

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی
گروه مهندسی مکانیک

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته مهندسی مکانیک- طراحی کاربردی

مطالعه تجربی و عددی تغییرات پارامترهای مکانیک شکست در ترک خارجی استوانه های اتوفر تاژ شده تحت فشار داخلی

استاد راهنما:

دکتر رحمن سیفی

اساتید مشاور:

دکتر غلامحسین مجذوبی

دکتر امیرحسین محمودی

پژوهشگر:

مجید باب الحوائجی

تابستان ۸۸

تقدیم به پدرم که از هیچ تلاشی برای پیشرفت من دریغ نکرد
و تقدیم به مادرم که اکنون جایش خالیست و در آخر هم
تقدیم به همسرم که در سختی‌ها همراهم بود.

با تقدیر و تشکر از جناب دکتر رحمن سیفی بخاطر تمام زحماتی که کشیدند و همکاری‌هایی که در انجام این پایان‌نامه انجام دادند. و همچنین از اساتید مشاور بخصوص از جناب دکتر محمودی جهت رهنمودهایشان صمیمانه تشکر می‌شود.

نویسنده: مجید باب الحوائجی	
عنوان پایان نامه: مطالعه تجربی و عددی تغییرات پارامترهای مکانیک شکست در ترک خارجی استوانه های اتوفرتاژ شده تحت فشار داخلی	
استاد راهنما: دکتر رحمن سیفی اساتید مشاور: دکتر غلامحسین مجذوبی دکتر امیرحسین محمودی	
درجه: کارشناسی ارشد	زمینه مطالعه: مکانیک شکست
رشته: مکانیک - طراحی کاربردی	تاریخ دفاع: ۱۳۸۸/۰۷/۱۴
دانشکده: مهندسی - دانشگاه بوعلی	تعداد صفحات: ۱۲۱
کلمات کلیدی: اتوفرتاژ - شکست - تنش پسماند - ترک خارجی - انتگرال J - مخزن	
چکیده: یکی از روش‌های مؤثر در بالا بردن تحمل فشار در استوانه‌های جدار ضخیم، ایجاد تنش پسماند فشاری توسط فرآیند اتوفرتاژ در جدار آنها می‌باشد. در اتوفرتاژ یک مخزن استوانه‌ای جدار ضخیم را تا حدی تحت فشار داخلی قرار می‌دهند که جدار داخلی آن تا شعاع معینی وارد فاز پلاستیک شود. پس از باربرداری تنش پسماند فشاری در جدار استوانه باقی می‌ماند. در این پژوهش به بررسی استوانه‌های اتوفرتاژ با ترک خارجی پرداخته شده است. برای این منظور ابتدا اتوفرتاژهایی با نسبت ۵۰٪ و ۱۰۰٪ بر روی نمونه‌های استوانه‌ای آلومینیومی با قطرهای خارجی و داخلی (۲۵ و ۳۵) و (۲۰ و ۳۰) بدست آمد. سپس ترک‌های بیضی شکل با نسبت طول به عمق ۱/۵ و با زوایه‌های صفر، ۳۰، ۶۰ و ۹۰ درجه نسبت به خط عمود بر محور استوانه و در سطح خارجی آن ایجاد گردیدند، پس از آن استوانه‌ها تحت فشار داخلی قرار گرفته و باز شدگی دهانه ترک توسط چسب رپلیکا اندازه‌گیری گردید. در نهایت فشار آنقدر بالا برده شد تا استوانه‌ها ترکیدند. شبیه‌سازی این فرآیند با روش المان محدود انجام شد و نتایج بدست آمده از دو روش با هم مقایسه گردیده است. مقایسه نتایج بدست آمده از نرم‌افزار المان محدود (ABAQUS) با نتایج تجربی، نشان دهنده تطبیق خوب نتایج تجربی و شبیه‌سازی است. همچنین از آنجا که باز شدگی دهانه ترک یکی از پارامترهای شکست در ترک محسوب می‌شود پارامتر انتگرال J نیز در طول ترک از شبیه‌سازی عددی بدست آمد. در نهایت نتایج بدست آمده با هم مقایسه شدند و یک روند کلی در کار مشاهده شد. بدین صورت که با افزایش هر یک از پارامترهای زاویه صفحه ترک با محور طولی استوانه، نسبت طول به عمق ترک، عمق ترک و افزایش میزان اتوفرتاژ، پارامتر انتگرال J افزایش می‌یابد.	

