دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی (گرایش جبر)

عنوان:

گراف کلی یک حلقه جابجایی

استاد راهنما:
دکتر رضا جهانی‌نژاد

به وسیله:
نجمه شیروانی

مرداد ماه ۱۳۸۹

تقدیم به آن گوهری که از مهر خویش لبریزم ساخته و آن مشعلی که دلسوزانه راهنمای راهم می‌باشد.

تشکر و قدردانی

مهربان من

اکنون که توانسته‌ام در راه شناخت تو قدمی بردارم، تو را سپاس می‌گویم. سپاس بی‌کران تو را که پدر و مادری چنین دلسوز را به من عطا کردی تا بستر این راه را بر من هموار سازند. سپاس بسیار تو را که شمع هدایتت را در دست فرزانگانی سپردی که از علم و مهر آنان بهره جویم. موهبتت را در ادامه این مسیر نیز شامل این بنده حقیر گردان. استاد فرزانه‌ام جناب آقای دکتر جهانی نژاد از این‌که دانش خود را خالصانه در اختیار من نهادید بی‌نهایت سپاس گزارم. همچنین از جناب پروفسور اشرفی و جناب دکتر رحمتی که داوری این پایان نامه را پذیرفته‌اند سپاس دارم و تشکر خود را تقدیم به آقای احمدی می‌نمایم که راهنمایی ایشان مرا در طی این مسیر یاری کرده.

پدر گرامی و مهربانم، مادر عزیز و صبورم، همواره خود را مدیون لطف بی‌اندازه شما دانسته بر دستهایتان بوسه می‌زنم. در این مجال از خواهران عزیزم و دوستان مهربانم که در تمام این مدت مرا از محبت‌شان سرشار کرده‌اند، سپاس گزاری می‌کنم.

با تشکر فراوان

نجمه شیروانی

چکیده

فرض کنید R یک حلقه و G یک گراف باشد که مجموعه رئوس ان عناصر حلقه R هستند و دو رأس x و y در G مجاورند هرگاه $x + y \in Z(R)$. در این صورت گراف G را گراف کلی می‌نامیم. در این پایان‌نامه گراف کلی را روی حلقه جابجایی و یکدار R و برخی زیرمجموعه‌های آن از جمله $Z(R)$ و $Reg(R)$ مورد بررسی قرار می‌دهیم. اساساً بررسی گراف کلی به دو دسته تقسیم شده است که این تقسیم‌بندی به ایده‌آل بودن و یا نبودن $Z(R)$ بستگی دارد. همچنین در سیر این مطالب گراف کلی روی حلقه‌های متعددی از جمله $R[X]$، حلقه حاصل‌ضربی، ایده‌آل‌سازی شده و نوتری را بررسی می‌کنیم و در پایان نشان می‌دهیم که گراف کلی روی حلقه‌هایی ویژه، گرافی هامیلتونی است.

کلمات کلیدی:

حلقه جابجایی، مقسوم‌علیه صفر، عنصر منظم، گراف کلی ، کمر، قطر.

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش نیازها

این فصل از پایان‌نامه شامل دو بخش می‌باشد. در بخش اول با هدف آشنایی با مفاهیم کلی گراف و ثابت‌های آن به بیان تعاریف مقدماتی می‌پردازیم. سپس در بخش دوم مفاهیم و قضایایی را که پایه اصلی بحث در فصل‌های بعد می‌باشند را بیان می‌کنیم. مراجع استفاده شده در این فصل عبارتند از [۳]، [۱۱] و [۹].

۱—۱ مفاهیم مقدماتی

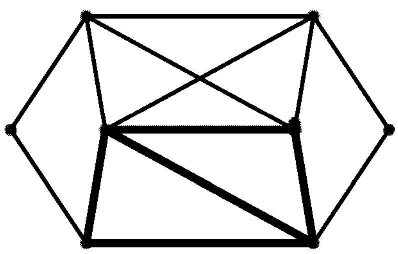
تعریف ۱.۱ گراف $G = (V, E)$ شامل مجموعه‌ی ناتهی $V(G)$ به نام مجموعه رأس‌ها و مجموعه‌ی $E(G)$ از جفت‌های نامرتب عناصر مجزّای $V(G)$ به نام مجموعه‌ی یال‌ها است که به ازای هر $x, y \in V(G)$، $(x, x) \notin E(G)$، همچنین $(x, y) = (y, x)$ و بین هر دو رأس آن حداکثر یک یال موجود می‌باشد. گاهی G را با Γ، همچنین $V(G)$ و $E(G)$ را به ترتیب با V و E نشان می‌دهیم. معمولاً رئوس را با حروف کوچک $x, y, z, \ldots$ و یال بین دو رأس x و y را با نماد $x - y$ و یا (x, y) نمایش می‌دهیم. دو رأس x و y را مجاور گوییم هرگاه یالی بین آن‌ها وجود داشته باشد.
در سراسر این پایان نامه Γ نیز نماد گراف می‌باشد.

