بسم الله الرحمن الرحيم

١٥٩١٥٠ - ٢٠٢٨٢٧٣

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه دکتری رشته ریاضی گرایش جبر

گراف کیلی صحیح و شبه ستاره هایی که توسط طیف ماتریس لاپلاسی تعیین می شوند

استادان راهنما:

دکتر علیرضا عبدالهی

دکتر علی اکبر محمدی حسن آبادی

پژوهشگر:

ابراهیم وطن دوست

آبان ماه ۱۳۸۹

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

۲۰۲۸۲۷۳
کد رهگیری

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه دکتری رشته ریاضی محض (نظریه گروهها) آقای ابراهیم وطن دوست

تحت عنوان:

گرافهایی که توسط طیفشان معین می شوند و گرافهای کیلی صحیح

در تاریخ ۸۹/۸/۱۰ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر علیرضا عبدالهی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۲- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر علی اکبر محمدی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکترسعید اعظم	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۴- استاد داور داخل گروه	دکتر جواد باقریان	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۵- استاد داور خارج گروه	دکتر بیژن طائری	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۶- استاد داور خارج گروه	دکتر غلامرضا امیدی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه

سپاسگزاری

در آغاز بر خود واجب می دانم از استادان راهنمای بزرگوارم، آقای دکتر علی اکبر محمدی حسن آبادی و آقای دکتر علیرضا عبدالهی که تجربیات و دانش گرانبهایشان که نتیجه ی سالها مرارت و کوشش است را در اختیار اینجانب قرار داده ا ند تشکر و قدردانی کنم.

تقدیم به همسرم

و

فرزندانم

شایان

شادیسا

و

شهراد

چکیده

گراف G را صحیح نامیم هرگاه تمام مقادیر ویژه ماتریس مجاورت آن متعلق به مجموعه اعداد صحیح باشد. « کدام گراف ها صحیح هستند؟» این سوالی بود که در سال ۱۹۷۳ توسط هاراری و اسچواینک مطرح شد. با استفاده از یکی از نتایج بابای که طیف گراف کیلی یک گروه را برحسب سرشت های تحویل ناپذیر گروه مربوطه بیان می کند، تعدادی خانواده ی نامتناهی از گراف های کیلی صحیح ارائه می کنیم. همچنین گراف های کیلی صحیح با درجه منظمی حداکثر ۴ را روی گروه های آبلی متناهی تعیین خواهیم کرد.

فرض کنید M ماتریس مجاورت، لاپلاسی یا لاپلاسی بدون علامت گراف G باشد. در این صورت می گوییم G توسط طیفش بر حسب M تعیین می شود هرگاه گرافی غیر یکریخت و هم طیف بر حسب M با آن گراف موجود نباشد. گرافی را که توسط طیفش تعیین می شود یک گراف DS می نامیم. سوال «کدام گراف ها DS هستند؟» به تقریبا نیم قرن قبل بر می گردد. در آن موقع تصور بر این بود که تمام گراف ها DS هستند. تا اینکه در سال ۱۹۵۷ کولاتز و سینوگویتز یک جفت درخت غیر یکریخت و هم طیف ارائه کردند. در این پایان نامه ثابت می کنیم تمام شبه ستاره ها با ماکسیمم درجه ۴ توسط طیف ماتریس لاپلاسی بدون علامتشان تعیین می شوند.

کلمات کلیدی: گراف کیلی، طیف گراف، گراف های هم طیف، گراف صحیح، شبه ستاره.

فهرست مندرجات

فصل ۱

نمایش و سرشت گروه

در این فصل نمایش و سرشت یک گروه را معرفی می‌کنیم. درآخر نیز جدول سرشت چند گروه خاص را که در فصل سوم نیاز داریم، ارائه خواهیم کرد.

۱.۱ نمایش گروه

در این بخش تعاریف و قضایای مربوط به نمایش یک گروه را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری روی یک میدان F باشد. مجموعه‌ی تمام تبدیل های خطی وارون پذیر روی V به همراه عمل ترکیب توابع تشکیل یک گروه می‌دهند که گروه خطی عام نامیده می‌شود و آن را با $GL(n, V)$ نشان می دهند که در آن n بعد V می‌باشد. این گروه با گروه ضربی حاصل از ماتریس های وارون پذیر $n \times n$ با درایه‌های در F یکریخت است وآن را به اختصار با $GL(n, F)$ نشان می‌دهند.

