یک ماده ایزوتروپیک الاستیک خطی می تواند به صورت زیر نوشته شود. (برای مدهای I,II,III بارگذاری)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(I)} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(I)}(\theta) \quad (2-2)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(II)} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(II)}(\theta) \quad (2-3)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(III)} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(III)}(\theta) \quad (2-4)$$

در یک مسئله بار گذاری مود ترکیبی (وقتی بیش از یک مود بارگذاری موجود است) تنش موجود از جمع آثار تحت اصول سوپر پوزیشن (جمع آثار) بدست می آید.

$$\sigma_{ij}^{(total)} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)} \quad (2-5)$$

جدول (2-1) به صورت مشروح عبارتهای تنش منفرد را برای دو مود بارگذاری I,II نشان می دهد. جدول (2-2) خلاصه روابط تغییر مکان را برای مود I,II ارائه می نماید. جدول (2-3) روابط تنش غیر صفر و مولفه های تغییر مکان در مود III را نشان می دهد. برای مثال شرایط تکین مود I را در صفحه ترک در نظر بگیرید (جایی که $\theta = 0$ است) با توجه به جدول (1) تنشها در راستای X, Y برابرند با:

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (2-6)$$

هنگامیکه $\theta = 0$ ، تنش برشی صفر است و این به آن معنی است که صفحه ترک یک صفحه اصلی برای بارگذاری مود I است و رابطه (2-6) فقط در نزدیکی نوک ترک معین است، جایی که $\frac{1}{\sqrt{r}}$ تنش را تحت تاثیر قرار می دهد. تنش در نواحی دور از نوک ترک از سایر شرایط مرزی بدست می آید. نکته قابل ذکر آن است که ضریب شدت تنش، ضریب سینگولاریتی نوک ترک را تعیین می کند، چنانچه تنش نزدیک نوک ترک مرتبط با K افزایش می یابد. ضریب شدت تنش به طور کامل شرایط نوک ترک را تعریف می کند، اگر K معلوم باشد این امکان وجود دارد تا همه مولفه های تنش، کرنش و تغییر مکان در قالب تابعی از r و θ حل شده و بدست آید. به این ترتیب پارامتر K به یکی از مهمترین مفاهیم در مکانیک شکست تبدیل شده است [15]. نکته قابل ذکر اینکه روابط K در مود های مختلف برای بسیاری از اشکال مختلف قطعات ترک دار محاسبه شده است که حسب مورد می توان برای تحلیل های مربوطه از آنها بهره گرفت.

جدول (۲-۱): روابط تنش برای مود بار گذاری I,II (ν ضریب پواسون ماده) [10]

	Mode I	Mode II
σ_x	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$	$-\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$
σ_y	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$
τ_{xy}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$
σ_z	0(plane stress) $\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ (Plane strain)	0(plane stress) $\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ (Plane strain)
τ_{xz}	0	0
τ_{yz}	0	0

جدول (۲-۲) خلاصه روابط تغییر مکان برای مود I,II (μ مدول برشی ماده می باشد) [10]

	Mode I	Mode II
u_x	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$	$\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$
u_y	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$	$-\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k - 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$

در جدول (۲-۲)، k تعریف ذیل رابطه (۲-۱) را دارد.

جدول (۲-۳): روابط تنش و مولفه های تغییر مکان در بار گذاری مود III [10]

$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$
$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$
$u_z = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

۲-۶ : روابط تنش - کرنش

۲-۶-۱: تنش صفحه ای در مقابل کرنش صفحه ای

بیشتر راه حل‌های کلاسیک در مکانیک شکست مسئله را به مسئله ای دو بعدی کاهش می دهند به این صورت که حداقل یکی از تنشهای نرمال یا کرنش های نرمال برابر صفر فرض می شوند (به بیان معادل، تنش صفحه ای یا کرنش صفحه ای).

عموماً شرایط مجاور نوک ترک نه از جنس تنش صفحه ای و نه کرنش صفحه ای است بلکه سه بعدی است. از سوی دیگر در مسائل محدودی فرض دو بعدی بودن تنش و کرنش معین است یا حداقل تقریب خوبی ارائه می کند [15]. در هر صورت در ارائه راه حلها تلاش می شود تا از مفروضات تنش یا کرنش صفحه ای خارج نشده و همچنین از تقارن محوری تا حد امکان برای سادگی و افزایش دقت حل مسئله بهره برداری گردد. همچنین باید توجه داشت که در مسائل تنش صفحه ای که فرض $\sigma_z = 0$ در نظر گرفته می شود مقدار ϵ_z برابر صفر نبوده و از رابطه زیر بدست می آید.