تعریف ۲.۱ در گراف $G = (V,E)$ هر دنباله $x_۱,\cdots,x_n$ از رئوس گراف که برای هر i، $i = ۱,\cdots,n-۱$، $(x_i,x_{i+۱}) \in E(G)$ و رأس تکراری نداشته باشد یک مسیر بین $x_۱$ و x_n به طول $n-۱$ نامیده می‌شود و معمولاً می‌نویسیم $x_n - \cdots - x_۱$ یک مسیر بین $x_۱$ و x_n است. منظور از یک دور به طول n در گراف G، دنباله‌ای از رئوس و یال ها مانند $x_۱ - x_n - \cdots - x_۱$ است که در آن $x_n - \cdots - x_۲ - x_۱$ یک مسیر بین $x_۱$ و x_n باشد.

تعریف ۳.۱ گراف H را یک زیرگراف از گراف G می‌نامیم هرگاه

$$V(H) \subseteq V(G) \quad \text{و} \quad E(H) \subseteq E(G)$$

زیرگراف H یک زیرگراف القایی از گراف G است، هرگاه دو رأس از $V(H)$ مجاورند اگر و تنها اگر دو رأس مذکور در G نیز مجاور باشند. زیرگراف القایی H را می‌توان با حذف تعدادی رئوس و یال‌های مرتبط به آن‌ها، از گراف G به‌دست آورد. شکل زیر نمایش زیرگراف القایی از یک گراف می‌باشد.



شکل ۱—۱: زیرگراف القایی

تعریف ۴.۱ گراف G را همبند می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. در غیر این صورت G را ناهمبند می‌نامیم. بدیهی است که هر گراف ناهمبند G را می‌توان به‌صورت اجتماع تعداد متناهی زیرگراف همبند در نظر گرفت. هر یک از زیرگراف‌های همبند را یک مؤلفه همبندی می‌نامیم. چنانچه گراف G فاقد یال باشد، G را گراف کاملاً ناهمبند یا پوچ می‌نامیم.

تعریف ۵.۱ دو زیرگراف $H_1 = (V_1, E_1)$ و $H_2 = (V_2, E_2)$ از گراف ناهمبند $G = (V, E)$ را از هم‌مجزا می‌نامیم، هرگاه هیچ مسیری از یک رأس V_1 به رأسی از V_2 وجود نداشته باشد.

تعریف ۶.۱ در گراف $G = (V, E)$، برای هر جفت از رئوس $x, y \in V(G)$، اگر مسیری بین x و y وجود داشته باشد آن‌گاه طول کوتاه‌ترین مسیر بین x و y را فاصله x و y می‌نامیم و آن را با $d(x, y)$ نشان می‌دهیم. چنانچه مسیری بین دو رأس مذکور در گراف G وجود نداشته باشد، تعریف می کنیم $d(x, y) = \infty$. به‌علاوه برای رئوس دلخواه $x, y, z \in R$ داریم $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

تعریف ۷.۱ فرض کنید G یک گراف همبند باشد، در این صورت

$$max\{d(x, y)|\ x, y \in V\}$$

را قطر گراف G می‌نامیم و با نماد $diam(G)$ نشان می‌دهیم. اگر گراف G ناهمبند باشد آن‌گاه قطر آن را ∞ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۸.۱ فرض کنید G یک گراف باشد. اگر G دارای حداقل یک دور باشد آن‌گاه طول کوتاه‌ترین دور در گراف G را کمر گراف می‌نامیم و با $gr(G)$ نشان می‌دهیم. هرگاه گراف فاقد دور باشد کمر گراف را ∞ تعریف می‌کنیم. به‌وضوح برای هر گراف G، $gr(G) \geq ۳$.

تعریف ۹.۱ یک درخت گرافی همبند و بدون دور است. یک جنگل مجموعه درخت‌های از هم‌مجزا می‌باشد.

تعریف ۱۰.۱ گراف G را کامل می‌گوییم هر گاه هر دو رأس آن مجاور باشند. گراف کامل با n رأس را با K_n نشان می‌دهیم.

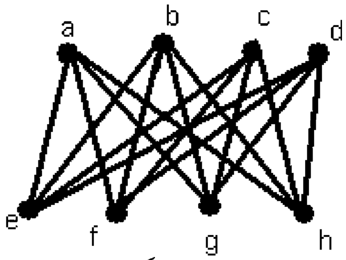
تعریف ۱۱.۱ فرض کنید G یک گراف باشد. هرگاه مجموعه رئوس گراف را بتوان به دو مجموعه مجزای V_1 و V_2 افراز کرد به طوری که هر یال G یک رأس از V_1 را به رأسی از V_2 وصل کند، گراف را دوبخشی می‌نامیم و زوج (V_1, V_2) یک دوبخشی سازی گراف نامیده می‌شود.