همچنین اگر F میدان متناهی از مرتبه‌ی q باشد این گروه با $GL(n,q)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. مجموعه‌ی عناصر ناصفر میدان F نسبت به عمل ضرب تشکیل یک گروه می‌دهند که با F^* نمایش داده می‌شود. تابع $\det : GL(n,F) \longrightarrow F^*$ یک همریختی گروهی است. هسته‌ی این همریختی را گروه خطی خاص نامیده آن را با $SL(n,F)$ نمایش می‌دهند. اگر F میدان متناهی از مرتبه‌ی q باشد این گروه با $SL(n,q)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و F یک میدان باشد. یک همریختی مانند ρ از G به $GL(n,F)$ را یک نمایش G روی F از درجه‌ی n می‌نامند.

فرض کنیم G یک گروه باشد. تابع $\rho : G \longrightarrow GL(n,F)$ با ضابطه‌ی $g\rho = I_n$ به ازای هر $g \in G$ یک نمایش G است. بنابراین هر گروه، نمایش‌هایی دارد که درجاتشان به قدر دلخواه بزرگ است. نمایش $\rho : G \longrightarrow GL(۱,F)$ با ضابطه‌ی $g\rho = (۱)$، نمایش بدیهی G نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم $\rho : G \longrightarrow GL(m,F)$ و $\sigma : G \longrightarrow GL(n,F)$ نمایش‌هایی از G باشند. گوییم ρ با σ هم ارز است هرگاه $m = n$ و ماتریس وارون پذیر $n \times n$ ای مانند A موجود باشد به قسمی که برای هر $g \in G$، تساوی $g\sigma = A^{-۱}(g\rho)A$ برقرار باشد.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و V یک فضای برداری روی F باشد. در این صورت V را یک FG-مدول نامیم هرگاه برای هر $v \in V$ و هر $g \in G$، حاصل ضرب vg تعریف شود و به ازای هر $u, v \in V$، $\lambda \in F$ و $g, h \in G$ شرایط زیر برقرار باشند:

۱) $vg \in V$،

۲) $v(gh) = (vg)h$،

۳) $v1 = v$،

۴) $(\lambda v)g = \lambda(vg)$،

۵) $(u + v)g = ug + vg$.

از شرایط (۱)، (۴) و (۵) این تعریف نتیجه می‌شود که برای هر $g \in G$ تابع $\rho_g : V \longrightarrow V$ با ضابطه‌ی $v\rho_g = vg$ یک درونریختی V است. اگر B یک پایه‌ی V باشد به ازای هر $g \in G$ نماد $[g]_B$ را برای نشان دادن ماتریس درونریختی ρ_g نسبت به پایه‌ی B به کار می‌بریم. قضیه‌ی زیر ارتباط بین FG- مدول ها و نمایش های G روی F را نشان می‌دهد.

قضیه ۱.۱.۶.

(۱) اگر $\rho : G \longrightarrow GL(n, F)$ نمایش G روی F باشد و $V = F^n$، آنگاه با تعریف vg به صورت زیر ، V به FG-مدول تبدیل می‌شود.

$$vg = v(g\rho) \quad (v \in V, g \in G)$$

به علاوه پایه‌ای مانند B برای V وجود دارد به قسمی که:

$$g\rho = [g]_B \quad (g \in G)$$

۲) فرض کنیم V یک FG-مدول و B پایه‌ای برای آن باشد. در این صورت تابع زیر یک نمایش G روی F است.

$$g \longrightarrow [g]_B \quad (g \in G)$$

اثبات. رجوع شود به [[۳۴]، صفحه ۴۵، قضیه ۴.۴]. □

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم V یک FG- مدول باشد. زیرمجموعه‌ی W از V را یک FG- زیرمدول V نامیم هرگاه W زیرفضائی از V باشد و به ازای هر $w \in W$ وهر $g \in G$ داشته باشیم $wg \in W$.

تعریف ۸.۱.۱. FG- مدول V را تحویل‌ناپذیر نامیم هرگاه مخالف صفر باشد و FG- زیرمدولی غیر از $\{0\}$ و V نداشته باشد. در غیر این صورت آن را تحویل‌پذیر می‌نامیم.

تعریف ۹.۱.۱. نمایش $\rho : G \longrightarrow GL(n,F)$ را تحویل‌ناپذیر نامیم هرگاه F^n، یعنی FG- مدول متناظر با آن که به صورت زیر تعریف می‌شود، تحویل‌ناپذیر باشد.

$$vg = v(g\rho); \quad (v \in F^n, g \in G)$$

همچنین ρ را تحویل‌پذیر نامیم هرگاه F^n تحویل‌پذیر باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید V و W دو FG- مدول باشند. تابع $T : V \longrightarrow W$ را یک FG- همریختی نامیم هرگاه T تبدیلی خطی باشد و نیز داشته باشیم :

$$(vg)T = (vT)g \quad \forall v \in V, \forall g \in G$$

قضیه ۱۱.۱.۱. (قضیه‌ی مشکه[۱]) فرض کنید G گروهی متناهی و F میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ و V یک FG-مدول باشد. اگر U یک FG- زیرمدول V باشد آنگاه FG- زیرمدولی از V مانند W وجود دارد به قسمی که $V = U + W$.