فهرست

مقدمه.....	۱
مقدمه.....	۲
فصل اول: الاستوپلاستیسیته در مخازن تحت فشار.....	۵
۱-۱- مقدمه.....	۶
۲-۱- استوانه های جدار ضخیم.....	۶
۱-۲-۱- تاثیر فشار در حالت الاستیک.....	۶
۲-۲-۱- رفتار الاستو- پلاستیک مخازن استوانه ای.....	۱۱
فصل دوم: تئوری اتوفرتاژ و پیشینه پژوهش.....	۲۱
۱-۲- مقدمه.....	۲۲
۳-۲- اتوفرتاژ.....	۲۱
۱-۳-۲- ساده ترین روش تئوری بررسی اتوفرتاژ.....	۲۳
۲-۳-۲- محاسبه فشار اتوفرتاژ.....	۲۴
۳-۲- بررسی پدیده اتوفرتاژ با در نظر گرفتن کرنش سختی و اثر باشینگر.....	۲۷
۴-۲- اتوفرتاژ بدون اثر کرنش سختی در بارگذاری.....	۳۹
۵-۲- بدست آوردن شعاع بهینه اتوفرتاژ.....	۴۲
۱-۵-۲- محاسبه شعاع بهینه بخش الاستیک و پلاستیک.....	۴۳
فصل سوم: مقدمه ای بر مکانیک شکست.....	۴۶
۱-۳- مکانیک شکست.....	۴۷
۱-۱-۳- مقدمه.....	۴۷
۲-۱-۳- رهیافت های مکانیک شکست.....	۴۷
۳-۱-۳- مکانیک شکست ارتجاعی خطی.....	۴۸
۴-۱-۳- مکانیک شکست الاستیک-پلاستیک.....	۵۳
۲-۲- اثر تنش پسماند بر روی ترک در استوانه های اتوفرتاژ شده.....	۵۶
۱-۲-۳- بررسی عمر خستگی استوانه های اتوفرتاژ شده با ترک های شعاعی.....	۵۹
۱-۲-۳- تاثیر چند ترکی در استوانه های اتوفرتاژ شده.....	۶۰
۲-۲-۳- تعریف انگرال-J در وجود تنش پسماند.....	۶۰
فصل چهارم: تحلیل عددی FEM توسط نرم افزار المان محدود.....	۶۳
۱-۴- مقدمه.....	۶۴
۲-۴- تحلیل عددی بوسیله نرم افزار ABAQUS.....	۶۶
۱-۲-۴- خواص مواد.....	۶۶
۲-۲-۴- مشخصات ترک در استوانه.....	۶۷
۳-۲-۴- روش انجام کار.....	۶۹

۷۱	۳-۴- نتایج
۷۵	۳-۴-۱- تاثیر اتوفرتاژ بر روی ترک در جدار خارج استوانه
۸۲	۳-۴-۲- تاثیر اتوفرتاژ و فشار داخلی بر روی ترک در جدار خارجی استوانه
۹۳	فصل پنجم: نتایج آزمایشگاهی
۹۴	۵-۱- مقدمه
۹۴	۵-۲- شرح دستگاه آزمایش
۹۷	۵-۳- ماده مورد آزمایش
۹۷	۵-۴- طراحی و ساخت نمونه
۹۸	۵-۵- روش انجام آزمایش
۱۰۱	۵-۵-۱- اندازه گیری فشار ترکیدگی
۱۰۲	۵-۶- نتایج آزمایش عملی
۱۰۶	فصل ششم: نتیجه گیری و پیشنهاد
۱۰۷	۶-۱- نتیجه گیری
۱۰۸	۶-۱- پیشنهاد
۱۰۹	مراجع
۱۱۲	پیوست آ
۱۱۶	پیوست ب

