بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه یزد

دانشکده فیزیک

گروه اتمی و مولکولی

پایان نامه

برای دریافت درجه دکتری

فیزیک اتمی و مولکولی

بررسی برخی ویژگی‌های غیرکلاسیکی سیستم‌های کوانتومی حل‌پذیر و سالیتون‌های کوانتومی در محیط‌های غیرخطی

استادان راهنما: دکتر محمدکاظم توسلی

دکتر محسن حاتمی

استاد مشاور: دکتر رسول رکنی‌زاده

پژوهش و نگارش: غلامرضا هنرآسا

اردیبهشت‌ماه ۱۳۹۰

تقدیم به آنان که

کلامشان، صداقت

نگاهشان، محبت

و تبسم‌شان، حیات را برایم به ارمغان آورد؛

تقدیم به

چشمان پر محبت مادرم که زیباترین نقش نگارستان خاطرام، سیمای اوست

دل دریایی پدرم که تقویم زندگی نیز تلافی‌گر یک نگاه محبت آمیزش نیست

قدردانی و سپاس

به نام پروردگار یکتا

سپاس آن بی‌همتایی که چون همیشه با الطاف بی‌پایانش در انجام و به پایان رساندن این رساله مرا یاری نمود. او را سپاس می‌گویم که مرا لایق آموختن گردانید.

رهنمودهای بی‌دریغ و ارزنده اساتید بزرگوارم جناب آقای دکتر محمدکاظم توسلی و جناب آقای دکتر محسن حاتمی که هدایت این رساله را به‌عهده داشتند مرا بر آن می دارد که با این جملات کوتاه و ناکافی سپاسگزاری خود را از این بزرگواران بیان کنم. مراتب امتنان خویش را تقدیم استاد مشاور گرانقدرم جناب آقای دکتر رسول رکنی‌زاده می‌دارم که با در اختیار گذاشتن دانسته‌های علمی خود مرا قرین لطف خویش فرمودند. همچنین از آقایان دکتر عباس بهجت، دکتر ابوالفضل میرجلیلی، دکتر عبدالناصر ذاکری و دکتر سید جواد اخترشناس که زحمت داوری این رساله را برعهده داشتند قدردانی می‌کنم.

از خداوند می‌خواهم که توان سپاسگزاری از پدر و مادر عزیز و خواهران مهربانم را به من عطا کند که وجودشان در تمام طول زندگی برایم نعمتی بزرگ و مایه دلگرمی‌ام بوده است.

پیشگفتار

شناسایی و رده‌بندی حالت‌های مختلف میدان‌های تابشی در پژوهش‌های بنیادی اپتیک کوانتومی از اهمیت چشم‌گیری برخوردار است. درک سرشت کوانتومی تابش الکترومغناطیس و بررسی رفتارهای غیرکلاسیکی آن به همراه جستجوی طرح‌واره‌های نظری و تجربی برای تولید حالت‌های غیرکلاسیکی از جمله انگیزه‌های پژوهش‌های مذبور به حساب می‌آیند. در این رساله دو رده‌ی مهم از حالت‌های غیرکلاسیکی، یعنی حالت‌های همدوس و چلانده را مورد توجه قرار می‌دهیم و ساختارهای ریاضی- فیزیکی عامی را به‌منظور معرفی حالت‌های کوانتومی جدید ارائه می‌دهیم.

