دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

معکوس های مور-پنروز حاصلضرب و تفاضل عملگرهای تصویر در یک C^*-جبر

نگارش

زهرا رحمتی نصراباد

استاد راهنما

دکتر کامران شریفی

استاد مشاور

دکتر مهدی ایرانمنش

۱۵ بهمن ۱۳۹۰

تقدیم به....

صفحهٔ تصویب نامه توسط هیأت داوران (فرم پیوست ۳ یا ۴ با امضای اصل هیأت داوران مورد قبول است)

قدردانی

چکیده

در این پایان نامه معکوس مور -پنروز حاصلضرب و تفاضل عملگرهای تصویری در C^* جبرها را بررسی می کنیم و همچنین نشان می دهیم برای دو عملگر تصویری p و q در یک C^* جبر، $pq - qp$ معکوس پذیر مور -پنروز است اگر و فقط اگر pq و $p - q$ معکوس پذیر مور -پنروز باشند.

واژه‌های کلیدی: معکوس مور -پنروز؛ معکوس درازین؛ عملگرهای تصویری؛ C^* جبرها

پیشگفتار

مبحث معکوس های تعمیم یافته در سال های اخیر به دلیل کاربرد های فراوانی که در شاخه های مختلف ریاضی دارد، مورد توجه ریاضی دانان قرار گرفته است. یکی از کاربردهای مهم معکوس های تعمیم یافته، حل دستگاه معادلات خطی است.

فرض کنیم $Ax = b$ یک دستگاه معادلات خطی باشد. اگر A معکوس پذیر باشد، در این صورت جواب یکتای $x = A^{-1}b$ وجود دارد.

حال اگر A منفرد یا مستطیل شکل باشد، در این صورت جوابی برای دستگاه $Ax = b$ وجود ندارد و این زمانی است که ما از معکوس های تعمیم یافته استفاده می کنیم.

وجود ماتریس x که در دستگاه $Ax = b$ صدق کند هم ارز این عبارت است که ماتریس b ترکیب خطی از ستون های ماتریس A می باشد.اگر چنین باشد، hای وجود دارد بطوریکه $b = Ah$.

حال اگر X ماتریسی باشد که $AXA = A$ (که در واقع X ای که در این شرط صدق می کند همان تعریف کلی برای معکوس تعمیم یافته ماتریس A است) و اگر قرار دهیم $x = Xb$ در این صورت داریم:

$$Ax = AXb = AXAh = Ah = b$$

بنابر این x در دستگاه $Ax = b$ صدق می کند.

در حالت کلی اگر Xماتریسی باشد که $AXA = A$، در این صورت $Ax = b$ یک جواب دارد اگر و فقط اگر $AXb = b$.

در این پایان نامه، فصل اول به بیان تعاریف و قضایایی اختصاص داده شده است که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می گیرد. در فصل دوم معکوس مور-پنروز حاصلضرب و تفاضل عملگرهای تصویری در C^* جبر ها را مورد بررسی قرار می دهیم و در فصل سوم همین امر را برای عملگرهای تصویر متعامد در فضای ماتریس های $m \times n$ بررسی می کنیم.

فهرست مطالب

فصل ۱
پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ نماد گذاری و تعاریف

در این پایان نامه از نمادهای زیر استفاده می شود.

A^*	عملگر الحاق
$A^\dagger$	معکوس مور-پنروز
A^-	معکوس درونی A
A^+	معکوس بازتابی A
A^D	معکوس درازین A
$\|A\|$	نرم عملگر A
$\langle x, y\rangle$	حاصل ضرب درونی x و y
H	فضای هیلبرت
$L(X,Y)$	فضای تمام عملگرهای خطی کراندار از X به Y
$B(H)$	مجموعه همه عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت
I_n	ماتریس همانی $n \times n$
$\mathcal{A}$	C^*- جبر

$R(A)$ برد ماتریس A

$RS(A)$ فضای سطری ماتریس A

$\rho(A)$ رتبه ماتریس A

$\sigma(a)$ طیف عنصر a

$acc\sigma(a)$ نقاط انباشتگی طیف عنصر a

این بخش شامل تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز در فصول بعد می باشد.