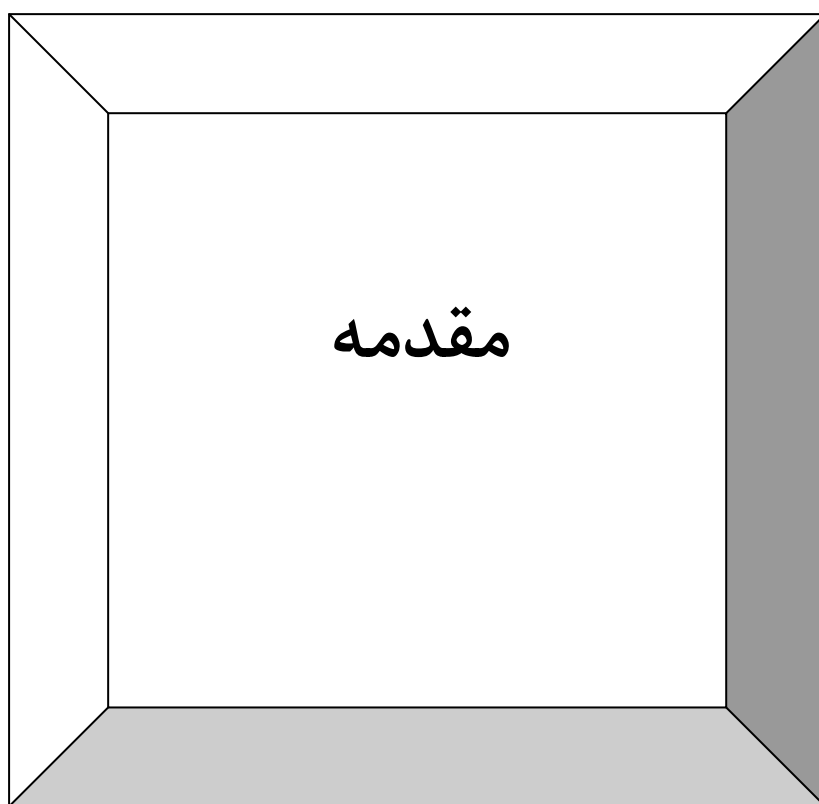
فهرست اشکال

- شکل (۱-۱): نمایش تنشهای عمل کننده روی یک جزء استوانه ۷
- شکل (۱-۲): نمایش تنشهای در جدار مخزن ۱۰
- شکل (۱-۳): فاز الاستیک و پلاستیک در جدار مخزن ۲۱
- شکل (۲-۱): منحنی تنش- کرنش در بارگذاری و باربرداری ۲۸
- شکل (۲-۲): رابطه باشینگر با مقدار پلاستیک ۲۹
- شکل (۴-۱): توزیع تنشهای موثر در بارگذاری و بار برداری ۱۸
- شکل (۴-۲): فشار داخلی و تغییر مکان باقیمانده برا مخزن با $K=2$ ۳۴
- شکل (۵-۲): فشار داخلی و تغییر مکان باقیمانده برا مخزن با $K=3$ ۳۴
- شکل (۶-۲): تنشهای پسماند محیطی بعد از اتوفرتاژ ($K=2$) ۳۴
- شکل (۷-۲): تنشهای پسماند محیطی بعد از اتوفرتاژ ($K=3$) ۳۴
- شکل (۸-۲): مقایسه تنشهای پسماند محیطی بین سه مدل ماده ($K=2, \rho/a=1.75$) ۳۵
- شکل (۹-۲): مقایسه تنشهای پسماند محیطی بین سه مدل ماده ($K=3, \rho/a=2$) ۳۵
- شکل (۱۰-۲): مقایسه تنشهای باقی مانده محیطی بین سه مدل ماده ($K=3, \rho/a=3$) ۳۵
- شکل (۱۱-۲): مقایسه توزیع تنشهای پسماند ۳۶
- شکل (۱۲-۲): تغییرات تنش در جدار داخلی در طول اتوفرتاژ ۳۶
- شکل (۱۳-۲): منحنی تنش- کرنش بدون اثر کرنش سختی در بارگذاری ۳۹
- شکل (۱۴-۲): تاثیر اثر باشینگر بر تنش پسماند ($m' = 0$) ۴۱
- شکل (۱۵-۲): تاثیر اثر باشینگر بر تنش پسماند ($m' = 0.3$) ۴۱
- شکل (۱۶-۲): تاثیر اثر باشینگر و کرنش سختی بر تنش پسماند ۴۲
- شکل (۱۷-۲): منحنی وان مایسز- هنکی برای یک سیلندر تحت فشار ۴۱
- شکل (۱-۳): سه روش ممکن در بارگذاری روی ترک ۴۸
- شکل (۲-۳): شرایطی که تحت آن LFM صادق میباشد (a) یا صادق نمیشد (b, c و d) ۴۹
- شکل (۳-۳): تنش در صفحه ای با پهنای نامحدود ۵۰
- شکل (۴-۳): شکست در جابجایی ثابت ۵۲