حالت‌های همدوس به‌عنوان نزدیک‌ترین حالت‌ها به کلاسیک نقش مهمی در زمینه‌های مختلف فیزیک به‌ویژه اپتیک کوانتومی دارند. در فصل اول ابتدا مروری بر حالت‌های همدوس و ویژگی‌های آن‌ها خواهیم داشت و برخی از تعمیم‌های صورت‌گرفته روی این حالت‌های را معرفی خواهیم کرد. در این میان به‌طور خاص به معرفی و توصیف حالت‌های همدوس غیرخطی یا حالت‌های همدوس-f، که در دهه‌های اخیر معرفی و بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند می‌پردازیم. به دلیل نقش اساسی‌ای است که این حالت‌ها در این پژوهش ایفا خواهند کرد، ضمن معرفی معیارهای غیرکلاسیکی‌ای مانند پارامتر مندل، تابع همبستگی مرتبه دوم، چلاندگی مرتبه اول و دوم، چلاندگی تعداد- فاز و تابع ویگنر تعداد- فاز، غیرکلاسیکی بودن حالت‌های معرفی شده را، علاوه بر آمار کوانتومی آن‌ها مورد بررسی قرار می‌دهیم. لازم به ذکر است که تابع غیرخطی‌ای که در هر یک از حالت‌های مورد بحث استفاده می‌شود عموما از یک فرآیند تغییر شکل جبری به‌دست می‌آید و بنابراین لزوما ناشی از یک پتانسیل فیزیکی نیست. در فصل دوم، رهیافت مطرح شده را به سامانه‌های کوانتومی حل‌پذیر با طیف گسسته ناتبهگن گسترش داده و شکل صریح حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته متناظر با برخی سامانه‌های فیزیکی از جمله طیف‌های هیدروژن- مانند، پتانسیل پوشل- تلر و نوسانگر آیزوتونیک را به‌دست می‌آوریم. همچنین ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت‌های معرفی شده را بررسی می‌کنیم و به‌منظور بررسی تحول زمانی حالت‌های معرفی شده، با الهام از حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر روشی را ارائه خواهیم داد. در فصل سوم، روشی را برای بنای حالت‌های همدوس متناظر با سامانه‌های کوانتومی حل‌پذیر با طیف تبهگن معرفی و توانایی رهیافت ارائه شده را با اعمال به چند سامانه کوانتومی معین با طیف تبهگن مانند چاه پتانسیل دوبعدی و نوسانگر هماهنگ دوبعدی و سه‌بعدی نشان خواهیم داد. در ضمن، با بررسی پاره‌ای از

معیارهای غیرکلاسیکی و مطالعه آمار کوانتومی آن‌ها رفتارهای غیرکلاسیکی این حالت‌ها را نیز مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

حالت‌های همدوس برای طیف پیوسته را در فصل چهارم مرور کرده و مشابه با حالت‌های فوتون- افزوده، ساختاری را برای بنای حالت‌های همدوس برانگیخته برای سامانه‌های فیزیکی با طیف پیوسته معرفی می‌کنیم. ویژگی‌های غیرکلاسیکی و آمار کوانتومی حالت‌های همدوس و همدوس برانگیخته برای طیف پیوسته نیز بررسی خواهد شد. سپس در فصل پنجم به‌طور خاص، به موضوع حالت‌های کوانتومی موسوم به چلانده به‌عنوان رده‌ی دیگری از حالت‌های غیرکلاسیکی خواهیم پرداخت و حالت‌های چلانده تعمیم‌یافته متناظر با سامانه‌های کوانتومی با طیف گسسته ناتبهگن را معرفی می‌کنیم. شکل صریح حالت‌های چلانده تعمیم‌یافته متناظر با چند سامانه‌های فیزیکی آشنا، از جمله طیف‌های هیدروژن- مانند و نوسانگر آیزوتونیک را به‌دست آورده و ویژگی‌های غیرکلاسیکی آنها را بررسی می‌کنیم.

در فصل ششم با توجه به کاربردهای روز افزون سالیتون‌ها، ابتدا مروری بر توصیف کلاسیکی انتشار سالیتون‌ها در فیبرهای اپتیکی خواهیم داشت. در ادامه، از آن‌جا که انتشار سالیتون‌های اپتیکی با اثرات کوانتومی غیر قابل اجتنابی همراه است به بررسی نظریه کوانتومی انتشار سالیتون‌ها در فیبرهای اپتیکی می‌پردازیم. معادله شرودینگر غیرخطی کوانتومی معادله‌ای است که معمولا برای مطالعه اثرات کوانتومی سالیتون‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این‌جا با استفاده از روش خطی‌سازی که در آن افت‌وخیزهای کوانتومی به عنوان اختلال‌های کوچک در نظر گرفته می‌شوند، به حل معادله شرودینگر غیرخطی کوانتومی برای سالیتون‌های روشن و تاریک می‌پردازیم و در پایان چلاندگی سالیتون‌های روشن و تاریک را با استفاده از آشکارسازی هموداین بررسی و با هم مقایسه خواهیم کرد.