تعریف ۱.۱.۱. (فضای هیلبرت)([۵])

فرض کنیم X یک فضای برداری مختلط باشد. یک ضرب داخلی روی X نگاشتی مانند $\langle x, y\rangle \longleftarrow (x, y)$ از $X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ است به طوری که :

الف) به ازای هر x، y و z از X و هر a و b از $\mathbb{C}$، $\langle ax + by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle$

ب) به ازای هر x و y از X، $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$

ج) به ازای هر عضو ناصفر مانند x از X، $\langle x, x\rangle \in (۰, \infty)$

هر فضای برداری مختلط مجهز به یک ضرب داخلی یک فضای پیش هیلبرت نامیده می شود. اگر X یک فضای پیش هیلبرت باشد، به ازای هر $x \in X$ تعریف می کنیم :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

فضای پیش هیلبرتی که نسبت به نرم $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ کامل باشد یک فضای هیلبرت نامیده می شود.

تعریف ۲.۱.۱. (عملگر خطی)([۴])

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند. نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ خطی نامیده می شود هرگاه برای هر x و z در X و برای هر α و β در میدان اسکالرها داشته باشیم:

$$T(\alpha x + \beta z) = \alpha Tx + \beta Tz.$$

تعریف ۳.۱.۱. (عملگر کراندار)

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند. عملگر خطی $A : X \longrightarrow Y$ کراندار نامیده می شود هرگاه یک ثابت $c \geqslant ۰$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$\|A(x)\| \leq c\|x\|.$$

تعریف ۴.۱.۱. (عملگر الحاق)

هرگاه X و Y فضاهای هیلبرت باشند و $A \in L(X,Y)$ آنگاه عملگر منحصر به فرد $B \in L(Y,X)$ که در تساوی $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$ صدق می کند عملگر الحاق A می نامند و با $B = A^*$ نشان می دهند.

تعریف ۵.۱.۱. (عملگر خودتوان)

فرض کنیم X یک فضای هیلبرت باشد.عملگر $A : X \longrightarrow X$ را خودتوان (تصویر) گوییم هرگاه در شرط $A^۲ = A$ صدق کند.

تعریف ۶.۱.۱. (عملگر تصویر متعامد)

عملگر P در شرط های $P^۲ = P$ و $P^* = P$ صدق کند عملگر تصویر متعامد می نامند.

اگر ماتریس A معکوس پذیر نباشد، علاقمندیم که ماتریسی مانند B را جایگزین معکوس A کنیم که در شرایط زیر صدق می کند:

۱) برای یک رده بزرگتری از رده ماتریس های معکوس پذیر موجود باشد.

۲)تعدادی از خاصیت های معکوس معمولی را داشته باشد.

۳) وقتی A معکوس پذیر باشد به معکوس معمولی تبدیل شود.

با توجه به شرایط فوق تعریف زیر را داریم.

تعریف ۷.۱.۱. (معکوس تعمیم یافته یک ماتریس)([۱]) یک معکوس تعمیم یافته برای A، ماتریسی مانند B است که در شرط $ABA = A$ صدق کند.

تعریف ۸.۱.۱. (ماتریس الحاق)([۲])

ترانهاده مزدوج ماتریس $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ماتریس $A^* = [\overline{a_{ji}}]_{n\times m}$ می باشد، که به آن ماتریس الحاق گویند.

تعریف ۹.۱.۱. (ماتریس هرمیتی)

ماتریس مربعی A که $A = A^*$ را ماتریس هرمیتی (خودالحاق) گویند.

تعریف ۱۰.۱.۱. (معادلات پنروز [1])([۱])

پنروز در سال ۱۹۵۵ نشان داد که برای هر ماتریس متناهی A با درایه های مختلط، ماتریسی مانند B موجود است که در چهار معادله زیر صدق می کند و معادله های پنروز می نامیم :

۱) $ABA = A$

۲) $BAB = B$

۳) $(AB)^* = AB$

۴) $(BA)^* = BA$

تعریف ۱۱.۱.۱. (معکوس مور-پنروز [2])

معکوس مور-پنروز ماتریس A، ماتریسی مانند B است که در چهار معادله پنروز صدق کند.

