بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور تبریز

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان

الگوریتم‌های نقطه-درونیِ اولیه-دوگان برای بهینه‌سازی نیمه-معیّن بر پایه‌ی یک هسته‌ی ساده

استاد راهنما

دکتر علیرضا غفّاری

استاد مشاور

دکتر محمّد چایچی

پژوهشگر

تهمینه جهانگیری

مرداد ماه ۱۳۸۷

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور

تاریخ ....
شماره ....
پیوست ....

باسمه تعالی

تصویب نامه پایان نامه

پایان نامه: **الگوریتمهای نقطه درونی اولیه – دوگان برای بهینه سازی نیمه معین بر پایه یک تابع هسته ساده**

که توسط **خانم تهمینه جهانگیری** تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می باشد.

تاریخ دفاع ۸۷/۵/۳   نمره : ۱۹٫- نوزده   درجه ارزشیابی: عالی

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱– آقای دکتر علیرضا غفاری حدیقه	استاد راهنما	استادیار	غفاری
۲– آقای دکتر محمد چایچی	استاد مشاور	استادیار	
۳– آقای دکتر میرکمال میرنیا	استاد ممتحن (داور)	دانشیار	
۴– آقای دکتر مهدی صحت خواه	نماینده گروه آموزشی	استادیار	

تقدیم به:

ساحت مقدس خداوند یکتا

و

پدر و مادر بزرگوارم

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس بی‌کران، خداوند یکتا را که به این‌جانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. باشد که بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشبرد دانش و دانش‌آموزی به کار ببرم.

وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر علیرضا غفّاری صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

هم چنین از دانشگاه پیام نور تبریز، دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تبریز و دانشگاه تربیت معلّم آذربایجان که استفاده از امکاناتشان را جهت ادامه‌ی تحصیل و تحقیق برایم فراهم آوردند، قدردانی می‌کنم. امید است که سپاس بی‌دریغ این‌جانب را بپذیرند.

از خانواده‌ی محترمم که در تمام مراحل همواره در کنار من بوده‌اند، سپاسگذاری می‌کنم.

بسم الله الرّحمن الرّحیم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمت‌های او ندانند، و کوشندگان، حقّ او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشهٔ تیزگام در راه شناسایی او لنگ است، و سَرِ فکرتِ ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، وبه رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگها لرزهٔ زمین را در مهار کشید.
گواهی می‌دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی‌همتاست. گواهیی از روی اعتقاد و ایمان، بی‌آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می‌دهم که محمّد(ص) بندهٔ او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه‌هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار، که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گَردِ دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل مُلزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می‌بینم از خلقت تو؛ و چه خُرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می‌بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمت‌های آن جهان.
خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راهِ پرسیدن را ندانم، صلاحِ کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنمایی‌های تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات حضرت علی (ع)

فهرست علائم

مجموعه بردارهای مثبت	$\mathbb{R}^n_{++}$
فضای تمام ماتریس‌های $m \times n$	$\mathbb{R}^{m\times n}$
ماتریس‌های مربعی $n \times n$	$\mathbb{R}^{n\times n}$
متغیر کمبود ماتریسی $n \times n$ متقارن مسأله‌ی دوگان نیمه—معیّن	S
مخروط‌های ماتریسی $n \times n$ متقارن متقارن معیّن مثبت	S^n
مخروط‌های ماتریسی$n \times n$ متقارن نیمه—معیّن مثبت	S^n_+
مخروط‌های ماتریسی $n \times n$ متقارن معیّن مثبت	S^n_{++}
ماتریس مربع متعامد	U
متغیر ماتریسی $n \times n$ متقارن مسأله‌ی اوّلیه نیمه—معیّن	X
بردار n مؤلفه‌ای	x
مؤلفه‌های x	x_i
مضرب لاگرانژی	y
مجموعه‌ی محدب	Z
اعداد صحیح	$\mathbb{Z}$
برای نشان دادن بردار x به صورت ماتریس قطری	$\mathrm{diag}(x)$
درون نسبی	Int
شرط نقطه—درونی	IPC
لگاریتم	log
عمل‌گر برای تبدیل بردار به ماتریس	Mat
رتبه یا بعد ماتریس	rank