اثبات. رجوع شود به [[۳۴]، صفحه ۷۹، قضیه ۱.۸]. □

تعریف ۱۲.۱.۱. FG- مدول V را کاملاً تحویل‌پذیر گوییم هرگاه $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$، که درآن هرکدام از U_iها FG- زیرمدول‌های تحویل‌ناپذیر V هستند.

قضیه ۱۳.۱.۱. اگر G گروهی متناهی و F میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد، آنگاه هرFG- مدول ناصفر، کاملاً تحویل‌پذیراست.

اثبات. رجوع شود به [[۳۴]، صفحه ۸۳، قضیه ۷.۸]. □

لم ۱۴.۱.۱.(لم شور[۲]) فرض کنید V و W دو $\mathbb{C}G$- مدول تحویل‌ناپذیر باشند. دراین صورت:

۱) اگر $T : V \longrightarrow W$ یک $\mathbb{C}G$- همریختی باشد، آنگاه یا T یک $\mathbb{C}G$- یکریختی است یا به ازای هر $v \in V$، $vT = 0$.

۲) اگر $T : V \longrightarrow V$ یک $\mathbb{C}G$- یکریختی باشد، آنگاه T مضرب اسکالری از درونریختی همانی 1_V است.

[۱] Maschke
[۲] Schur

اثبات. رجوع شود به [[۳۴]، صفحه ۸۷، لم ۱.۹]. □

گزاره ۱۵.۱.۱. فرض کنید V یک $\mathbb{C}G$- مدول ناصفر باشد به قسمی که هر $\mathbb{C}G$- همریختی از V به V مضرب اسکالری 1_V است. در این صورت V تحویل‌ناپذیراست .

اثبات. رجوع شود به [[۳۴]، صفحه ۸۸، گزاره ۲.۹]. □

نتیجه ۱٦.۱.۱. فرض کنید $\rho : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ نمایش G باشد. دراین صورت ρ تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر هر ماتریس $n \times n$ مانند A که در تساوی زیر

$$(g\rho)A = A(g\rho) \quad \forall g \in G$$

صدق کند، مضرب اسکالری از ماتریس همانی است.

اثبات. رجوع شود به [[۳۴]، صفحه ۸۸، نتیجه ۳.۹]. □

گزاره ۱۷.۱.۱. اگر G یک گروه آبلی متناهی باشد، آنگاه بعد هر $\mathbb{C}G$- مدول تحویل‌ناپذیر برابر ۱ است.

اثبات. رجوع شود به [[۳۴]، صفحه ۹۰، گزاره ۵.۹]. □

قضیه ۱۸.۱.۱. هر گروه آبلی متناهی با حاصل ضرب مستقیم گروه‌هایی دوری یکریخت است.

اثبات. رجوع شود به [[۳۵]، فصل ٦]. □

فرض کنیم $G = C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_r}$ و به ازای $1 \leq i \leq r$، c_i مولد C_{n_i} باشد. می‌نویسیم

$$g_i = (1, \cdots, c_i, \cdots, 1)$$

جائیکه c_i در مکان i-ام قرار دارد. در این صورت $G = \langle g_1, \ldots, g_r \rangle$ که در آن $g_i^{n_i} = 1$ و $g_i g_j = g_j g_i$. حال فرض کنید $\rho : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ یک نمایش تحویل‌ناپذیر G روی $\mathbb{C}$ باشد. دراین صورت بنابر گذاره‌ی ۱۷.۱.۱

داریم $n = 1$، ولذا به ازای $1 \leq i \leq r$، عددی مانند $\lambda_i \in \mathbb{C}$ وجود دارد به قسمی که $g_i\rho = (\lambda_i)$. چون مرتبه‌ی g_i برابر n_i است پس $\lambda_i^{n_i} = 1$. علاوه بر این مقادیر $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ نمایش ρ را معین می‌کنند، زیرا به ازای $g \in G$ داریم $g = g_1^{i_1} \dots g_r^{i_r}$ و در نتیجه $g\rho = (g_1^{i_1} \cdots g_r^{i_r})\rho = (\lambda_1^{i_1} \dots \lambda_r^{i_r})$. نمایشی مانند ρ از G را که به ازای تمام $i_1, \cdots, i_r$ ها در تساوی اخیر صدق کند به صورت $\rho = \rho_{\lambda_1 \dots \lambda_r}$ نشان می‌دهیم.