تعریف ۱۲.۱.۱. (معکوس درازین [3])

عنصر b معکوس درازین عنصر $a \in \mathcal{A}$ است و به صورت $b = a^D$ نوشته می شود هرگاه در سه شرط زیر صدق کند:

۱) $ab = ba$

[1] Penrose equation
[2] Moor-Penrose inverse
[3] Drazin inverse

۲) $b = b^{2}a$

۳) $a^{k} = ba^{k+1}$

برای هر عدد صحیح نامنفی k

تعریف ۱.۱.۱۳. (ماتریس معکوس پذیر)

ماتریس مربعی A معکوس پذیر نامیده می شود هرگاه ماتریسی $n \times n$ مانند B وجود داشته باشد، بطوریکه:

$$AB = BA = I_n.$$

تعریف ۱.۱.۱۴. (فضای سطری)

هرگاه $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$، فضای برداری تولید شده توسط بردارهای سطری ماتریس A، فضای سطری ماتریس A نامیده می شود و با $RS(A)$ نشان می دهند.

تعریف ۱.۱.۱۵. (جبر)([۱۱])

یک جبر فضای برداری A است همراه با نگاشت دو خطی

$$A \times A \longrightarrow A$$

$$(a, b) \longrightarrow ab$$

بطوریکه:

$$a(bc) = (ab)c \qquad (a, b, c \in A)$$

تعریف ۱.۱.۱۶. ($*$-جبر)

یک بازگشت روی جبر A نگاشت مزدوج خطی $a \longrightarrow a^*$ است بطوریکه

$$a^{**} = a \quad , \quad (ab)^* = b^*a^*$$

برای هر $a, b \in A$.

جفت $(A, *)$ یک $*$-جبر نامیده میشود.

تعریف ۱.۱.۱۷. (نرم زیر ضربی)

یک نرم روی جبر A زیر ضربی است اگر

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$$

در این حالت جفت $(A, \|.\|)$ یک جبر نرمدار نامیده می شود.

تعریف ۱.۱.۱۸. (جبر باناخ)

جبر نرمدار A اگر کامل باشد جبر باناخ نامیده می شود و اگر یکدار باشد جبر باناخ یکدار نامیده می شود.

تعریف ۱.۱.۱۹. ($*$-جبر باناخ)([۱۱])

$*$ -جبر باناخ یک $*$ -جبر A است با یک نرم کامل زیرضربی بطوریکه:

$$\|a^*\| = \|a\| \quad , \quad (a \in A)$$

بعلاوه اگر A عنصر یکه ای داشته باشد بطوریکه $\|1\| = 1$ می گوییم A، $*$-جبر باناخ یکدار است.

تعریف ۱.۱.۲۰. (C^*-جبر)

C^*-جبر یک $*$- جبر باناخ است بطوریکه:

$$\|a^*a\| = \|a\|^2$$

تعریف ۱.۱.۲۱. (طیف یک عنصر)

طیف عنصر a عبارت است از مجموعه زیر:

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda 1 - a \notin Inv(A)\}$$

که A یک جبر یکدار است و $a \in A$.

تعریف ۲۲.۱.۱. (عنصر نرمال)

عنصر $a \in \mathcal{A}$ نرمال است اگر $aa^* = a^*a$.

تعریف ۲۳.۱.۱. (عنصر شبه قطبی)

عنصر $a \in \mathcal{A}$ شبه قطبی است اگر $0 \notin acc\sigma(a)$ که $acc\sigma(a)$ بیانگر نقاط انباشتگی $\sigma(a)$ است.

قضیه ۲۴.۱.۱. اگر $a \in \mathcal{A}$ معکوس پذیر مورپنرز باشد آنگاه $aa^\dagger = a^\dagger a$ اگر و فقط اگر $a \in \mathcal{A}^{\mathcal{D}}$ و $a^\dagger = a^D$.