بنابراین در گراف دوبخشی با مجموعه رئوس $V = (V_1, V_2)$، هیچ دو رأسی از V_1، همین‌طور هیچ دو رأسی از V_2 مجاور نیستند. علاوه بر این در گراف دوبخشی لزوماً هر رأس از V_1 به هر رأس از V_2 متصل نیست.

لم ۱۲.۱ گراف G دوبخشی است اگر و تنها اگر هر دور آن زوج باشد.

اثبات. ارجاع شود به[۱۹. ص ۷.] □

تعریف ۱۳.۱ گراف دوبخشی G با مجموعه رئوس $V = (V_1, V_2)$ را یک گراف دوبخشی کامل می‌نامیم، هرگاه هر رأس V_1 با هر رأس V_2 مجاور باشد. این گراف را با K_{n_1,n_2} نمایش می‌دهیم، که در آن n_1 تعداد اعضای مجموعه V_1 و n_2 تعداد اعضای مجموعه V_2 است. گراف دوبخشی کامل $K_{1,n}$ را گراف ستاره می‌نامیم و رأس $x \in V_1$ را مرکز گراف ستاره می‌نامیم. همچنین اگر مجموعه رئوس G را بتوان به زیرمجموعه‌های مجزّای V_1 و $\cdots$ و V_r افراز کرد، به طوری که برای هر $1 \leq i, j \leq r$ که $i \neq j$ همه رئوس V_i و V_j مجاور باشند و برای هر i، یالی بین رئوس V_i وجود نداشته باشد، آن‌گاه گراف کامل $r-$بخشی $K_{n_1,\ldots,n_r}$ به‌دست می آید. گراف زیر مثالی از گراف دوبخشی کامل با دوبخشی‌سازی (V_1, V_2) به صورت $V_1 = \{a, b, c, d\}$ و $V_2 = \{e, f, g, h\}$ می‌باشد.



شکل ۱—۲: گراف دوبخشی

تعریف ۱۴.۱ گراف G را هامیلتونی نامیم هرگاه شامل دوری باشد که از تمام رئوس گراف بگذرد. در این صورت چنین دوری را یک دور هامیلتونی می‌نامیم.

۱—۲ تعاریف و قضایای پیش‌نیاز

مفهوم گراف کلی که در ابتدا توسط اندرسون و بداوی در سال ۲۰۰۸ بیان شد، عبارت است از یک گراف که مجموعه رئوس آن عناصر حلقه R می‌باشد و دو رأس x و y مجاورند هرگاه $x+y \in Z(R)$. در این بخش به کمک مفاهیم جبری زیرگراف‌هایی از گراف کلی روی R را معرفی می‌کنیم. لذا هدف ما آشنایی با تعاریف مرتبط با گراف کلی می‌باشد، که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

تعریف ۱۵.۱ گراف کلی روی حلقه R که با نماد $T(\Gamma(R))$ نشان داده می‌شود عبارت است از یک گراف بدون جهت که در آن $V = R$ و $E = \{(x,y)|\ x,y \in R\ \wedge\ x+y \in Z(R)\}$.

زیرگراف القایی از $T(\Gamma(R))$ که رئوس آن مجموعه‌ی $Z(R)$ باشد، را با نماد $Z(\Gamma(R))$ و زیرگراف القایی $T(\Gamma(R))$ که رئوس آن مجموعه $Reg(R)$ باشند را گراف منظم می‌نامیم و با $Reg(\Gamma(R))$ نشان می‌دهیم. از طرفی بنا به روابط $U(R) \subseteq Reg(R)$ و $Nil(R) \subseteq Z(R)$، زیرگراف القایی از $Reg(\Gamma(R))$ که رئوس آن مجموعه $U(R)$ است را با نماد $U(\Gamma(R))$ و همچنین زیرگراف القایی از گراف $Z(\Gamma(R))$ که رئوس آن مجموعه $Nil(R)$ باشد را با نماد $Nil(\Gamma(R))$ نشان می‌دهیم.

لم ۱۶.۱ اگر R یک دامنه صحیح باشد، آن‌گاه گراف $T(\Gamma(R))$ فاقد دور می‌باشد.

اثبات. عناصر متمایز و غیر صفر $x,y \in R$ را در نظر می‌گیریم، به طوری که $x+y \in Z(R)$. چون R یک دامنه صحیح است پس به‌وضوح $x+y=0$، لذا $x=-y$. بنابراین هر رأس تنها با قرینه جمعی خود مجاور است. لذا گراف $T(\Gamma(R))$ اجتماعی از K_2هاست. پس $T(\Gamma(R))$ فاقد دور است. در واقع $T(\Gamma(R))$ یک جنگل است. □

لم ۱.۱۷ گراف کامل K را در نظر بگیرید. در این‌صورت داریم:

۱) $diam(K_1)=0$ و برای هر عدد طبیعی $n>1$، $diam(K_n)=1$.