فهرست مندرجات

چکیده

حالت‌های غیرکلاسیکی میدان تابشی در تحقیقات اخیر اهمیت ویژه‌ای پیدا کرده‌اند. در این پژوهش ساختارهای ریاضی- فیزیکی کلی‌ای به‌منظور معرفی حالت‌های کوانتومی جدید متناظر با چند سامانه کوانتومی معین و شناخته‌شده ارائه و برخی رفتارهای غیرکلاسیکی آن‌ها بررسی شده است. برای نیل به این هدف، پس از مروری بر حالت‌های همدوس و ویژگی‌های آن‌ها، به بررسی برخی از تعمیم‌های صورت‌گرفته روی حالت‌های همدوس به‌ویژه حالت‌های همدوس غیرخطی که در دهه‌های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند، پرداخته‌ایم. سپس، با گسترش رهیافت مطرح شده به سامانه‌های کوانتومی حل‌پذیر با طیف گسسته ناتبهگن، شکل صریح حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته متناظر با برخی سامانه‌های فیزیکی را به‌دست آورده‌ایم. برای ساخت حالت‌های همدوس متناظر با سامانه‌های کوانتومی حل‌پذیر با طیف تبهگن نیز روش جدیدی معرفی کرده و توانایی آن را با اعمال به چند سامانه کوانتومی تبهگن نشان داده‌ایم. در ادامه، حالت‌های همدوس برای طیف پیوسته را مرور کرده و ساختار عامی برای بنای حالت‌های همدوس برانگیخته برای سامانه‌های فیزیکی با طیف پیوسته را معرفی کرده‌ایم. سپس به‌طور خاص، به موضوع حالت‌های چلانده غیرخطی و حالت‌های چلانده متناظر با سامانه‌های کوانتومی با طیف گسسته ناتبهگن پرداخته و شکل صریح حالت‌های چلانده تعمیم‌یافته متناظر با چند سامانه‌ی فیزیکی را معرفی کرده‌ایم. در هر کدام از موارد فوق پس از معرفی ساختار و ارائه صورت‌بندی کلی، با بررسی پاره‌ای از معیارهای غیرکلاسیکی و مطالعه آمار کوانتومی حالت‌های همدوس یا چلانده، نشان داده شد که چگونه هریک از حالت‌های کوانتومی مورد بحث، جنبه‌های زیبایی از غیرکلاسیکی بودن را از خود بروز می‌دهند. با توجه به این‌که ویژگی‌های کوانتومی سالیتون‌های اپتیکی در محیط‌های غیرخطی اخیرا مورد توجه قرار گرفته‌اند، به بررسی نظریه کوانتومی انتشار آن‌ها در فیبرهای اپتیکی نیز پرداخته و چلاندگی سالیتون‌های روشن و تاریک را بررسی و مقایسه کرده‌ایم. نتایج محاسبات نشان داد که نسبت چلاندگی برای هردوی آن‌ها با انتشار درون فیبر کاهش می‌یابد.