اثبات . برای اثبات به مرجع ([۸]) مراجعه شود. ■

قضیه ۲۵.۱.۱. $a \in \mathcal{A}^{\mathcal{D}}$ اگر و فقط اگر $a \in \mathcal{A}$ شبه قطبی باشد.

اثبات . برای اثبات به مرجع ([۸]) مراجعه شود. ■

قضیه ۲۶.۱.۱. اگر $a \in \mathcal{A}$ شبه قطبی و نرمال باشد آنگاه قطبی ساده است.

اثبات . برای اثبات به مرجع ([۸]) مراجعه شود. ■

قضیه ۲۷.۱.۱. عنصر a از یک C^*- جبر A معکوس پذیر مورپنرز است اگر وفقط اگر a^*a معکوس پذیر درازین باشد و اگر $a \in A^\dagger$ در این صورت:

$$a^\dagger = (a^*a)^D a^* = a^*(aa^*)^D$$

اثبات . برای اثبات به مرجع ([۸]) مراجعه شود. ■

قضیه ۲۸.۱.۱. فرض کنید $a \in \mathcal{A}$. در این صورت شرایط زیر هم ارزند:

۱) $a^\dagger a = aa^\dagger$

۲) $a^\dagger = a^D \quad , \quad a \in A^D$

۳) a قطبی ساده است.

اثبات. برای اثبات به مرجع ([۸]) مراجعه شود. ■

قضیه ۲۹.۱.۱. اگر $a \in \mathcal{A}^\mathcal{D}$ آنگاه $a^* \in \mathcal{A}^\mathcal{D}$ و $(a^*)^D = (a^D)^*$

اثبات. برای اثبات به مرجع ([۸]) مراجعه شود. ■

قضیه ۳۰.۱.۱. فرض کنیم a, b عناصر جابجایی از $\mathcal{A}$ باشند بطوریکه $a^D, b^D \in \mathcal{A}^\mathcal{D}$. در اینصورت $(ab)^D$ وجود دارد و $(ab)^D = a^D b^D$

اثبات. برای اثبات به مرجع ([۸]) مراجعه شود. ■

قضیه ۳۱.۱.۱. فرض کنیم A, B ماتریس های مختلط باشند. در اینصورت فرمول کلاین عبارت است از:

$$(AB)^D = A[(BA)^D]^۲ B$$

اثبات. برای اثبات به مرجع ([۳]) مراجعه شود. ■

فصل ۲

معکوس مور-پنروز حاصلضرب و تفاضل عملگرهای تصویر در C^* -جبرها

۱.۲ مقدمه

فرض کنیم H فضای هیلبرت، $B(H)$ مجموعه ی همه ی عملگرهای خطی کراندار روی H و $\mathcal{A}$ یک C^* -جبر با یکه e باشند. قرار می دهیم:

$$P(H) = \{p \in B(H) \,;\, p^{۲} = p = p^*\}$$

و

$$P(\mathcal{A}) = \{p \in \mathcal{A} \,;\, p^{۲} = p = p^*\}$$

فرض کنیم $a \in \mathcal{A}$ و $\sigma(a)$ طیف عنصر a و $acc\sigma(a)$ نقاط انباشتگی $\sigma(a)$ باشد. عنصر a شبه قطبی است اگر $۰ \notin acc\sigma(a)$ و قطبی است اگر شبه قطبی باشد و ۰ حداکثر یک قطب از $R(\lambda; a) = (\lambda e - a)^{-۱}$ باشد. در حالت خاص a قطبی ساده است اگر ۰ حداکثر یک قطب ساده از $R(\lambda; a)$ باشد.

در این فصل ما معکوس مور-پنروز حاصل ضرب و تفاضل عملگرهای تصویر را در یک C^* -جبر بررسی میکنیم. همچنین نشان می دهیم $pq - qp$ معکوس پذیر مور-پنروز است اگر و فقط اگر $p - q$ و pq معکوس پذیر مور-پنروز باشند.