- شکل (۵-۳): کانتور وابسته به مسیر برای جسم الاستیک ترکدار ۵۵
- شکل (۶-۳): (الف) جابجایی در مرکز نوک ترک و (ب) جابجایی در تقاطع 90° ۵۶
- شکل (۷-۳): نمایش حالت چند ترکی برای حالت ترکهای طولی ۵۹
- شکل (۱-۴): نمودار تنش- کرنش مهندسی آلیاژ آلومینیوم در کشش یک بعدی ۶۶
- شکل (۲-۴): تعریف زاویه ترک با خط عمود بر طول استوانه ۶۷
- شکل (۳-۴): تعریف پارامترهای ترک در یک استوانه با ترک بیضی شکل طولی ($\theta = 90$) ۶۷
- شکل (۴-۴): تعریف پارامترهای طول ترک در یک استوانه با ترک بیضی شکل محیطی ($\theta = 0$) ۶۸
- شکل (۵-۴): تعریف شکلهای مختلف ترک در یک استوانه (بیضی- دایره- بیضی معکوس) ۶۸
- شکل (۶-۴): یک نمونه استوانه المان بندی شده ۶۹
- شکل (۷-۴): ریز کردن المان در اطراف ترک ۶۹
- شکل (۱۲-۴ الف): تنش پسماند در استوانه با $K=1/5$ ۷۳
- شکل (۱۲-۴ الف): تنش پسماند در استوانه با $K=1/5$ ۷۳

- شکل (۱-۵): نمای شماتیک پمپ ۹۱
- جدول (۱-۵): مشخصات پمپ مورد استفاده ۹۲
- شکل (۲-۵) - آب بندی در دو طرف آداپتور ۹۳
- شکل (۳-۵) - آداپتور فولادی طراحی شده ۹۴
- شکل (۴-۵): نمودار تنش- کرنش آلیاژ آلومینیوم در کشش یک بعدی ۹۵
- شکل (۵-۵): نقشه نمونه ساخته شده ۹۵
- شکل (۶-۵): یک نمونه از ترک شبیه سازی شده با زاویه $\theta = 30^\circ$ نسبت به خط عمود بر محور استوانه ۹۷
- شکل (۷-۵): دو نمونه از استوانه ترکیده با زوایای $\theta = 90^\circ, 30^\circ$ نسبت به خط عمود بر محور استوانه ۱۰۰
- جدول (۲-۵): مقایسه نتایج آزمایش و حل عددی بازشدگی دهانه ترک ۱۰۱
- شکل (۸-۵): نمایش نتایج آزمایشی برای بازشدگی دهانه ترک ۱۰۱
- شکل (۹-۵): یک نمونه از استوانه ترکیده با زاویه $\theta = 60^\circ$ نسبت به خط عمود بر محور استوانه ۱۰۲