فهرست علائم

اثر ماتریس A(مجموعه عناصر قطر اصلی)	$\mathrm{Tr}(A)$
عمل‌گر برای تبدیل ماتریس به بردار	Vec
پارامتر دقت	ε
پارامتر ثابت بهنگام مانع	θ
بردار مقادیر ویژهٔ V را با مرتب شده با ترتیب غیرصعودی	$\lambda(V)$
ماتریسی قطری که اعضای آن مقادیر ویژه‌ی ماتریس S است	Λ
بردار ویژه ماتریس A	λ_i
مقادیر منفرد ماتریس M	$\sigma_i(M)$
پارامتر آستانه‌ای	τ
تابع خود—منظم در حالت کلی	$\Upsilon_{p,q}(t)$
تابع مانع ماتریسی مقدار حقیقی	$\Psi(V)$
تابع هسته	$\psi(t)$
تابع مانع ماتریسی مقدار ماتریسی	$\psi(V)$
ماتریسی قطری که اعضای آن مقادیر ویژه‌ی ماتریس X است	Ω
جهت جستجو	$(\Delta S, \Delta y, \Delta X)$
معیّن مثبت بودن درماتریس‌ها و ترتیب جزئی اکید در مخروط‌ها	$\succ$
نیمه—معیّن مثبت درماتریس‌ها و ترتیب جزئی در مخروط‌ها	$\succeq$
برای ماتریس‌ها نشان‌دهنده نرم فروبینیوس و برای بردارها نشان دهنده نرم ۲ است	$\Vert.\Vert$
حاصلضرب داخلی ماتریس‌ها	$\bullet$

نام خانوادگی دانشجو: جهانگیری نام: تهمینه
عنوان: الگوریتم‌های نقطه-درونيِ اولیه-دوگان برای بهینه‌سازی نیمه-معیّن بر پایه‌ی یک هسته‌ی ساده
استاد راهنما : دکتر علیرضا غفّاری استاد مشاور: دکتر محمّد چایچی
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی دانشگاه پیام نور تبریز دانشکده علوم پایه تاریخ فارغ‌التحصیلی: تیر ماه ۱۳۸۷ تعداد صفحه: ۸۲
کلید واژه‌ها: بهینه‌سازی نیمه-معیّن، روش‌های نقطه-درونی، روش‌های اولیّه-دوگان، روش‌های بهنگام‌سازی بزرگ و کوچک، پیچیدگی چندجمله‌ای

چکیده

در این پایان‌نامه یک الگوریتم نقطه-درونيِ اولیّه-دوگان برای حل مسأله بهینه‌سازی نیمه-معیّن معرفی می‌شود، که بر پایه یک تابع هسته ساده که خود-منظم نیست استوار است.
تحلیل پیچیدگی الگوریتم‌های پایه‌ریزی شده روی این تابع هسته را با روش‌های بهنگام‌سازی بزرگ و روش‌های بهنگام‌سازی کوچک بررّسی می‌کنیم که کران‌های پیچیدگی این الگوریتم‌ها به خوبی کران‌های حالت‌های بهینه‌سازی خطی است.

فهرست مطالب

مقدمه

بهینه‌سازی نیمه—معیّن تعمیمی از بهینه‌سازی خطی است که در آن متغیّرهای برداری با متغیّرهای ماتریسی متقارن و قید نامنفی بودن متغیّرها با نیمه—معیّن بودن ماتریس‌ها جایگزین می‌شود. اگر ماتریس نیمه—معیّن قطری باشد، مسأله بهینه‌سازی نیمه—معیّن به مسأله بهینه‌سازی خطی تبدیل می‌شود. مسأله بهینه‌سازی نیمه—معیّن در واقع مسأله بهینه‌سازی محدّب در فصل مشترک یک مجموعه آفین و مخروط ماتریس‌های نیمه—معیّن مثبت است؛ و خواص مهم بهینه‌سازی‌های خطی از قبیل محدّب بودن، برقراری نظریه دوگانی و روش‌های تکراری پایه‌ریزی شده در نقاط درونی (مثل مسیر مرکزی) به بهینه‌سازی نیمه—معیّن نیز قابل تعمیم است.