برعکس به ازای n_i دلخواه و λ_i هایی که ریشه های n_i-ام واحد هستند ($1 \leq i \leq r$)، تابع

$$g_1^{i_1} \dots g_r^{i_r} \longrightarrow (\lambda_1^{i_1} \dots \lambda_r^{i_r})$$

یک نمایش G است. تعداد چنین نمایش‌هایی $n_1 \cdots n_r$ است و هیچ یک از آن ها با دیگری هم ارز نیست. بدین ترتیب قضیه‌ی زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۱۹.۱.۱. **فرض کنید G گروه آبلی $C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_r}$ باشد. در این صورت نمایش‌های $\rho_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}$ که در بالا ساخته شدند تحویل‌ناپذیر و دارای درجه‌ی ۱ هستند. تعداد این نمایش‌ها $|G|$ است و هر نمایش تحویل‌ناپذیر G روی $\mathbb{C}$ دقیقاً هم ارز یکی از آن‌هاست.**

قضیه ۲۰.۱.۱. **فرض کنید $V_1, \cdots, V_k$ تشکیل دهنده‌ی مجموعه‌ی کاملی از $\mathbb{C}G$- مدول های تحویل‌ناپذیر غیریکریخت باشند. در این صورت: $\sum_{i=1}^{k}(dimV_i)^2 = |G|$**

اثبات. رجوع شود به [[۳۴]، صفحه ۱۱۲، قضیه ۱۲.۱۱]. □

۲.۱ رده‌ی مزدوجی

دراین بخش به مبحثی از نظریه‌ی گروه‌ها می‌پردازیم که در مطالعه‌ی نظریه‌ی نمایش به کارمی‌آیند. پس از تعریف رده‌ی مزدوجی، رده‌های مزدوجی گروه‌های دووجهی، متقارن، متناوب و چند گروه خاص را معرفی خواهیم کرد.

دراین بخش فرض می‌کنیم G گروهی متناهی است.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید $x, y \in G$. گوییم x مزدوج y در G است اگر عضوی مانند $g \in G$ موجود باشد به قسمی که $y = g^{-1}xg$. مجموعه‌ی تمام عناصری که با x در G مزدوجند عبارت است از:

$$x^G = \{g^{-1}xg : g \in G\}$$

گزاره ۲.۲.۱. اگر $x, y \in G$ آنگاه $x^G = y^G$ یا $x^G \cap y^G = \varnothing$.

اثبات. رجوع شود به [[۳۴]، صفحه ۱۱۵، گزاره ۲.۱۲]. □

تعریف ۳.۲.۱. اگر $G = x_1^G \cup \dots x_\ell^G$ و رده‌های مزدوجی x_1^G، ...، x_ℓ^G متمایز باشند، آنگاه x_1، ⋯، x_ℓ را نماینده‌های رده‌های مزدوجی G می‌نامیم.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید $x \in G$. مرکزساز x در G، که آن را با نماد $C_G(x)$ نشان می‌دهند، عبارت است از مجموعه‌ی عناصری از G که با x جابجا می‌شوند، یعنی

$$C_G(x) = \{g \in G : xg = gx\}$$

قضیه ۵.۲.۱. فرض کنید $x \in G$. دراین صورت :

$$|x^G| = |G : C_G(x)| = |G|/|C_G(x)|$$

اثبات. رجوع شود به [[۳۴]، صفحه ۱۱۷، قضیه ۸.۱۲]. □

قضیه ۶.۲.۱. فرض کنید x_1، ...، x_ℓ نماینده‌های رده‌های مزدوجی G باشند. دراین صورت :

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x_i \notin Z(G)} |x_i^G|$$

اثبات. رجوع شود به [[۳۴]، صفحه ۱۱۸، قضیه ۱۰.۱۲]. □

قضیه ۷.۲.۱. فرض کنید $G = D_{2n} = \langle a, b : a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. در این صورت :

۱) اگر n فرد باشد، آنگاه G دقیقاً دارای $(n+3)/2$ رده‌ی مزدوجی است که عبارتند از:

$$\{1\}, \{a, a^{-1}\}, \cdots, \{a^{(n-1)/2}, a^{-(n-1)/2}\}, \{b, ab, \cdots, a^{n-1}b\}$$