فصل ۱

حالت‌های همدوس غیرخطی و برخی ویژگی‌های غیرکلاسیکی آن‌ها

۱.۱ مقدمه

در میان حالت‌های گوناگون میدان تابشی، حالت‌های همدوس به‌عنوان نزدیک‌ترین حالت‌ها به کلاسیک نقش مهمی در زمینه‌های مختلف فیزیک به‌ویژه اپتیک کوانتومی دارند [۱]. مفهوم حالت‌های همدوس نخستین بار توسط شرودینگر[۱] ضمن مطالعه نوسانگر هماهنگ کوانتومی در سال ۱۹۲۶ معرفی شد [۲]. اما نظریه حالت‌های همدوس در اوایل دهه ۶۰ میلادی توسط کلاودر[۲] [۳]، گلاوبر[۳] [۴] و سودارشان[۴] [۵] شکل‌گرفت. سپس، حالت‌های همدوس نه تنها در اپتیک کوانتومی [۱, ۶, ۷, ۸]، بلکه در حوزه‌های دیگر فیزیک مانند اطلاعات کوانتومی [۹]، فیزیک اتمی [۱۰]، فیزیک هسته‌ای [۱۱]، فیزیک ذرات بنیادی [۱۲]، فیزیک پلاسما [۱۳]، فیزیک ماده چگال [۶]، ترمودینامیک [۱۴]، کیهان‌شناسی [۱۵] و ... بسط و گسترش یافتند. در حقیقت حالت‌های همدوس تبدیل به یکی از پرکاربردترین ابزارها در فیزیک کوانتومی شده‌اند.

اهمیت حالت‌های همدوس از جمله به‌خاطر تعمیم‌هایی از آن‌هاست که توانایی‌شان در بروز ویژگی‌های غیرکلاسیکی میدان تابشی به اثبات رسیده است. حالت‌های همدوس غیرخطی یکی از تعمیم‌های مهم حالت‌های همدوس استاندارد هستند [۱۶, ۱۷]. در این تعمیم از یک تابع غیرخطی برای تغییر شکل عملگرهای نردبانی بوزونی استفاده می‌شود. در این فصل پس از نگاهی گذرا به حالت‌های همدوس استاندارد و تعمیم‌های مهم آن، به بررسی حالت‌های همدوس غیرخطی و ویژگی‌های غیرکلاسیکی آن‌ها خواهیم پرداخت.

[۱] Schrödinger
[۲] Klauder
[۳] Glauber
[۴] Sudarshan

۲.۱ حالت‌های همدوس

در این بخش به معرفی حالت‌های همدوس استاندارد می‌پردازیم. حالت‌های همدوس به‌عنوان ویژه‌حالت‌های عملگر نابودی توسط گلاوبر و سودارشان معرفی شدند [۴, ۵]. برای یک میدان تک مد داریم:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{۱.۲.۱}$$

که در آن α یک عدد مختلط است. بسط حالت‌های همدوس به‌صورت زیر خواهد بود:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n|n\rangle \tag{۲.۲.۱}$$

به‌سادگی داریم:

$$\begin{aligned} a|\alpha\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sqrt{n}|n-1\rangle \\ &= \alpha\sum_{n=0}^{\infty} C_n|n\rangle \end{aligned} \tag{۳.۲.۱}$$

رابطه‌ی بالا منجر به رابطه‌ی بازگشتی زیر می‌شود:

$$C_n\sqrt{n} = \alpha C_{n-1} \tag{۴.۲.۱}$$

و از آنجا خواهیم داشت:

$$C_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}C_0 \tag{۵.۲.۱}$$

ضریب C_0 از شرط بهنجارش به‌دست می‌آید:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 = |C_0|^2\sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |C_0|^2\exp|\alpha|^2 \tag{۶.۲.۱}$$

در نهایت حالت‌های همدوس را در پایه حالت‌های عددی می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \qquad \alpha\in\mathbb{C} \tag{۷.۲.۱}$$

برخی از ویژگی‌های مهم حالت‌های همدوس عبارت‌اند از [۱۸, ۱۹]:

الف) حالت‌های همدوس نامساوی هایزنبرگ را اشباع می‌کنند یا حالت‌هایی با کمینه عدم‌قطعیت

هستند. با استفاده از روابط

$$a = \frac{۱}{\sqrt{۲\hbar\omega}}(\omega x + ip)$$
$$a^\dagger = \frac{۱}{\sqrt{۲\hbar\omega}}(\omega x - ip) \qquad (۸.۲.۱)$$

و تعریف عدم‌قطعیت به‌صورت:

$$(\Delta z)^۲ = \langle z^۲\rangle - \langle z\rangle^۲, \qquad z \equiv x, p \qquad (۹.۲.۱)$$

پس از کمی عملیات جبری ساده خواهیم داشت:

$$(\Delta x)^۲_{|\alpha\rangle}(\Delta p)^۲_{|\alpha\rangle} = \frac{\hbar^۲}{۴} \qquad (۱۰.۲.۱)$$

که نشان می‌دهد حالت‌های همدوس کمینه عدم‌قطعیت را برآورده می‌کنند.