فهرست جدول‌ها

- جدول (۱-۲): تغییرات تنشها در جدار داخلی سیلندر ۳۷
- جدول (۱-۴): فشار ترکیدگی در استوانه ها ۸۵
- جدول (۱-۵): مشخصات پمپ مورد استفاده ۹۲
- جدول (۲-۵): مقایسه نتایج آزمایش و حل عددی بازشدگی دهانه ترک ۱۰۱
- جدول (۳-۵): مقایسه نتایج آزمایش و حل عددی فشار ترکیدگی ۱۰۲



یکی از روش‌های مؤثر در بالا بردن تحمل فشار در استوانه‌های جدار ضخیم، ایجاد تنش پسماند فشاری در جدار آنها می‌باشد. برای ایجاد تنش پسماند در استوانه‌های جدار ضخیم دو روش متداول وجود دارد:

یک روش تشکیل استوانه مرکب از دو یا چند استوانه ساده می‌باشد که به صورت پرسی^۱ در داخل هم جا زده می‌شوند. این انطباق پرسی باعث ایجاد تنش پسماند در استوانه مرکب می‌گردد. روش دیگر پلاستیک کردن جدار استوانه ساده تا شعاع معین توسط فشار داخلی می‌باشد^۲ که پس از باربرداری توزیع تنش پسماند فشاری در استوانه باقی می‌ماند و موجب بالا رفتن فشار ترکیدگی استوانه می‌شود.

اگر به دلایلی در جدار داخلی یا جدار خارجی استوانه اتوفرتاژ شده ترک ایجاد شود، این ترک بر حسب شکل و ابعاد ترک و اندازه استوانه و میزان اتوفرتاژ بر عمر و فشار تحمل استوانه تاثیر می‌گذارد.

اهداف این پایان نامه نیز بررسی و تحقیق بر روی انواع ترک با هندسه و ابعاد متفاوت بر روی استوانه‌های اتوفرتاژ شده با ابعاد متفاوت و درصد اتوفرتاژهای متفاوت در جدار خارجی استوانه یا مخزن می‌باشد.

این پایان نامه در شش فصل و دو پیوست تنظیم شده است.

ابتدا در فصل اول مروری بر الاستو پلاستیسیته در مخازن استوانه‌ای آمده است.

در فصل دوم به شرح پدیده اتوفرتاژ و مروری بر کارهای انجام شده در این زمینه پرداخته شده است.

فصل سوم شامل مبانی مقدماتی در زمینه مکانیک شکست و مکانیک شکست در مخازن اتوفرتاژ شده می‌باشد. در این فصل مروری کوتاه بر روی مکانیک شکست خطی و مکانیک شکست

^۱ Shrink fit

^۲ Autofrettage

الاستیک-پلاستیک و پارامترهای مربوط به آنها می‌شود. همچنین خلاصه‌ی کوتاهی بر مکانیک شکست در استوانه‌های اتوفرتاژ شده آورده شده است.

در فصل چهارم به شرح روش انجام کار در نرم افزار ABAQUS و تعریف پارامترهای مورد نیاز پرداخته و نتایج مربوطه در این فصل آمده است.

در فصل پنجم نیز روش انجام آزمایشگاهی کارها از قبیل ساخت نمونه‌ها، شرح دستگاه‌ها و ابزار مورد نیاز آزمایش، روش انجام آزمایش، نکات لازم در انجام آزمون‌ها و ... و در آخر مقایسه نتایج آزمایشگاهی و نتایج عددی آورده شده است.

در فصل ششم بر روی نتایج بدست آمده بحث شده است.

همانطور که ذکر شد دو پیوست نیز در انتهای پایان‌نامه آورده شده است. در پیوست آ مقدمه‌ای بر روش شبیه‌سازی عددی و در پیوست ب نیز مقدمه‌ای بر روش شبیه‌سازی ترک در نرم‌افزار ABAQUS ذکر شده است.