۲) اگر $n = 2m$، آنگاه G دقیقاً دارای $m + 3$ رده‌ی مزدوجی است که عبارتند از:

$$\{1\}, \{a^m\}, \{a, a^{-1}\}, \cdots, \{a^{m-1}, a^{-m+1}\}, \{a^{2j}b : 0 \leq j \leq m-1\}, \{a^{2j+1}b : 0 \leq j \leq m-1\}$$

اثبات. رجوع شود به [[۳۴]، صفحه ۱۱۸ و ۱۱۹]. □

قضیه ۸.۲.۱. اگر $x \in S_n$ آنگاه x^{S_n}، متشکل از جایگشت هایی از S_n است که شاکله‌ی دوری آن‌ها با شاکله‌ی دوری x یکی است.

اثبات. رجوع شود به [[۳۴]، صفحه ۱۲۰، قضیه ۱۵.۱۲]. □

گزاره ۹.۲.۱. فرض کنید $x \in A_n$ و $n > 1$. در این صورت:

۱) اگر x با جایگشت فردی از S_n جابجا شود آنگاه $x^{S_n} = x^{A_n}$.

۲) در غیر این صورت x^{S_n} به دو رده‌ی مزدوجی A_n با اندازه‌های برابر و نماینده‌های x و $(1\ 2)x(1\ 2)$ تجزیه می‌شود.

اثبات. رجوع شود به [[۳۴]، صفحه ۱۲۲، گزاره ۱۷.۱۲]. □

قضیه ۱۰.۲.۱. فرض کنید $G = T_{4n} = \langle a, b : a^{2n} = 1, a^n = b^2, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$. در این صورت G دقیقاً دارای $n + 3$ رده‌ی مزدوجی است که عبارتند از:

$$\{1\}, \{a^n\}, \{a^r, a^{-r}\} \quad (1 \leq r \leq n-1), \{a^{2j}b : 0 \leq j \leq n-1\}, \{a^{2j+1}b : 0 \leq j \leq n-1\}$$

اثبات. رجوع شود به[۳۴]، صفحه ۴۲۰ . □

قضیه ۱۱.۲.۱. فرض کنید $G = U_{6n} = \langle a, b : a^{2n} = b^3 = 1, a^{-1}ba = b^{-1}\rangle$. در این صورت G دقیقاً دارای $3n$ رده‌ی مزدوجی است که عبارتند از:

$$\{a^{2r}\}, \{a^{2r}b, a^{2r}b^2\}, \{a^{2r+1}, a^{2r+1}b, a^{2r+1}b^2\} \quad (0 \leq r \leq n-1)$$

اثبات. رجوع شود به [۳۴]، صفحه ۴۲۱. □

قضیه ۱۲.۲.۱. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت فرد باشد و

$$G = V_{8n} = \langle a, b : a^{2n} = b^4 = 1, ba = a^{-1}b^{-1}, b^{-1}a = a^{-1}b\rangle.$$

دراین صورت G دقیقاً دارای $۲n+۳$ رده‌ی مزدوجی است که عبارتند از:

$$\{۱\}, \{b^۲\}, \{a^{۲r+۱}, a^{-۲r-۱}b^۲\} \quad (۰ \leq r \leq n-۱)$$

$$\{a^{۲s}b, a^{-۲s}\}, \{a^{۲s}b^۲, a^{-۲s}b^۲\} \quad (۱ \leq s \leq (n-۱)/۲)$$

$$\{a^j b, a^j b^۳ : j = ۲k\}, \quad \{a^j b, a^j b^۳ : j = ۲k+۱\}$$

اثبات. رجوع شود به [۳۴]، صفحه ۴۲۱ . □

۳.۱ سرشت

دراین بخش سرشت گروه را تعریف خواهیم کرد. سپس سرشت‌های تحویل‌ناپذیر یک گروه را معرفی کرده در آخر جدول سرشت گروه‌های دوری متناهی، گروه دووجهی و چند گروه دیگر را که در فصل بعد مورد نیاز هستند را ارایه خواهیم کرد.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم $\rho : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ یک نمایش گروه G باشد. درای صورت تابع $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه‌ی $\chi(g) = tr(g\rho) \quad (g \in G)$ را یک سرشت G از درجه‌ی n می نامیم. سرشت درجه‌ی یک را سرشت خطی می‌نامیم. همچنین می گوییم χ یک سرشت تحویل‌ناپذیر G است هرگاه $\mathbb{C}G$- مدول $\mathbb{C}^n$ متناظر با آن نمایش، تحویل‌ناپذیر باشد. فرض کنیم V یک $\mathbb{C}G$- مدول باشد. دراین صورت تابع $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه‌ی