در دهه اخیر، مسأله بهینه‌سازی نیمه—معیّن به یکی از فعّال‌ترین زمینه‌های تحقیقی در بهینه‌سازی ریاضی تبدیل شده‌است. دو عامل مهمّ باعث افزایش علاقمندی در مسأله نیمه—معیّن و مطالعه عمیق آن شده‌است. اولاً: مسأله نیمه—معیّن در زمینه‌های مختلف مثل آمار، طراحی سازه‌ها، مهندسی الکترونیک و بهینه‌سازی ترکیباتی کاربردهای زیادی دارد[20]؛ و لذا یافتن روش‌های جدید و مناسب برای حل آن به یک ضرورت تبدیل شده‌است. ثانیاً: چندین روش نقطه—درونی که برای بهینه‌سازی خطی طراحی شده‌اند با موفقیّت به بهینه‌سازی نیمه—معیّن هم توسعه یافته‌اند و بخصوص الگوریتم‌های نقطه—درونی اولیّه—دوگان هم از

دیدگاه نظری و هم در عمل بسیار مؤثر هستند. یک مقاله مهم در این زمینه به وسیله تاد و نستروف، تالیف شده است [10,11]؛ اخیراً پنگ، [12,13] تابع‌های هسته (و مانع) خود—منظم را معرفی کرده‌است. تابع خود—منظم در حالت کلی به‌صورت

$$\Upsilon_{p,q}(t)=\frac{t^{p+1}-1}{p(p+1)}+\frac{t^{1-q}-1}{q(q-1)}+\frac{p-q}{pq}(t-1),$$

تعریف می‌شود [13 , 14] که در آن $p\geq 1$ و $q>1$. پارامتر p مرتبه رشد و q مرتبه مانع از تابع هسته نامیده می‌شود.

بر اساس این توابع هسته، الگوریتم‌های نقطه—درونی اولیّه—دوگان برای بهینه‌سازی خطی بر پایه توابع خود—منظم طراحی شده و نیز روش را به بهینه‌سازی نیمه—معیّن توسعه داده‌اند. کران‌های پیچیدگی به‌دست آمده به وسیله این محققین که به ترتیب برای روش‌های بهنگام‌سازی کوچک و بهنگام‌سازی بزرگ $\mathcal{O}(\sqrt{n})\log\frac{n}{\epsilon}$ و $\mathcal{O}(\sqrt{n}\log n)\log\frac{n}{\epsilon}$ است سال ۲۰۰۵ میلادی، بهترین کران‌های شناخته شده هستند.

در این پایان‌نامه، یک الگوریتم نقطه—درونی اولیّه—دوگان برای بهینه‌سازی نیمه—معیّن بر پایه‌ی تابع هسته

$$\psi(t)=t-1+\frac{t^{1-q}-1}{q-1},\qquad t>0, \tag{۱.۰}$$

معرفی می‌کنیم که در آن $q>1$ یک پارامتر است. این تابع هسته، یک تابع مقدار ماتریسی $\psi(V)$ را مشخص می‌کند، و یک تابع مقدار حقیقی $\Psi(V)$، به‌صورت

$$\Psi(V):=\ \mathrm{Tr}(\psi(V)),\qquad V\in\mathcal{S}^n_{++},$$

تعریف می‌شود که در آن $\mathcal{S}^n_{++}$ نشان‌دهنده مخروط‌های ماتریسی $n\times n$ متقارن معیّن مثبت

است[2,3]. در [18]، چند ابزار جدید برای تحلیل الگوریتم نقطه—درونی اولیّه—دوگان بر پایه $\psi(t)$ توسعه داده شده‌است. این ابزارها باعث می‌شود تحلیل همگرایی الگوریتم ارائه شده در این پایان‌نامه خیلی ساده‌تر از موارد مشابه صورت گرفته در منابع [12,13] باشد. نتایج پیچیدگی را برای روش‌های بهنگام‌سازی بزرگ و بهنگام‌سازی کوچک استخراج می‌کنیم که کران‌های پیچیدگی به خوبی کران‌های موارد بهینه‌سازی خطی است.