ب) میانگین عددی تعداد فوتون‌ها در حالت همدوس $|\alpha\rangle$ با رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود:

$$\langle n\rangle = \langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle = |\alpha|^۲ \qquad (۱۱.۲.۱)$$

همچنین احتمال مشاهده n فوتون در حالت $|\alpha\rangle$ با یک توزیع پواسونی[1] داده می‌شود:

$$\begin{aligned} p(n) &= \langle n|\alpha\rangle\langle\alpha|n\rangle \\ &= \frac{|\alpha|^{۲n}e^{-|\alpha|^۲}}{n!} \\ &= \frac{\langle n\rangle^n e^{-\langle n\rangle}}{n!} \end{aligned} \qquad (۱۲.۲.۱)$$

ج) مجموعه همه حالت‌های همدوس $|\alpha\rangle$ یک مجموعه کامل است.

برای نشان دادن این ویژگی انتگرال زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\int d^۲\alpha\ (\alpha^*)^n\alpha^m e^{-|\alpha|^۲} = \pi n!\delta_{nm} \qquad (۱۳.۲.۱)$$

که $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ است و انتگرال روی تمام مساحت صفحه مختلط گرفته می‌شود. به کمک این انتگرال و بسط حالت‌های همدوس در فضای فوک[2] (۷.۲.۱) داریم:

$$\frac{۱}{\pi}\int_{\mathbb{C}} |\alpha\rangle\langle\alpha|d^۲\alpha = \sum_{n=۰}^{\infty}|n\rangle\langle n| = \hat{I} \qquad (۱۴.۲.۱)$$

---

[1] Poissonian distribution

[2] Fock space

چون مجموعه‌ی حالت‌های فضای فوک $|n\rangle$ یک مجموعه متعامد کامل را تشکیل می‌دهند، سمت راست رابطه‌ی بالا عملگر واحد $\hat{I}$ را به‌دست می‌دهد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha = \hat{I} \tag{۱۵.۲.۱}$$

که رابطه‌ی کاملیت[۱] برای حالت‌های همدوس است.

د) دو حالت همدوس متناظر با ویژه‌توابع مختلف ($|\alpha\rangle$ و $|\alpha'\rangle$) نامتعامدند:

$$\langle\alpha|\alpha'\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \alpha'\alpha^* - \frac{1}{2}|\alpha'|^2\right) \tag{۱۶.۲.۱}$$

و بنابراین

$$|\langle\alpha|\alpha'\rangle|^2 = \exp(-|\alpha - \alpha'|^2) \tag{۱۷.۲.۱}$$

می‌بینیم که اگر اندازه‌ی $\alpha - \alpha'$ خیلی بزرگتر از یک باشد، حالت‌های $|\alpha\rangle$ و $|\alpha'\rangle$ تقریباً متعامد خواهند بود. درجه‌ی هم‌پوشانی این حالت‌ها از اندازه ضرب داخلی $\langle\alpha|\alpha'\rangle$ مشخص می‌شود. نتیجه رابطه‌ی (۱۶.۲.۱) این است که هر حالت همدوس را می‌توان بر حسب حالت‌های همدوس دیگر بسط داد:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \frac{1}{\pi}\int |\alpha'\rangle\langle\alpha'|\alpha\rangle d^2\alpha' \\ &= \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha' |\alpha'\rangle \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \alpha'^*\alpha - \frac{1}{2}|\alpha'|^2\right) \end{aligned} \tag{۱۸.۲.۱}$$

که نشان می‌دهد حالت‌های همدوس ابرکامل[۲] هستند.