۲) برای هر عدد طبیعی n و m، $diam(K_{n,m})=1$ یا 2 $diam(K_{n,m})=$.

اثبات. **۱.** چون K_1 گرافی با یک رأس است پس $diam(K_1)=0$. فرض می‌کنیم $n>1$، در این صورت بنا به تعریف گراف کامل K_n، هر دو رأس مجاورند و لذا فاصله هر دو رأس یک است و در نتیجه $diam(K_n)=1$.

۲. فرض می‌کنیم $n=m=1$. در این صورت چون $K_{1,1}=K_2$، لذا بنا به بند ۱، $diam(K_{1,1})=diam(K_2)=1$ و در غیر این صورت برای دو رأس غیر مجاور x و y از $K_{n,m}$، بنا به تعریف گراف دو بخشی کامل داریم $d(x,y)=2$. لذا از تعریف قطر نتیجه می‌شود $diam(K_{n,m})=2$. □

لم ۱.۱۸ گزاره‌های زیر همواره برقرارند.

۱) اگر $n \geq 3$ آن‌گاه $gr(K_n)=3$. در غیر این صورت $gr(K_n)=\infty$.

۲) اگر $n,m \geq 2$ آن‌گاه $gr(K_{n,m})=4$. در غیر این صورت $gr(K_{n,m})=\infty$.

اثبات. **۱.** بنا به تعریف برای تشکیل یک دور در هر گراف حداقل ۳ رأس لازم است. لذا اگر $n<3$ آن‌گاه هر گراف به ویژه K_n فاقد دور است و بنا به تعریف کمر، $gr(K_n)=\infty$. اکنون فرض می‌کنیم $n \geq 3$. در این صورت واضح است که دوری به طول ۳ در گراف K_n وجود دارد. لذا بنا به تعریف، $gr(K_n)=3$.

۲.بنا بر لم ۱۲.۱، دوری به طول فرد در گراف دو بخشی $K_{n.m}$ وجود ندارد. بنابراین برای تشکیل یک دور در گراف حداقل ۴ رأس لازم است، که به‌وضوح در هر بخش V_{1} و V_{2} حداقل دو رأس وجود دارد. لذا اگر $n, m \geq 2$ آن‌گاه بنا به تعریف $gr(K_{n,m}) = 4$ و در غیر این صورت $gr(K_{n,m}) = \infty$.

□

فصل ۲

زیرگراف‌های $T(\Gamma(R))$

یکی از گرایش‌های مهم در ریاضیات مطالعه حلقه‌های جابجایی و خواص آن‌ها می‌باشد، که دانشمندان بسیاری در جهت شناخت ویژگی‌های آن‌ها راه‌کارهایی ارائه داده‌اند. برای مثال بررسی مقالاتی در ارتباط با مقسوم علیه‌های صفر یک حلقه غیرجابجایی [۹]، بررسی مقسوم علیه‌های صفر حلقه نیرلینگ[۱۶] و مقالاتی دیگر ارائه شده است. یکی از راه‌های شناخت ویژگی‌های یک حلقه، بررسی گراف روی آن حلقه می‌باشد، که موجب شده است تعاریف مختلفی از جمله گراف مقسوم علیه‌های صفر حلقه، گراف منظم و گراف تام بیان شود. هدف از معرفی گراف تام بکارگیری یک شیء ترکیباتی برای درک بهتر مفاهیمی از حلقه‌های جابجایی است، که در این پایان‌نامه به بررسی این گراف پرداخته‌ایم و مقالاتی که در این باره توسط اندرسون و بداوی [۶] و اکبری [۷] نوشته شده است را به‌طور کامل مورد بررسی قرار داده‌ایم. در تحلیل گراف $T(\Gamma(R))$، ابتدا به بیان ویژگی زیرگراف‌های $Z(\Gamma(R))$ و $Reg(\Gamma(R))$ می‌پردازیم و سپس به کمک قضایای ارائه شده در این قسمت گراف $T(\Gamma(R))$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

این فصل از پایان‌نامه شامل دو بخش می‌باشد که هدف کلی بررسی ویژگی زیرگراف‌های $T(\Gamma(R))$ می‌باشد. در بخش اول با شرط ایده‌آل بودن $Z(R)$ به بیان قضایای اساسی می‌پردازیم که در فصل‌های بعد کاربرد بسیار دارند. در بخش دوم زیرگراف‌های $T(\Gamma(R))$ را با شرط ایده‌آل نبودن

$Z(R)$ مورد بررسی قرار خواهیم داد. همچنین مراجع مورد استفاده در این فصل [۲]، [۱۱] و [۱۳] می‌باشند. در سراسر این فصل R یک حلقه جابجایی و یکدار است که $1_R \neq 0$.

