

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

١٨٩١٥. - ٢٠٢٨٢٧٢



دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه دکتری رشته ریاضی گرایش جبر

گراف کیلی صحیح و شبه ستاره هایی که توسط طیف ماتریس لاپلاسی تعیین

می شوند

استادان راهنما:

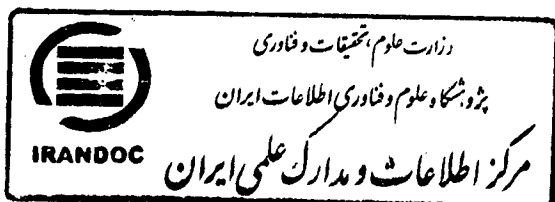
دکتر علیرضا عبدالهی

دکتر علی اکبر محمدی حسن آبادی

پژوهشگر:

ابراهیم وطن دوست

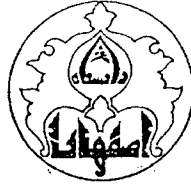
آبان ماه ۱۳۸۹



۱۵۹۱۵۰

۱۳۹۰/۳/۱۸

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات،
ابتکارات و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع
این پایان نامه متعلق به دانشگاه اصفهان است.



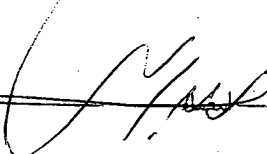
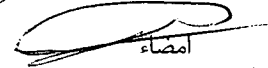

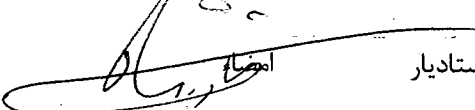

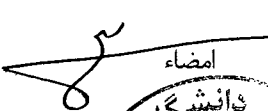
۲۰۲۸۲۷۳
دکتر رهگیری

پایان نامه دکتری رشته ریاضی محض (نظریه گروهها) آقای ابراهیم وطن دوست

تحت عنوان:

گرافهایی که توسط طیفشان معین می شوند و گرافهای کیلی صحیح

در تاریخ ۸۹/۸/۱۰ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

- | | | | |
|---|------------------------|----------------------|-----------------------------|
|  | با مرتبه علمی استاد | دکتر علیرضا عبدالهیی | ۱- استاد راهنمای پایان نامه |
|  | با مرتبه علمی استاد | دکتر علی اکبر محمدی | ۲- استاد راهنمای پایان نامه |
|  | با مرتبه علمی استاد | دکتر سعید اعظم | ۳- استاد داور داخل گروه |
|  | با مرتبه علمی استادیار | دکتر جواد باقریان | ۴- استاد داور داخل گروه |
|  | با مرتبه علمی استاد | دکتر بیژن طائری | ۵- استاد داور خارج گروه |
|  | با مرتبه علمی استادیار | دکتر غلامرضا امیدی | ۶- استاد داور خارج گروه |

امضاء
مهر و امضای مدیر گروه
دانشگاه اصفهان

سپاسگزاری

در آغاز بر خود واجب می دانم از استادان راهنمای بزرگوارم، آقای دکتر علی اکبر محمدی حسن آبادی و آقای دکتر علیرضا عبدالمهی که تجربیات و دانش گرانبهایشان که نتیجه ی سالها مرارت و کوشش است را در اختیار اینجانب قرار داده اند تشکر و قدردانی کنم.

تقديم به همسر

و

فرزندنام

شایان

شاديسا

و

شهراد

چکیده

گراف G را صحیح نامیم هرگاه تمام مقادیر ویژه ماتریس مجاورت آن متعلق به مجموعه اعداد صحیح باشد. « کدام گراف ها صحیح هستند؟» این سوالی بود که در سال ۱۹۷۳ توسط هاراری و اسچواینک مطرح شد. با استفاده از یکی از نتایج بابای که طیف گراف کیلی یک گروه را بر حسب سرشت های تحویل ناپذیر گروه مربوطه بیان می کند، تعدادی خانواده ی نامتناهی از گراف های کیلی صحیح ارائه می کنیم. همچنین گراف های کیلی صحیح با درجه منظمی حداکثر ۴ را روی گروه های اَبلی متناهی تعیین خواهیم کرد.

فرض کنید M ماتریس مجاورت، لاپلاسی یا لاپلاسی بدون علامت گراف G باشد. در این صورت می گوئیم G توسط طیفش بر حسب M تعیین می شود هرگاه گرافی غیر یکریخت و هم طیف بر حسب M با آن گراف موجود نباشد. گرافی را که توسط طیفش تعیین می شود یک گراف DS می نامیم. سوال «کدام گراف ها DS هستند؟» به تقریباً نیم قرن قبل بر می گردد. در آن موقع تصور بر این بود که تمام گراف ها DS هستند. تا اینکه در سال ۱۹۵۷ کولاتز و سینوگویتز یک جفت درخت غیر یکریخت و هم طیف ارائه کردند. در این پایان نامه ثابت می کنیم تمام شبه ستاره ها با ماکسیمم درجه ۴ توسط طیف ماتریس لاپلاسی بدون علامتشان تعیین می شوند.