این پایان‌نامه به‌صورت زیر قالب‌بندی شده‌است. در فصل اوّل، ابتدا تعاریف و مفاهیم اوّلیه‌ی مربوط به جبرخطی و آنالیز که برای درک مفاهیم فصل‌های بعدی ضروری است مطرح شده است. در فصل دوّم با معرّفی بهینه‌سازی نیمه—معیّن، مفاهیم پایه‌ای از روش‌های نقطه—درونی برای حل مسأله بهینه‌سازی نیمه—معیّن، مانند مسیر مرکزی و روش‌های جستجوی NT (نستروف، تاد) یادآوری می‌شود. در فصل سوّم الگوریتم نقطه—درونی اوّلیه—دوگان بر پایه $\Psi(V)$ ، برای بهینه‌سازی نیمه—معیّن توصیف می‌شود و سپس خصوصیات $\psi(t)$ را معرفی کرده و توابع ماتریسی $\Psi(V), \psi(V)$، مطالعه می‌شوند. تحلیل الگوریتم و کران پیچیدگی، برای روش‌های بهنگام‌سازی کوچک و بزرگ در فصل چهارم استخراج می‌شوند.

فصل ۱

مقدمات جبرخطی و آنالیز

۱.۱ آنالیز محدّب

بردار x را به‌صورت n مؤلفه‌ای $(x_1, \ldots, x_n)^T$ در $\mathbb{R}^n$ در نظر می‌گیریم و x_i ها را مؤلفه‌های x می‌نامیم. $\mathbb{R}^n$، $\mathbb{R}^n_+$ و $\mathbb{R}^n_{++}$ به ترتیب مجموعه بردارهایی با n مؤلفه، مجموعه بردارهای نامنفی و مجموعه بردارهای مثبت را نشان می‌دهند. حاصلضرب مؤلفه‌ای دو بردار $x, s \in \mathbb{R}^n$ به حاصلضرب هادامارد[1] مشهور است و به‌صورت xs نشان داده می‌شود. مؤلفه i ام xs برابر $x_i s_i$ است. به مجموعه‌ی Z در $\mathbb{R}^n$ که شامل تمام بردارهای n بعدی است، «مجموعه‌ی محدب» گفته می‌شود، اگر و تنها اگر ترکیب محدّب هر دو عضو خود را شامل شود. به عبارتی؛ پاره‌خط واصل دو نقطه دلخواه از مجموعه محدّب در مجموعه محدّب قرار گیرد.

مجموعه محدّب Z داده شده است. نقطه $z \in Z$ در «درون نسبی» مجموعه Z قرار دارد اگر به ازای هر $\bar{z} \in Z$، نقطه $\tilde{z} \in Z$ و $0 < \lambda < 1$ وجود داشته باشند به‌طوری که $z = \lambda \bar{z} + (1-\lambda)\tilde{z}$. مجموعه نقاط درون نسبی مجموعه محدّب Z، با $\mathrm{Int}(Z)$ نشان داده می‌شود که زیر مجموعه محدّب از Z است.

[1] Hadamard

تعریف ۱ : تابع $f : Z \to \mathbb{R}$ تعریف شده روی مجموعه محدّب Z، «محدّب» نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $z_1, z_2 \in Z$ و $0 < \lambda < 1$ داشته باشیم:

$$f(\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2) \leq \lambda f(z_1) + (1-\lambda)f(z_2).$$

این تابع، «محدّب اکید» است هرگاه:

$$f(\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2) < \lambda f(z_1) + (1-\lambda)f(z_2).$$

لم ۱.۱ [16] : اگر f تابع محدّبی تعریف شده روی مجموعه محدّب Z باشد، آن‌گاه f روی $\mathrm{Int}(Z)$ پیوسته است؛ که در آن $\mathrm{Int}(Z)$ درون نسبی مجموعه Z است.

در این پایان‌نامه، مجموعه تمام توابع دو بار مشتق‌پذیر و پیوسته را با C^2 نشان می‌دهیم.