فصل اول

الاستوپلاستیسیته در مخازن تحت فشار

۱-۱- مقدمه

از آنجا که مخازن تحت فشار کاربرد وسیع در صنعت دارند؛ برای صرفه جویی در مواد و نیز کمبود برخی از مواد طراحان و مهندسان از طراحی الاستیک به طراحی الاستوپلاستیک روی آورده‌اند.

دما و فشار اصلی‌ترین عوامل موثر در بررسی مخازن تحت فشار هستند که تاثیر دما در رفتار الاستو-پلاستیک به مبحث خزش^۱ مربوط می‌شود که در این پروژه به آن پرداخته نمی‌شود و فقط تاثیر فشار بر سیستم‌های مخازن جدار ضخیم و اثر وجود ترک در جدار خارجی آنها بررسی می‌گردد.

عدم مقاومت کافی مواد در برابر فشارهای بالا این الزام را ایجاد می‌کند تا از مخازن چندگانه که در یکدیگر جازده شده‌اند و در آنها تنش‌های پسماند ایجاد شده، استفاده گردد. با وجود این که روش مرسوم برای سوار نمودن مخازن بر روی یکدیگر، روش جا زدن^۲ می‌باشد؛ اخیراً از روشی جدید به- نام جوش انفجاری^۳ استفاده می‌گردد که صرفه‌جویی در ماده را دربرداشته و هزینه ماشین‌کاری را نیز ندارد.

۲-۱- استوانه‌های جدار ضخیم

۱-۲-۱- تاثیر فشار در حالت الاستیک

بطور کلی مخازن جدار ضخیم برای ذخیره سیالات تحت فشار بالا مورد استفاده قرار می‌گیرند. برخی از مخازن جدار ضخیم نیز مانند دیسک‌های دوار همواره به عنوان جزئی از ماشین، کاربرد وسیعی در صنعت دارند. به منظور آسان شدن تحلیل تنش در مخازن از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌شود. در شکل (۱-۱) تنش‌های شعاعی^۴ (σ_r) و تنش‌های محیطی^۱ (σ_θ) روی یک جزء استوانه نشان داده شده است. تنش طولی^۲ (σ_z) نیز به نوع انتهای مخزن بستگی دارد که در شکل نشان داده نشده است [۱].

1 - Creep

2 - Shrinkage

3 - Explosive welding

4 - Radial

با استفاده از تعادل نیروها در جهت شعاع می توان نوشت:

$$2(r+dr)(\sigma_r+d\sigma_r)d\theta-2\sigma_r r d\theta-2\sigma_\theta dr \sin(d\theta)=0$$

با تقریب $\sin(d\theta) \approx d\theta$ برای زوایای کوچک رابطه بالا بصورت زیر ساده می شود.

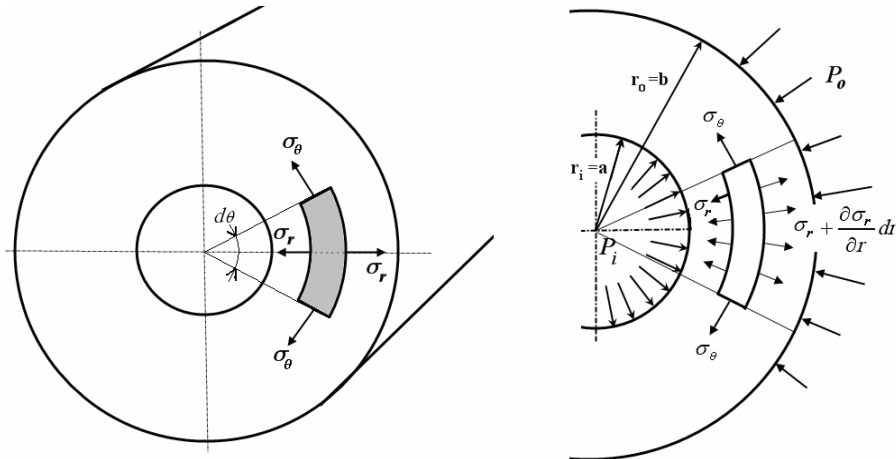
$$\sigma_r - \sigma_\theta = r \frac{d\sigma_r}{dr} \quad (1-1)$$