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E}[\sigma_x + \sigma_y] \quad (2-7)$$

در ادامه روابط تنش کرنش منتخب از منابع مختلف را که در ضمن محاسبات به آن اشاره می شود مطرح شده و توضیحات ضروری به آن افزوده می شود. به طور کلی در یک مسئله مکانیک شکست در حوزه الاستیسیته خطی و در فضای سه بعدی برای ۱۵ مجهول شامل ۶ مولفه تنش، ۶ مولفه کرنش و ۳ مولفه تغییر مکان، ۱۵ معادله شامل ۶ معادله ساختاری (که به جنس ماده وابسته است) ۶ معادله سازگاری و ۳ معادله تعادل ارائه می گردد. در این مسائل نیروهای خارجی یا نیروهای سطحی باعث تغییر شکل ماده می شود و فرض بر آن است که نیروهای کالبدی (Body force) باعث تغییر شکل ماده نشده و فقط در روابط تعادل ظاهر می شوند.

(۲-۶-۱-۱) تنشهای اصلی:

در دستگاه مختصات سه بعدی و در صفحات تنش اصلی (جایی که تنش برشی صفحه صفر است) با تشکیل دترمینان زیر و حل آن و تعریف و استخراج نا متغیرهای مرتبه اول تا سوم تنش مقادیر تنش اصلی به شرح زیر حاصل می شود.

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} = 0 \quad (2-8)$$

که از حل معادله (۲-۹) مقادیر $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ اصلی حاصل خواهد شد.

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (2-9)$$

که در آن :

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (2-10)$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \quad (2-11)$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 \quad (2-12)$$

و می دانیم که در تمام صفحات جمع تنشهای نرمال با هم برابر است و خواص (I_1, I_2, I_3) مستقل از محورهای مختصات می باشد.

نکته ۱: ماکزیمم تنش برشی واقعی بزرگترین تفاضل دو به دو تنشهای اصلی تقسیم بر دو می باشد.
 نکته ۲: برای محاسبه کرنشهای اصلی به طور مشابه به دترمینان رابطه (۲-۸) را بازسازی کرده و با جایگزینی روابط (۲-۱۰) تا (۲-۱۲) (باز نویسی شده برای کرنشها) در رابطه (۲-۱۳) مقادیر کرنش اصلی $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ حاصل می شود.

$$\varepsilon^3 - I_1 \varepsilon^2 + I_2 \varepsilon - I_3 = 0 \quad (2-13)$$

۲-۶-۱-۲ معادلات حاکم

۱۵ معادله حاکم که برای استحصال مولفه های تنش کرنش و تغییر مکان در مختصات سه بعدی بکار می رود به شرح زیر بازنویسی شده و سپس مفروضات تنش صفحه ای و کرنش صفحه ای اعمال و نتیجه ارائه می گردد. (روابط در مختصات کارتزین نوشته شده که با استفاده از روابط تنش، کرنش دایره مور قابل تبدیل به مختصات قطبی (r, θ, z) می باشد).

$$\text{معادلات تعادل} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - F_b^x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - F_b^y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} - F_b^z = 0 \end{array} \right. \quad (2-14)$$

$$\text{معادلات سازگاری} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \end{array} \right. \quad (2-15)$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\mu} \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{\mu} \\ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{\mu} \end{array} \right\} \text{معادلات ساختاری} \quad (2-16)$$

که در روابط فوق μ مدول برشی E مدول یانگ و ν ضریب پواسون می باشد.

۲-۶-۱-۳ تنش صفحه ای

چنانچه شرط تنش صفحه ای برقرار باشد آنگاه روابط حاکم به شکل زیر تقلیل می یابد:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_z = 0 \\ \varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu\sigma_y] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu\sigma_x] \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\mu} \\ \varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu\sigma_\theta] \end{array} \right. \quad (2-17)$$

۲-۶-۱-۴ کرنش صفحه ای

چنانچه شرط کرنش صفحه ای برقرار باشد آنگاه معادلات حاکم به شکل زیر تقلیل می یابد:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \\ \varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\mu} \end{array} \right. \quad (2-18)$$