کلمات کلیدی: گراف کیلی، طیف گراف، گراف های هم طیف، گراف صحیح، شبه ستاره.

فهرست مندرجات

۱ نمایش و سرشت گروه

۱	نمایش گروه	۱.۱
۸	رده ی مزدوجی	۲.۱
۱۱	سرشت	۳.۱

۲ مقدماتی از گراف

۲۰	مقدمه	۱.۲
۲۱	تعاریف وقضایا	۱.۲

۳ گراف های کیلی صحیح

۳۸	مقدمه	۱.۳
۳۹	تاریخچه	۲.۳
۴۰	گراف های کیلی گروه های آبلی با درجه منظمی حداکثر ۳	۳.۳
۶۵	گراف های کیلی گروه های آبلی با درجه منظمی حداکثر ۴	۴.۳
۷۵	چند خانواده از گراف های صحیح	۵.۳

۴ شبه ستاره هایی که توسط طیفشان تعیین می شوند

۸۶	مقدمه	۱.۴
۸۷	تاریخچه	۲.۴
۸۸	درخت های شبه ستاره با ماکسیمم درجه ۴	۳.۴
۱۲۱	گراف های هم طیف با $S(a,b,c,d)$ بر حسب ماتریس مجاورت	۴.۴

فصل ۱

نمایش و سرشت گروه

در این فصل نمایش و سرشت یک گروه را معرفی می‌کنیم. در آخر نیز جدول سرشت چند گروه خاص را که در فصل سوم نیاز داریم، ارائه خواهیم کرد.

۱.۱ نمایش گروه

در این بخش تعاریف و قضایای مربوط به نمایش یک گروه را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری روی یک میدان F باشد. مجموعه‌ی تمام تبدیل‌های خطی وارون پذیر روی V به همراه عمل ترکیب توابع تشکیل یک گروه می‌دهند که گروه خطی عام نامیده می‌شود و آن را با $GL(n, V)$ نشان می‌دهند که در آن n بعد V می‌باشد. این گروه با گروه ضربی حاصل از ماتریس‌های وارون پذیر $n \times n$ با درایه‌های در F یکریخت است و آن را به اختصار با $GL(n, F)$ نشان می‌دهند.

همچنین اگر F میدان متناهی از مرتبه q باشد این گروه با $GL(n, q)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. مجموعه‌ی عناصر ناصفر میدان F نسبت به عمل ضرب تشکیل یک گروه می‌دهند که با F^* نمایش داده می‌شود. تابع $\det : GL(n, F) \rightarrow F^*$ یک همریختی گروهی است. هسته‌ی این همریختی را گروه خطی خاص نامیده آن را با $SL(n, F)$ نمایش می‌دهند. اگر F میدان متناهی از مرتبه q باشد این گروه با $SL(n, q)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و F یک میدان باشد. یک همریختی مانند ρ از G به $GL(n, F)$ را یک نمایش G روی F از درجه‌ی n می‌نامند.

فرض کنیم G یک گروه باشد. تابع $\rho : G \rightarrow GL(n, F)$ با ضابطه‌ی $g\rho = I_n$ به ازای هر $g \in G$ یک نمایش G است. بنابراین هر گروه، نمایش‌هایی دارد که درجاتشان به قدر دلخواه بزرگ است. نمایش $\rho : G \rightarrow GL(1, F)$ با ضابطه‌ی $g\rho = (1)$ ، نمایش بدیهی G نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم $\rho : G \rightarrow GL(m, F)$ و $\sigma : G \rightarrow GL(n, F)$ نمایش‌هایی از G باشند. گوییم σ با هم ارز است هرگاه $m = n$ و ماتریس وارون پذیر $n \times n$ ای مانند A موجود باشد به قسمی که برای هر $g \in G$ ، تساوی $g\sigma = A^{-1}(g\rho)A$ برقرار باشد.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و V یک فضای برداری روی F باشد. در این صورت V را یک FG -مدول نامیم هرگاه برای هر $v \in V$ و هر $g \in G$ ، حاصل ضرب vg تعریف شود و به ازای هر $u, v \in V$ ، $\lambda \in F$ و $g, h \in G$ شرایط زیر برقرار باشند:

$$vg \in V \quad (1)$$

$$v(gh) = (vg)h \quad (۲)$$

$$v1 = v \quad (۳)$$

$$(\lambda v)g = \lambda(vg) \quad (۴)$$

$$(u + v)g = ug + vg \quad (۵)$$

از شرایط (۱)، (۴) و (۵) این تعریف نتیجه می‌شود که برای هر $g \in G$ تابع $\rho_g : V \rightarrow V$ با ضابطه‌ی $v\rho_g = vg$ یک درونریختی V است. اگر B یک پایه‌ی V باشد به ازای هر $g \in G$ نماد $[g]_B$ را برای نشان دادن ماتریس درونریختی ρ_g نسبت به پایه‌ی B به کار می‌بریم. قضیه‌ی زیر ارتباط بین FG -مدول‌ها و نمایش‌های G روی F را نشان می‌دهد.