ه) حالت‌های همدوس نتیجه جابه‌جایی حالت خلأ تحت کنش عملگر جابه‌جایی هستند:

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}|0\rangle = D(\alpha)|0\rangle \tag{۱۹.۲.۱}$$

با توجه به لم بیکر-هاسدورف، اگر A و B عملگرهایی باشند که برای آن‌ها داشته باشیم $[[A,B],A] = [[A,B],B] = 0$، رابطه‌ی زیر را داریم:

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]}e^A e^B \tag{۲۰.۲.۱}$$

حال اگر قرار دهیم $A = \alpha a^\dagger$ و $B = -\alpha^* a$ خواهیم داشت:

$$D(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} \tag{۲۱.۲.۱}$$

---
[۱] Completeness relation

[۲] Overcomplete

با استفاده از رابطه‌ی

$$|n\rangle = \left(\frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}\right)|۰\rangle \tag{۲۲.۲.۱}$$

می‌توانیم رابطه‌ی (۷.۲.۱) را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^۲}{۲}}\exp(\alpha a^{\dagger})|۰\rangle \tag{۲۳.۲.۱}$$

از آنجا که $\exp(-\alpha^* a)|۰\rangle = |۰\rangle$ است، می‌توان به‌سهولت به رابطه‌ی (۱۹.۲.۱) رسید.

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|۰\rangle \tag{۲۴.۲.۱}$$

و) حالت‌های همدوس برخوردار از ویژگی پایداری زمانی هستند.

با اعمال عملگر تحول زمانی روی حالت‌های همدوس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} e^{-iHt}|\alpha\rangle &= e^{-i(n+\frac{۱}{۲})\omega t}|\alpha\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^۲}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{-in\omega t}e^{-\frac{it}{۲}}|n\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^۲}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}e^{-\frac{it}{۲}}|n\rangle \\ &= e^{-\frac{it}{۲}}|\alpha e^{-i\omega t}\rangle \\ &= e^{-\frac{it}{۲}}|\alpha'\rangle \end{aligned} \tag{۲۵.۲.۱}$$

که در آن $\hbar = ۱$ فرض شده است و $\alpha' = \alpha e^{-i\omega t}$ است. لازم به توجه است که $e^{-i\omega t}$ تنها یک عامل فازی است، بنابراین حالت‌های همدوس با گذشت زمان همدوس می‌مانند.

به‌طور خلاصه حالت‌های همدوس استاندارد به سه روش تعریف می‌شوند [۲۰]:

۱) ویژه‌حالت‌های عملگر نابودی که تعریفی جبری است.

۲) حالت خلأ جابه‌جا شده که تعریفی برحسب نظریه گروه است.

۳) حالت‌هایی که کمینه عدم‌قطعیت را برآورده می‌کنند.

۳.۱ حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته

حالت‌های غیرکلاسیکی نور یک موضوع مهم در اپتیک کوانتومی هستند و اهمیت آن‌ها به‌دلیل کاربردهایی است که در محاسبات کوانتومی [۲۱]، مخابرات کوانتومی [۲۲]، رمزنگاری

کوانتومی [۲۳]، لیتوگرافی[۱] کوانتومی [۲۴] و ... دارند. با تعمیم حالت‌های همدوس می‌توان به حالت‌هایی دست یافت که ویژگی‌های غیرکلاسیکی بیشتری را بروز می‌دهند. حالت‌های همدوس به سه روش کلی تعمیم جبری، گروهی و دینامیکی تعمیم داده شده‌اند. تعمیم‌های دیگری نیز با تکیه بر برخی ویژگی‌های ساختاری یا ملاحظات فیزیکی انجام گرفته که در هیچ یک از این سه گروه قرار نمی‌گیرند. در ادامه برخی از حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته مهم را مطالعه خواهیم کرد.

۱.۳.۱ تعمیم جبری

تعمیم جبری حالت‌ها همدوس بر اساس تغییر جبر عملگرهای نابودی و آفرینش انجام می‌شود. یکی از تعمیم‌های جبری مهمی که در سال‌های اخیر بر نظریه حالت‌های همدوس داده شد حالت‌های همدوس غیرخطی است که در این‌جا به آن می‌پردازیم.