ضمناً معادلات تعادل و معادلات کرنش- تغییر مکان نیز تقلیل می یابد که با توجه به اینکه شکل سه بعدی معادلات حاکم در دستگاه مختصات کارتزین بیان شد و بیشتر کاربرد در تحلیل به صورت مختصات قطبی است تقلیل یافته معادلات فوق را در دستگاه مختصات قطبی بیان می کنیم :

$$\text{معادلات تعادل} \begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + F_r^b = 0 \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta^b = 0 \end{cases} \quad (2-19)$$

$$\text{معادلات کرنش - تغییر مکان} \begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ \gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \end{cases} \quad (2-20)$$

۴-۶-۲ معادلات ایری در مختصات قطبی

پس از آنکه معادلات حاکم بر الاستیسیته حل شد و مولفه های تنش، کرنش و تغییر مکان که تفصیل آن در مباحث و کتب الاستیسیته آمده است معادلات حاصل دو رابطه تعادل و دو رابطه ساختاری را در کنار معادله بای-هارمونیک ارضا می نماید. ایری عکس این موضوع را در نظر گرفت و فرض کرد اگر تابعی در نظر بگیریم که در معادلات تعادل و ساختاری در معادله بای-هارمونیک صدق کند ارضا تک تک روابط لازم نیست از آنجا که در برخی مقالات و متون از این روش نیز استفاده شده معادلات ایری در مختصات قطبی را ذکر می کنیم :

$$\begin{cases} \varphi(r, \theta) = f(r, \theta) \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \\ \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \\ \nabla^4 \varphi = 0 \quad \text{Biharmonic Equation} \\ \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right] \end{cases} \quad (2-21)$$

۴-۷ : میدان تنش اطراف نوک ترک

دیدگاه مدرن مکانیک شکست تحلیلی، مسائل تنش سینگولار (همانند آنچه در اطراف نوک ترک اتفاق می افتد) را برای معرفی رفتار الاستیک قطعه ای که شامل یک یا چند ترک می باشد به کار می برد. پدیده تنش بینهایت در روابط، نقیض اعمال بارهای محدود است. این پدیده با درک ما از رفتار دنیای واقعی قطعه نا همخوان است و تئوری مشتمل بر اولین جمله تنش که ابتدا مطرح شد این مشکل را می پذیرد و راه حل آن را در محدود کردن تئوری به ناحیه کوچک اطراف نوک ترک می یابد. همچنین استدلال می شود مراحل موضعی شده یا مکانیزم تخریب، رفتار دقیق در این ناحیه را تعیین می کند و

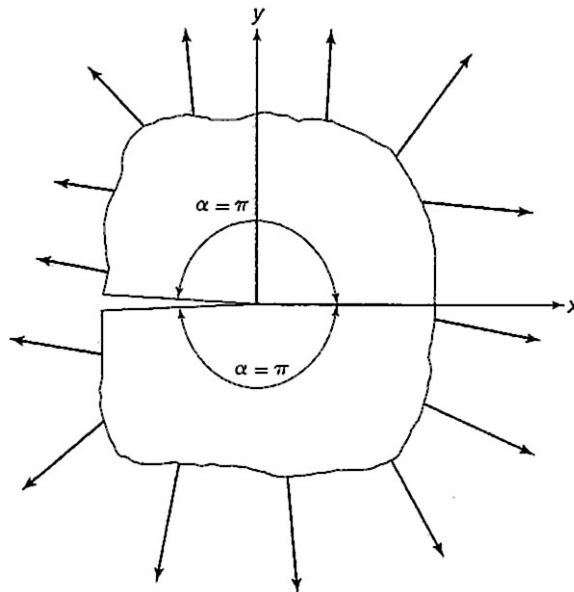
شامل محدوده استفاده از تئوری الاستیسیته می گردد. اگر بتوان رفتار نرم برای ماده در نظر گرفت آنگاه یک منطقه غیر خطی (پلاستیک) نیز می توان معرفی کرد تا میزان تنش را در ناحیه نزدیک نوک ترک محدود در نظر گرفت. در بسیاری از موارد رفتار قطعه بجز در ناحیه بسیار کوچک اطراف ترک با تئوری کلاسیک الاستیسیته برای میدان تنش سینگولار قابل تعریف است. در ادامه از میان تئوریهای مختلفی که برای حل مسئله ترک درون قطعه خارج از چهار چوب میدان تنش سینگولار، روش ویلیامز مطرح می شود.

۲-۷-۱ بسط سری تنش ویلیامز

[18] Williams مسئله ترکی را به شکل (۲-۳) در نظر گرفت. وی برای حل آن تابع تنش ایری را به صورت رابطه (۲-۲۲) مطرح نمود.

$$g = r^{\lambda+1} f(\theta) \quad (2-22)$$

و فرض نمود که این روابط باید معادله بای هارمونیک (۲-۲۱) را ارضا نماید.