اگر یک ذره در روی جدار استوانه و در شعاع r به اندازه u_r تغییر مکان دهد، تغییر مکان آن در فاصله $(r+dr)$ به مقدار (u_r+du_r) خواهد شد. پس کرنش های شعاعی و طولی و محیطی بر اساس روابط عمومی هوک بدین صورت خواهند شد:

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr} = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] \quad (2-1)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] \quad (3-1)$$

$$\varepsilon_z = cte = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] \quad (4-1)$$



شکل (1-1): نمایش تنش های عمل کننده روی یک جزء استوانه [1]

اگر از ε_θ نسبت به r مشتق گرفته شود می توان نوشت:

¹ - Circumferential
² - Longitudinal

$$\frac{E}{r} \left(\frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r} \right) = \frac{d\sigma_\theta}{dr} - \nu \frac{d}{dr} (\sigma_r + \sigma_z) \quad (5-1)$$

و نیز با مشتق گیری از رابطه‌ی ε_z نسبت به r می‌توان نوشت:

$$\frac{d\sigma_z}{dr} = \nu \frac{d}{dr} (\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (6-1)$$

با قرار دادن $\frac{du_r}{dr}$ از رابطه ε_θ در رابطه ε_z خواهیم داشت:

$$\sigma_\theta + r \frac{d\sigma_\theta}{dr} - \nu(\sigma_r - \sigma_\theta) - r\nu \frac{d}{dr} (\sigma_r + \sigma_z) = \sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z) \quad (7-1)$$

با جای گذاری $\frac{d\sigma_z}{dr}$ از رابطه (6-1) و $(\sigma_\theta - \sigma_r)$ از رابطه (1-1) در رابطه (7-1) نتیجه می‌-

شود:

$$\left(\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{d\sigma_\theta}{dr} \right) (1 - \nu^2) = 0 \Rightarrow \frac{d(\sigma_r + \sigma_\theta)}{dr} = 0 \Rightarrow \sigma_r + \sigma_\theta = 2A = cte \quad (8-1)$$

از حذف σ_θ در روابط (1-1) و (8-1) و سپس انتگرال گیری دو رابطه اساسی حاکم بر مخازن

تحت فشار که به معادلات لامه¹ معروف می‌باشند به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \sigma_r = A - \frac{B}{r^2} \\ \sigma_\theta = A + \frac{B}{r^2} \end{cases} \quad (9-1)$$

که A و B مقادیری ثابت بوده و از شرایط مرزی بدست می‌آیند. در حالت کلی شرایط مرزی برای

یک مخزن که همزمان تحت فشار داخلی و فشار خارجی باشد بدین قرار است:

$$\begin{cases} r = a \Rightarrow \sigma_r = -P_i \\ r = b \Rightarrow \sigma_r = -P_o \end{cases}$$

فرض می‌شود که تنش‌های کششی مثبت باشند.

با اعمال شرایط مرزی فوق در روابط (۹-۱) و با فرض $K = \frac{b}{a}$ که در آن a و b به ترتیب شعاع-

های داخلی و خارجی استوانه‌اند، ثوابت A و B و در نتیجه تنش‌های شعاعی و محیطی برای یک

استوانه جدار ضخیم که از داخل و خارج تحت فشار می‌باشد به صورت زیر بدست می‌آید:

$$A = \frac{(K^2 P_o - P_i)}{1 - K^2} \quad \& \quad B = \frac{b^2 (P_o - P_i)}{(1 - K^2)}$$

$$\sigma_r = \frac{(K^2 P_o - P_i)}{1 - K^2} - \frac{(P_o - P_i)}{(1 - K^2)} \left(\frac{b}{r} \right)^2 \quad (10-1)$$

$$\sigma_\theta = \frac{(K^2 P_o - P_i)}{1 - K^2} + \frac{(P_o - P_i)}{(1 - K^2)} \left(\frac{b}{r} \right)^2 \quad (11-1)$$