۲—۱ بررسی زیرگراف‌های $T(\Gamma(R))$ با شرط ایده‌آل بودن $Z(R)$

در این بخش با فرض اینکه $Z(R)$ ایده‌آلی از حلقه R باشد به بررسی زیرگراف‌های $Z(\Gamma(R))$ و $Reg(\Gamma(R))$ از گراف $T(\Gamma(R))$ می‌پردازیم. ابتدا در قضیه ۲.۲ ارتباط این دو زیرگراف را بررسی می‌کنیم. سپس قضیه اساسی ۴.۲ را بیان خواهیم کرد که در آن ساختار گراف $Reg(\Gamma(R))$ مورد بررسی قرار گرفته است و در ادامه به بیان ویژگی‌های گراف $Reg(\Gamma(R))$ در چند قضیه می‌پردازیم. همچنین در قضیه ۵.۲ به حلقه‌هایی اشاره می‌کنیم که گراف منظم روی آن‌ها کامل و یا همبند می‌باشند. سپس با بررسی ثابت‌های گراف نتیجه خواهیم گرفت که فاصله هر دو رأس در زیرگراف‌ها حداکثر دو است و چنانچه گراف $T(\Gamma(R))$ شامل حداقل یک دور باشد، کمر گراف حداکثر چهار است. در ادامه مطالب نیز به بیان شرایط معادل با همبند بودن گراف منظم می‌پردازیم و در انتها ارتباط زیرگراف $Nil(\Gamma(R))$، با زیرگراف‌های $Z(\Gamma(R))$ و $Reg(\Gamma(R))$ را بیان خواهیم کرد.

لم ۱.۲ فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت

۱) $Nil(R) + Reg(R) \subseteq Reg(R)$.

۲) اگر $Z(R)$ یک ایده‌آل R باشد آن‌گاه $Z(R) + Reg(R) \subseteq Reg(R)$.

اثبات. ۱. اگر $Nil(R) + Reg(R) \nsubseteq Reg(R)$ آن‌گاه عناصر $a \in Nil(R)$ و $r \in Reg(R)$ وجود دارند به طوری که $z = a + r \in Z(R)$. پس

$$r = z - a \in Z(R) + Nil(R) \subseteq Z(R)$$

که با انتخاب r در تناقض است. لذا رابطه شمول برقرار است.

۲. با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم $Z(R) + Reg(R) \nsubseteq Reg(R)$. لذا عناصر $x \in Reg(R)$

و $y \in Z(R)$ وجود دارند به طوری که $x + y \in Z(R)$. چون $Z(R)$ ایده‌آل است و $y \in Z(R)$ پس $x = (x+y) + (-y) \in Z(R)$ که با انتخاب x در تناقض می‌باشد. بنابراین فرض خلف باطل است و در نتیجه $Z(R) + Reg(R) \subseteq Reg(R)$. □

قضیه ۲.۲ فرض کنید R یک حلقه باشد به طوری که $Z(R)$ ایده‌آلی از R است. در این صورت $Z(\Gamma(R))$ یک گراف کامل است و گراف‌های $Z(\Gamma(R))$ و $Reg(\Gamma(R))$ از هم‌مجزا می‌باشند.

اثبات. بنا به فرض $Z(R)$ یک ایده‌آل R است، پس هر دو رأس از گراف $Z(\Gamma(R))$ مجاورند. یعنی گراف $Z(\Gamma(R))$ کامل است. از طرفی بنا بر بند دو لم ۱.۲ داریم $Z(R) + Reg(R) \subseteq Reg(R)$، پس هر رأس از گراف $Z(\Gamma(R))$ با هر رأس $Reg(\Gamma(R))$ غیر مجاور است، لذا بنا به تعریف زیرگراف مجزّا دو زیر گراف $Z(\Gamma(R))$ و $Reg(\Gamma(R))$ از هم‌مجزا می‌باشند. □

اکنون قضیه اساسی این بخش را بیان می‌کنیم. در این قضیه α و β می‌توانند اعداد طبیعی یا کاردینال‌های نامتناهی باشند. چنانچه β نامتناهی باشد واضح است $\beta = \beta - ۱ = \frac{\beta - ۱}{۲}$. ابتدا لم زیر را به جهت کاربرد در این قضیه بیان می‌کنیم.

لم ۳.۲ فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت

۱) $Z(R)$ اجتماعی از ایده‌آل‌های اول R می‌باشد.

۲) اگر R نوتری باشد آن‌گاه $Z(R)$ اجتماع تعدادی متناهی از ایده‌آل‌های اول R است.