۲.۱ ماتریس

فضای تمام ماتریس‌های $m \times n$ را با $\mathbb{R}^{m\times n}$ نشان می‌دهیم. دستگاه n معادله و n مجهولی همگن به شکل ماتریسی

$$(A - \lambda I)x = 0, \qquad (۱.۱)$$

را در نظر می‌گیریم. این دستگاه معادلات، جواب بدیهی $x = 0$ دارد، مگر این‌که دترمینان ماتریس ضرایب $A - \lambda I$، صفر باشد،

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0.$$

تابع $f(\lambda)$، یک چندجمله‌ای از درجه n است که «چندجمله‌ای مشخصه» A نامیده می‌شود. ریشه‌های این معادله، مقادیر ویژه ماتریس A هستند و با λ_i، $(i = 1, \ldots, n)$ نشان داده می‌شوند. متناظر با هر λ_i دستگاه (۱.۱) جوابی به شکل αx_i دارد که x_i یک بردار غیرصفر است و α یک ثابت دلخواه است. این بردارها، بردارهای ویژه ماتریس A، نظیر λ_i ها نامیده می‌شوند.

ماتریس مربعی U را «متعامد» گوییم هرگاه $U^TU = I$ ؛ $(U^{-1} = U^T)$. ماتریس متقارن A را « معیّن‌مثبت » گوییم هرگاه به ازای هر بردار $x \neq 0$ داشته باشیم: $x^TAx > 0$. ماتریس متقارن A « نیمه—معیّن‌مثبت » است هرگاه به ازای هر $x \neq 0$ داشته باشیم $x^TAx \geq 0$. نامساوی $A \succeq 0$ به این معنی است که A نیمه—معیّن مثبت است. لذا $A \succeq B$ $(A \succ B)$ مستلزم آن است که $A - B$ نیمه—معیّن مثبت (معیّن مثبت) باشد. مجموعه‌ی ماتریس‌های متقارن را با S^n، نیمه—معیّن مثبت را با S^n_+ و معیّن مثبت را با S^n_{++} نشان می‌دهیم.

خواص ماتریس‌های معیّن مثبت[8]:

۱) ماتریس متقارن $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ معیّن مثبت است اگر و فقط اگر همه مقادیر ویژهٔ آن مثبت باشند.

۲) در هر ماتریس معیّن مثبت، عناصر قطری مثبت هستند.

۳) جمع دو ماتریس معیّن مثبت؛ معیّن مثبت است.

۴) اگر A معیّن مثبت باشد A^n نیز معیّن مثبت است $(n \in \mathbb{Z})$.

۵) هر ماتریس معیّن مثبت، نامنفرد است.

٦) اگر A معیّن مثبت و B نیمه‌معیّن مثبت باشد، آن‌گاه $A + B$ نیمه‌معیّن مثبت است.

توجه داشته باشید که اگر A, B معیّن مثبت باشند ممکن است AB معیّن مثبت نباشد.

اگر A یک ماتریس متقارن $n \times n$ باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های روی قطر ماتریس A را

«اثر» ماتریس A گوییم و با $\mathrm{Tr}(A)$ نمایش می‌دهیم.

$$A = [a_{ij}], i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

برای ماتریس‌های P و Q در $\mathbb{R}^{n\times n}$ ، ضرب داخلی بین آنها در فضای برداری $\mathbb{R}^{n\times n}$ به‌صورت

$$P \bullet Q = \mathrm{Tr}(P^TQ) = \sum_{i=1}^{n}(P^TQ)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P_{ij}Q_{ij},$$

تعریف می‌شود؛ که برابر با مجموع عناصر قطر اصلی ماتریس P^TQ است[8].

قضیه ۲.۱ [20] (قضیه شُر) : اگر A یک ماتریس مربعی باشد، آن‌گاه یک ماتریس متعامد U وجود دارد به طوری که $UAU^T = T$ که T یک ماتریس بالامثلثی است.

متناظر با بردار $x \in \mathbb{R}^n$، ماتریس قطری را با $X = \mathrm{diag}(x)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۱ [19] (قضیه طیفی برای ماتریس‌های متقارن) : ماتریس حقیقی $n \times n$، A متقارن است اگر و تنها اگر، یک پایه متعامد حقیقی و قطری داشته باشد. یعنی: اگر و تنها اگر یک ماتریس $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ وجود داشته باشد به‌طوری که $U^TU = I$ و $U^TAU = \Lambda$. که در آن Λ ماتریسی قطری است.

ستون‌های u_i از ماتریس متعامد U بردارهای ویژه A هستند که در

$$Au_i = \lambda_i u_i, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

صدق می‌کنند؛ که در آن λ_i؛ i امین درایه قطری Λ است.