در صورتی که استوانه از دو انتها بسته باشد، تنش طولی یا محوری از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$\sigma_z = \frac{\pi (P_o b^2 - P_i a^2)}{\pi (b^2 - a^2)} = \frac{(P_o b^2 - P_i a^2)}{(b^2 - a^2)} \quad (12-1)$$

از مقایسه روابط (۱۰-۱) تا (۱۲-۱) مشخص می‌شود که تنش طولی نصف مجموع تنش‌های

شعاعی و محیطی است و لذا یک تنش هیدرواستاتیک است^۲. پس تنش‌های انحرافی برابرند با:

$$\sigma'_r = \sigma_r - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) \quad (13-1)$$

$$\sigma'_\theta = \sigma_\theta - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) = \frac{1}{2}(\sigma_\theta - \sigma_r) \quad (14-1)$$

حال به بررسی شرایط خاص مرزی پرداخته می‌شود [۱].

حالت اول ($P_o = 0$)

^۱ - Singular Cylinder

^۲ - اثبات:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) \\ \sigma_{hydrostatic} = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) \end{array} \right. \Rightarrow \sigma_{hydrostatic} = \frac{1}{3} \left(\sigma_r + \sigma_\theta + \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) \right) = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) = \sigma_z$$

در بیشتر کاربردهای مهندسی فشار خارجی، فشار اتمسفر بوده که در این حالت شرایط مرزی به قرار زیر می‌باشند:

$$\begin{cases} r = a \Rightarrow \sigma_r = -P_i \\ r = b \Rightarrow \sigma_r = 0 \end{cases}$$

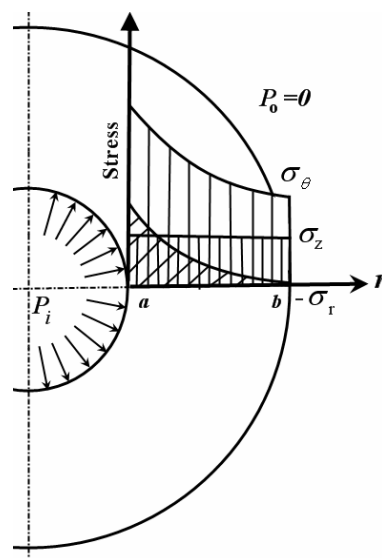
با این شرایط مرزی فوق و از روابط (۹-۱)، ثابت A و B و در نتیجه تنش‌های شعاعی و محیطی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} A = \frac{P_i}{K^2 - 1} \\ B = \frac{b^2 P_i}{(1 - K^2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_r = P_i \frac{\left(\frac{b}{r}\right)^2 - 1}{K^2 - 1} & (15-1) \\ \sigma_\theta = P_i \frac{\left(\frac{b}{r}\right)^2 + 1}{K^2 - 1} & (16-1) \end{cases}$$

در صورتی که استوانه دو انتها بسته باشد، برای تنش طولی می‌توان نوشت:

$$\pi(b^2 - a^2)\sigma_z = \pi a^2 P_i \Rightarrow \sigma_z = \frac{P_i}{K^2 - 1} \quad (17-1)$$

شکل (۲-۱) توزیع تنش در جدار استوانه را نشان می‌دهد.



شکل (۲-۱): نمایش تنش‌ها در جدار مخزن [۱]

از روابط (۱۵-۱) و (۱۶-۱) به سادگی مشاهده می‌شود که در یک استوانه تحت فشار داخلی،

تنش محیطی همواره مثبت ($\sigma_\theta > 0$) و تنش شعاعی همواره منفی ($\sigma_r < 0$) می‌باشد.