اثبات. **۱.** بنا به قضیه [۵۸.ص.۵]، اگر S یک زیرمجموعه ضربی بسته و I ایده‌آلی از حلقه R باشد به طوری که $I \bigcap S = \emptyset$ در این صورت ایده‌آل اول P از R وجود دارد به طوری که $I \subseteq P$ و $P \bigcap S = \emptyset$. از طرفی چون $۱ \notin Z(R)$ و با توجه به این که $Reg(R)$ نسبت به ضرب بسته است، پس زیرمجموعه $S = R \setminus Z(R)$ یک زیرمجموعه ضربی بسته از R می‌باشد و برای هر $a \in Z(R)$، $Ra \subseteq Z(R)$. لذا $Ra \bigcap S =$ و در نتیجه ایده‌آل اول P از R وجود دارد که $Ra \subseteq P$ و $P \bigcap S =$. بنابراین $a \in P$ و $P \subseteq Z(R)$. لذا $Z(R)$ اجتماعی از ایده‌آل‌های اول است.

۲. ارجاع شود به [۱۷۳.ص.۵]. □

قضیه ۴.۲ فرض کنید R یک حلقه باشد به طوری که $Z(R)$ ایده‌آلی از R است. در نظر بگیرید

$$|Z(R)| = \alpha \text{ و } |\frac{R}{Z(R)}| = \beta$$

در این صورت

۱) اگر $۲ \in Z(R)$ آن‌گاه $Reg(\Gamma(R))$ اجتماع $\beta - ۱$ تا K_α است.

۲) اگر $۲ \notin Z(R)$ آن‌گاه $Reg(\Gamma(R))$ اجتماع $\frac{\beta-۱}{۲}$ تا $K_{\alpha,\alpha}$ است.

اثبات. **۱.** فرض می‌کنیم $۲ \in Z(R)$. بنا بر بند ۲ لم ۱.۲ داریم $Z(R) + Reg(R) \subseteq Reg(R)$. لذا برای هر $x \in Reg(R)$، زیرگراف با مجموعه رئوس $x + Z(R)$ یک زیرگراف $Reg(\Gamma(R))$ می‌باشد. به‌علاوه برای هر $y, z \in Z(R)$، چون $۲ \in Z(R)$ و $Z(R)$ یک ایده‌آل است، لذا

$$(x + z) + (x + y) = ۲x + y + z \in Z(R)$$

بنابراین زیرگراف با مجموعه رئوس $x + Z(R)$ یک زیرگراف کامل و در نتیجه زیرگرافی القایی از $Reg(\Gamma(R))$ می‌باشد.

از طرفی اگر $x_۱$ و $x_۲$ دو عنصر دلخواه و متمایز از $Reg(R)$ باشند که $x_۱ + Z(R) \neq x_۲ + Z(R)$ آن‌گاه بنا بر بند ۲ لم ۱.۲ برای هر $y, z \in Z(R)$ داریم $x_۱ + y \in Reg(R)$ و $x_۲ + z \in Reg(R)$. همچنین

$$(x_۱ + y) + (x_۲ + z) = x_۱ + x_۲ + y + z \notin Z(R)$$

زیرا در غیر این‌صورت چون $Z(R)$ یک ایده‌آل است و $y + z \in Z(R)$ پس $x_۱ + x_۲ \in Z(R)$. لذا

$$x_۱ - x_۲ = x_۱ + x_۲ - ۲x_۲ \in Z(R)$$

و در نتیجه $x_۱ + Z(R) = x_۲ + Z(R)$ که در تناقض با متمایز بودن هم‌دسته‌ها می‌باشد. لذا ثابت شد که زیرگراف القایی با رئوسی از عناصر هم‌دسته‌های متمایز از $Reg(\Gamma(R))$ از هم‌مجزا می‌باشند. بنابراین $Reg(\Gamma(R))$ اجتماع تعدادی زیرگراف کامل است. چون $|\frac{R}{Z(R)}| = \beta$ پس بنا بر آن‌چه در بالا

ثابت شد $|\{x+Z(R)|\ x\in Reg(R)\}|=\beta-1$. از طرفی برای عنصر دلخواه $x\in Reg(R)$ داریم

$$|x+Z(R)|=|Z(R)|=\alpha$$

لذا تعداد رئوس در زیرگراف القایی با مجموعه رئوس از عناصر هر هم‌دسته α می‌باشد. پس هر مؤلفه همبندی از $Reg(\Gamma(R))$ یک K_α است. لذا $Reg(\Gamma(R))$ اجتماع $\beta-1$ تا K_α است.

۲. فرض می‌کنیم $2\notin Z(R)$. در این صورت برای هر $x\in Reg(R)$، هر دو عنصر متمایز از $x+Z(R)$ غیرمجاورند. زیرا در غیر این صورت عناصر $y,z\in Z(R)$ وجود دارند به طوری که

$$2x+y+z=(x+y)+(x+z)\in Z(R)$$

چون $Z(R)$ ایده‌آل است و $y+z\in Z(R)$ در نتیجه $2x\in Z(R)$ و چون $x\in Reg(R)$ و $Z(R)$ اجتماعی از ایده‌آل‌های اول است، لذا $2\in Z(R)$ و این در تناقض با فرض است.