۲.۲ قضایای اصلی

قضیه ۱.۲.۲. [۱۰] فرض کنید $a, b \in \mathcal{A}$ معکوس پذیر مور-پنروز باشند. اگر $a^*b = ۰ = ab^*$ آنگاه $a+b$ معکوس پذیر مور-پنروز است و $(a+b)^\dagger = a^\dagger + b^\dagger$.

اثبات. باید ثابت کنیم $a^\dagger + b^\dagger$ در چهار معادله تعریف معکوس مور-پنروز برای $a+b$ صدق می کند. برای بررسی خاصیت اول داریم:

$$(a+b)(a^\dagger + b^\dagger)(a+b) = aa^\dagger a + aa^\dagger b + ba^\dagger a + ba^\dagger b + ab^\dagger a + ab^\dagger b + bb^\dagger a + bb^\dagger b$$

از طرفی طبق یکی از خواص معکوس های مور-پنروز داریم:

$$a^\dagger = (a^*a)^\dagger a^* = a^*(aa^*)^\dagger \tag{۱.۲}$$

پس: .

$$aa^\dagger b = a(a^*a)^\dagger a^* b$$

اما طبق فرض مسأله $a^*b = ۰ = ab^*$ پس $aa^\dagger b = ۰$ و لذا داریم:

$$ba^\dagger a = ba^*(aa^*)^\dagger a = (ab^*)^*(aa^*)^\dagger a = ۰$$

$$ba^\dagger b = b(a^*a)^\dagger a^* b = ۰$$

$$ab^\dagger a = ab^*(bb^*)^\dagger a = ۰$$

$$ab^\dagger b = ab^*(bb^*)^\dagger b = ۰$$

$$bb^\dagger a = b(b^*b)^\dagger b^* a = b(b^*b)^\dagger (a^*b)^* = ۰$$

پس:

$$(a+b)(a^\dagger+b^\dagger)(a+b)=a+b$$

برای بررسی خاصیت دوم داریم:

$$a^\dagger+b^\dagger(a+b)a^\dagger+b^\dagger=a^\dagger aa^\dagger+a^\dagger ab^\dagger+a^\dagger ba^\dagger+a^\dagger bb^\dagger+b^\dagger aa^\dagger+b^\dagger ab^\dagger+b^\dagger ba^\dagger+b^\dagger bb^\dagger$$

اما طبق رابطه ۱.۲ داریم:

$$a^\dagger ab^\dagger=a^\dagger ab^*(bb^*)^\dagger=0$$

$$a^\dagger ba^\dagger=(a^*a)^\dagger a^*ba^\dagger=0$$

$$a^\dagger bb^\dagger=(a^*a)^\dagger a^*bb^\dagger=0$$

$$b^\dagger aa^\dagger=(b^*b)^\dagger b^*aa^\dagger=(b^*b)^\dagger(a^*b)^*a^\dagger=0$$

$$b^\dagger ab^*(bb^*)^\dagger=0$$

$$b^\dagger ba^\dagger=b^\dagger ba^*(aa^*)^\dagger=b^\dagger(ab^*)^*(aa^*)^\dagger=0$$

پس:

$$(a^\dagger+b^\dagger)(a+b)(a^\dagger+b^\dagger)=a^\dagger+b^\dagger.$$

دو معادله دیگر نیز بطور مشابه ثابت می شود. ■

قضیه ۲.۲.۲. ([۱۱]) فرض کنیم $a,b\in\mathcal{A}$. در اینصورت $\sigma(ab)\setminus\{0\}=\sigma(ba)\setminus\{0\}$

اثبات. داریم $a,b\in\mathcal{A}$ در اینصورت $1-ab$ معکوس پذیر است اگر و فقط اگر $1-ba$ معکوس پذیر با شد. این امر از این مطلب نتیجه می شود که اگر $1-ab$ دارای معکوس c باشد، در اینصورت $1-ba$ دارای معکوس $1+bca$ است و از این هم ارزی نتیجه میشود که $\sigma(ab)\setminus\{0\}=\sigma(ba)\setminus\{0\}$. ■