شکل (۲-۳): ترک مفروض ویلیامز برای حل میدان تنش [18]

با جایگزین رابطه (۲-۲۲) در رابطه (۲-۲۱) به معادله دیفرانسیل زیر دست یافت:

$$\frac{d^4 f}{d\theta^4} + 2(\lambda^2 + 1) \frac{d^2 f}{d\theta^2} + (\lambda^2 - 1)f = 0 \quad (2-23)$$

که پاسخ معادله دیفرانسیل (۲-۲۳) به شکل عمومی زیر می باشد:

$$f(\theta) = c_1 \cos(\lambda - 1)\theta + c_2 \sin(\lambda - 1)\theta + c_3 \cos(\lambda + 1)\theta + c_4 \sin(\lambda + 1)\theta \quad (2-24)$$

که مجموعه شرایط مرزی (۲-۲۵) در آن صدق می کند

$$B.C \begin{cases} \theta = \alpha, & \sigma_\theta = 0, & \tau_{r\theta} = 0 \\ \theta = -\alpha, & \sigma_\theta = 0, & \tau_{r\theta} = 0 \end{cases} \quad (2-25)$$

با اعمال شرایط مرزی (۲-۲۵) در معادله (۲-۲۴) و جایگزینی آن در رابطه (۲-۲۲) پاسخ معادله بای- هارمونیک (۲-۲۱) به شکل زیر بدست خواهد آمد:

$$\begin{bmatrix} \cos(\lambda-1)\alpha & \cos(\lambda+1)\alpha \\ (\lambda-1)\sin(\lambda-1)\alpha & (\lambda+1)\sin(\lambda+1)\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-26-a)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\lambda-1)\alpha & \sin(\lambda+1)\alpha \\ (\lambda-1)\cos(\lambda-1)\alpha & (\lambda+1)\cos(\lambda+1)\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-26-b)$$

معادله همگن (۲-۲۶- a,b) موقعی پاسخ غیر صفر دارد که دترمینال ضرائب (۲-۲۷) صفر باشد.

$$\begin{cases} \lambda \sin 2\alpha + \sin 2\lambda\alpha = 0 \\ -\lambda \sin 2\alpha + 2 \sin 2\lambda\alpha = 0 \end{cases} \quad (2-27)$$

لذا با توجه به شکل (۲-۳) ناچ ۷ شکل ترک خواهد بود اگر $\alpha = \pm\pi$ باشد و در نتیجه

$$\sin 2\pi\alpha = 0, \Rightarrow \lambda = \frac{n}{2}, n=1,2,3 \quad (2-28)$$

البته برخی ریشه های بدست آمده از نظر فیزیکی غیر قابل قبول است و حذف می شود. قبل از آنکه پاسخ عمومی نهایی ارائه شود. باید توجه داشت که همه ضرائب موجود مستقل می باشند. با قرار دادن

$\alpha = \pi$ و $\lambda = \frac{n}{2}$ روابط (۲-۲۶) با در نظر گرفتن شرایط ارضا برای همه مقادیر n نتیجه می دهد:

$$c_{3n} = -\frac{n-2}{n+2}c_{1n}, c_{4n} = -c_{2n} \text{ for } n=1,3,5 \quad (2-29-a)$$

$$c_{3n} = -c_{1n}, c_{4n} = -\frac{n-2}{n+2}c_{2n}, c_{4n} = -c_{2n} \text{ for } n=2,4,6 \quad (2-29-b)$$

به این ترتیب ضرائب لازم معلوم شده و با جایگزینی نتیجه در معادله بای هارمونیک (۲-۲۱) روابط تنش به صورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{c_{11}}{4\sqrt{r}}(5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2}) + \frac{1}{2} \sigma_{0x}(1 + \cos 2\theta) + H.O.T. \\ \sigma_\theta = \frac{c_{11}}{4\sqrt{r}}(3 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2}) + \frac{1}{2} \sigma_{0x}(1 - \cos 2\theta) + H.O.T. \\ \tau_{r\theta} = \frac{c_{11}}{4\sqrt{r}}(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2}) - \frac{1}{2} \sigma_{0x} \sin 2\theta + H.O.T. \end{cases} \quad (2-30)$$

که در رابطه (۲-۳۰) H.O.T به معنای ترم های مرتبه بالاتر در بسط سری می باشد. (Higher Order Terms)