چون $Z(R)$ یک ایده‌آل R است لذا هر عنصر از $x+Z(R)$ با هر عنصر از $(-x)+Z(R)$ مجاور است. لذا زیرگراف با مجموعه رئوس $(x+Z(R))\bigcup((-x)+Z(R))$ یک گراف دوبخشی کامل است که بنا بر بند اول قضیه تعداد رئوس در هر بخش α است، لذا زیرگراف با مجموعه رئوس $(x+Z(R))\bigcup((-x)+Z(R))$ یک گراف دوبخشی $K_{\alpha,\alpha}$ می‌باشد. اکنون فرض می‌کنیم $y+Z(R)$ هم‌دسته‌ای مجزا از $x+Z(R)$ باشد و $z_1,z_2\in Z(R)$، به طوری که دو عنصر $x+z_1\in x+Z(R)$ و $y+z_2\in y+Z(R)$ مجاور باشند. در این صورت

$$x+y+z_1+z_2=(x+z_1)+(y+z_2)\in Z(R)$$

چون $z_1+z_2\in Z(R)$ و $Z(R)$ ایده‌آل است پس $x+y\in Z(R)$ و در نتیجه

$$y+Z(R)=-x+Z(R)$$

بنابراین ثابت شد که برای هر $x\in Reg(R)$ عناصر $x+Z(R)$ تنها با عناصر هم‌دسته $(-x)+Z(R)$ مجاورند. همچنین مشابه بند ۱ تعداد عناصر $\{x+Z(R)|x\in Reg(R)\}$ برابر $\beta-1$ است و چون زیرگراف القایی با مجموعه رئوس $(x+Z(R))\bigcup((-x)+Z(R))$ تشکیل یک گراف دوبخشی کامل $K_{\alpha,\alpha}$ می‌دهند، بنابراین $Reg(\Gamma(R))$ اجتماع $\frac{\beta-1}{2}$ تا $K_{\alpha,\alpha}$ است. $\square$

فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد به‌طوری‌که $Z(R)$ ایده‌آلی از R است. در قضیه زیر به بررسی شرایط لازم و کافی جهت همبندی و کامل بودن گراف $Reg(\Gamma(R))$ می‌پردازیم و سپس با بررسی ثابت‌های گراف همبند $Reg(\Gamma(R))$ نتیجه خواهیم گرفت که فاصله هر دو رأس حداکثر دو است و چنانچه گراف $Reg(\Gamma(R))$ شامل حداقل یک دور باشد، کمر گراف منظم حداکثر چهار است.

قضیه ۵.۲ فرض کنید R یک حلقه باشد به طوری که $Z(R)$ ایده‌آلی از R است. در این صورت

۱) گراف $Reg(\Gamma(R))$ کامل است اگر و تنها اگر $R \cong Z_3$ یا $\frac{R}{Z(R)} \cong Z_2$.

۲) گراف $Reg(\Gamma(R))$ همبند است اگر و تنها اگر $\frac{R}{Z(R)} \cong Z_2$ یا $\frac{R}{Z(R)} \cong Z_3$.

اثبات. در نظر می‌گیریم $|\frac{R}{Z(R)}| = \beta$ و $|Z(R)| = \alpha$.

۱. $\Leftarrow$) فرض می‌کنیم $Reg(\Gamma(R))$ یک زیرگراف کامل $T(\Gamma(R))$ باشد. بنا بر قضیه ۴.۲، دو حالت وجود دارد:

الف) اگر $2 \in Z(R)$، در این صورت $Reg(\Gamma(R))$ اجتماع $\beta - 1$ تا K_α است. چون طبق فرض گراف $Reg(\Gamma(R))$ کامل است، پس دارای تنها یک مؤلفه همبندی می‌باشد، لذا $\beta - 1 = 1$. در این صورت $\beta = 2$ پس $|\frac{R}{Z(R)}| = 2$ و لذا $\frac{R}{Z(R)} \cong Z_2$.

ب) اگر $2 \notin Z(R)$، در این صورت $Reg(\Gamma(R))$ اجتماع $\frac{\beta-1}{2}$ تا $K_{\alpha,\alpha}$ است. چون طبق فرض $Reg(\Gamma(R))$ کامل و در نتیجه همبند است، لذا $\frac{\beta-1}{2} = 1$، پس $\beta = 3$. از طرفی چون تنها گراف کامل $K_{\alpha,\alpha}$ عبارت است از $K_2 = K_{1,1}$، لذا نتیجه می‌شود $\alpha = 1$. بنابراین $Z(R) = \{0\}$ و لذا $R \cong \frac{R}{Z(R)}$. با توجه به این‌که $\beta = 3$ بنابراین $R \cong Z_3$.