حالت‌های همدوس غیرخطی

حالت‌های همدوس که به‌عنوان ویژه‌حالت عملگر نابودی نوسانگر هماهنگ معرفی می‌شوند نقش مهمی در اپتیک کوانتومی و فیزیک نوین دارند [۱]. یکی از روش‌های تعمیم جبری، تغییر در شکل عملگرهای نابودی و آفرینش با یک تابع غیرخطی وابسته به شدت $f(n)$ طبق روابط زیر است:

$$A = af(n) = f(n+۱)a \qquad (۲۶.۳.۱)$$

$$A^\dagger = f^\dagger(n)a^\dagger = a^\dagger f^\dagger(n+۱) \qquad (۲۷.۳.۱)$$

که در آن a، $a^\dagger$ و $n = a^\dagger a$ به‌ترتیب عملگرهای نابودی، آفرینش و تعداد بوزونی هستند. به‌سادگی دیده می‌شود که این دو عملگر تغییر شکل‌یافته رابطه‌ی جابه‌جایی زیر را برآورده می‌کنند:

$$[n, A] = -A, \qquad [n, A^\dagger] = A^\dagger, \qquad (۲۸.۳.۱)$$
$$[A, A^\dagger] = (n+۱)f^\dagger(n+۱)f(n+۱) - nf^\dagger(n)f(n)$$

در بیشتر موارد $f(n)$ حقیقی و مثبت درنظر گرفته می‌شود یا به‌عبارتی $f^\dagger(n) = f(n)$. حالت‌های همدوس غیرخطی [۱۶] یا حالت‌های همدوس-f [۱۷] به‌عنوان ویژه‌حالت عملگر نابودی تغییر

[۱] Litography

شکل‌یافته A تعریف می‌شوند:

$$A|z,f\rangle = z|z,f\rangle \qquad (۲۹.۳.۱)$$

که در آن $z=|z|\,e^{i\varphi}$. شکل صریح این حالت‌ها در پایه حالت‌های عددی به‌صورت زیر است:

$$|z,f\rangle = \mathcal{N}_f(|z|^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}\;[f(n)]!}|n\rangle \qquad (۳۰.۳.۱)$$

که در آن $[f(n)]! \doteq f(n)f(n-1)...f(1)$ است و طبق قرارداد $[f(0)]!\doteq 1$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین $\mathcal{N}_f(|z|^2)$ ثابت بهنجارش است و با استفاده از شرط $\langle z,f|z,f\rangle = 1$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathcal{N}_f(|z|^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{n!\,([f(n)]!)^2} \qquad (۳۱.۳.۱)$$

با داشتن بسط هر حالت همدوس تعمیم‌یافته در فضای حالت‌های عددی می‌توان تابع غیرخطی متناظر با آن را به‌دست آورد. اگر بسط حالت همدوس تعمیم‌یافته به‌صورت زیر باشد:

$$|z,f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n |n\rangle \qquad (۳۲.۳.۱)$$

از مقایسه روابط (۳۲.۳.۱) و (۳۰.۳.۱) تابع غیرخطی متناظر با آن برابر است با:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{c_{n-1}}{c_n} \qquad (۳۳.۳.۱)$$

ثابت بهنجارش $\mathcal{N}_f(|z|^2)$ باید شرط $0 < |\mathcal{N}_f(|z|^2)| < \infty$ را برآورده کند که در این صورت برای مقادیر مجاز z، قید زیر را خواهیم داشت:

$$|z|^2 \leq \lim_{n\to\infty} n f^2(n) \qquad (۳۴.۳.۱)$$

این رابطه بیانگر این مطلب است که تابع غیرخطی $f(n)$ مشخص کننده‌ی ناحیه‌ای است که پارامتر z و در نتیجه حالت‌های همدوس روی آن تعریف می‌شوند.

مانکو[1] و همکارانش مشابه با نوسانگر هماهنگ هامیلتونی نوسانگر تغییر شکل‌یافته را به‌صورت زیر معرفی کردند [۱۷]:

$$H_M = \frac{1}{2}(A^\dagger A + AA^\dagger) \qquad (۳۵.۳.۱)$$

[1] Man'ko