$\Rightarrow$) اگر $R \cong Z_3$ آن‌گاه به‌وضوح $Reg(R) = \{+1, -1\}$، پس $Reg(\Gamma(R)) = K_{1,1} = K_2$. بنابراین گراف $Reg(\Gamma(R))$ کامل است. حال اگر $\frac{R}{Z(R)} \cong Z_2$ آن‌گاه $|\frac{R}{Z(R)}| = 2$ و لذا $\frac{R}{Z(R)}$ تنها یک هم‌دسته غیر بدیهی دارد، یعنی به ازای هر $x, y \in Reg(R)$ داریم $x + Z(R) = -y + Z(R)$ و لذا $x + y \in Z(R)$، یعنی x و y مجاورند. پس گراف $Reg(\Gamma(R))$ کامل است.

۲. $\Leftarrow$) فرض می‌کنیم $Reg(\Gamma(R))$ یک زیرگراف همبند $T(\Gamma(R))$ باشد. مشابه قسمت قبل، بنا بر قضیه ۴.۲ دو حالت وجود دارد:

الف) اگر $2 \in Z(R)$ آن‌گاه $Reg(\Gamma(R))$ اجتماع $\beta - 1$ تا K_α است. از همبندی گراف $Reg(\Gamma(R))$ نتیجه می‌شود $\beta - 1 = 1$ و لذا $\beta = 2 = |\frac{R}{Z(R)}|$ و یا به عبارتی $\frac{R}{Z(R)} \cong Z_2$.

ب) اگر $2 \notin Z(R)$، در این صورت $Reg(\Gamma(R))$ اجتماع $\frac{\beta-1}{2}$ تا $K_{\alpha,\alpha}$ است. از همبندی گراف $Reg(\Gamma(R))$ نتیجه می‌شود $\frac{\beta-1}{2} = 1$ و لذا $\beta = 3$ و در نتیجه $\frac{R}{Z(R)} \cong Z_3$.

$\Rightarrow$) ابتدا فرض می‌کنیم $\frac{R}{Z(R)} \cong Z_2$. بنا بر بند یک گراف $Reg(\Gamma(R))$ کامل است و لذا $Reg(\Gamma(R))$ همبند است. اینک فرض می‌کنیم $\frac{R}{Z(R)} \cong Z_3$. لذا عناصر $x, y \in R \setminus Z(R)$ وجود دارند به طوری که $x + Z(R) \neq y + Z(R)$ و $\frac{R}{Z(R)} = \{Z(R), x + Z(R), y + Z(R)\}$. ادعا می‌کنیم $x + y \in Z(R)$. زیرا در غیر این صورت $(x + y) + Z(R) = x + Z(R)$ یا $(x + y) + Z(R) = y + Z(R)$. از دو تساوی اخیر نتیجه می‌شود $y \in Z(R)$ یا $x \in Z(R)$، که هر دو با انتخاب x و y در تناقض است. پس هر عنصر از هم‌دسته $x + Z(R)$ با هر عنصر از $y + Z(R)$ مجاور است. چون $Reg(R) = (x + Z(R)) \bigcup (y + Z(R))$ پس گراف $Reg(\Gamma(R))$ همبند است. □

با توجه به استدلال ارائه شده در بند ۲ قضیه قبل نتیجه زیر بدست می‌آید.

نتیجه ۶.۲ اگر R یک حلقه باشد به طوری که $Z(R)$ ایده‌آلی از R است، آن‌گاه گراف $Reg(\Gamma(R))$ همبند است اگر و تنها اگر $Reg(\Gamma(R)) = K_\alpha$ یا $Reg(\Gamma(R)) = K_{\alpha,\alpha}$.

نکته ۷.۲ با توجه به این‌که، هرگاه R یک دامنه صحیح باشد آن‌گاه $2 \in Z(R)$ اگر و تنها اگر $char(R) = 2$، لذا بنا بر قضیه ۴.۲ هرگاه R یک دامنه صحیح با مشخصه ۲ باشد، در این صورت $Reg(\Gamma(R))$ اجتماع $\beta - 1$ تا K_α می‌باشد. چون $\alpha = |Z(R)| = 1$ بنابراین $Reg(\Gamma(R))$ اجتماعی از گراف‌های K_1 می‌باشد، لذا $Reg(\Gamma(R))$ یک گراف پوچ است. همچنین ازیک رأسی بودن گراف $Z(\Gamma(R))$ پوچ بودن آن نتیجه می‌شود. بنابراین $T(\Gamma(R))$ پوچ می‌باشد.

اکنون برای درک بهتر قضایای فوق به ارائه چند مثال می‌پردازیم، اما قبل از آن بیان لم زیر مفید می‌باشد.

لم ۸.۲ فرض کنید R یک حلقه متناهی باشد. در این صورت