قضیه ۶.۱.۱

(۱) اگر $\rho : G \rightarrow GL(n, F)$ نمایش G روی F باشد و $V = F^n$ ، آنگاه با تعریف vg به صورت زیر، V به FG -مدول تبدیل می‌شود.

$$vg = v(g\rho) \quad (v \in V, g \in G)$$

به علاوه پایه‌ای مانند B برای V وجود دارد به قسمی که:

$$g\rho = [g]_B \quad (g \in G)$$

(۲) فرض کنیم V یک FG -مدول و B پایه‌ای برای آن باشد. در این صورت تابع زیر یک نمایش G روی F است.

$$g \rightarrow [g]_B \quad (g \in G)$$

اثبات. رجوع شود به [۳۴]، صفحه ۴۵، قضیه ۴.۴. □

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم V یک FG -مدول باشد. زیرمجموعه‌ی W از V را یک FG -زیرمدول V نامیم هرگاه W زیرفضائی از V باشد و به ازای هر $w \in W$ و هر $g \in G$ داشته باشیم $wg \in W$.

تعریف ۸.۱.۱. FG -مدول V را تحویل‌ناپذیر نامیم هرگاه مخالف صفر باشد و FG -زیرمدولی غیر از $\{0\}$ و V نداشته باشد. در غیر این صورت آن را تحویل‌پذیر می‌نامیم.

تعریف ۹.۱.۱. نمایش $\rho: G \rightarrow GL(n, F)$ را تحویل‌ناپذیر نامیم هرگاه F^n ، یعنی FG -مدول متناظر با آن که به صورت زیر تعریف می‌شود، تحویل‌ناپذیر باشد.

$$vg = v(g\rho); \quad (v \in F^n, g \in G)$$

همچنین ρ را تحویل‌پذیر نامیم هرگاه F^n تحویل‌پذیر باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید V و W دو FG -مدول باشند. تابع $T: V \rightarrow W$ را یک FG -همریختی نامیم

هرگاه T تبدیلی خطی باشد و نیز داشته باشیم:

$$(vg)T = (vT)g \quad \forall v \in V, \forall g \in G$$

قضیه ۱۱.۱.۱. (قضیه‌ی مشکه^۱) فرض کنید G گروهی متناهی و F میدان \mathbb{R} یا \mathbb{C} و V یک FG -مدول باشد. اگر U یک FG -زیرمدول V باشد آنگاه FG -زیرمدولی از V مانند W وجود دارد به قسمی که

$$V = U + W.$$

اثبات. رجوع شود به [۳۴]، صفحه ۷۹، قضیه ۱.۸]. □

تعریف ۱۲.۱.۱. FG -مدول V را کاملاً تحویل‌پذیر گوئیم هرگاه $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$ ، که در آن هر کدام از U_i ها FG -زیرمدول‌های تحویل‌ناپذیر V هستند.

قضیه ۱۳.۱.۱. اگر G گروهی متناهی و F میدان \mathbb{R} یا \mathbb{C} باشد، آنگاه هر FG -مدول ناصفر، کاملاً تحویل‌پذیر است.

اثبات. رجوع شود به [۳۴]، صفحه ۸۳، قضیه ۷.۸]. □

لم ۱۴.۱.۱. (لم شور^۲) فرض کنید V و W دو CG -مدول تحویل‌ناپذیر باشند. در این صورت:

(۱) اگر $T: V \rightarrow W$ یک CG -همریختی باشد، آنگاه یا T یک CG -یکریختی است یا به ازای هر $v \in V$ ،

$$vT = 0.$$

(۲) اگر $T: V \rightarrow V$ یک CG -یکریختی باشد، آنگاه T مضرب اسکالری از درونریختی همانی 1_V است.

Maschke^۱

Schur^۲

اثبات. رجوع شود به [۳۴]، صفحه ۸۷، لم ۱.۹]. □

گزاره ۱۵.۱.۱. فرض کنید V یک CG -مدول ناصفر باشد به قسمی که هر CG -همریختی از V به V مضرب اسکالری λ_V است. در این صورت V تحویل ناپذیر است.

اثبات. رجوع شود به [۳۴]، صفحه ۸۸، گزاره ۲.۹]. □

نتیجه ۱۶.۱.۱. فرض کنید $\rho: G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ نمایش G باشد. در این صورت ρ تحویل ناپذیر است اگر و تنها اگر هر ماتریس $n \times n$ مانند A که در تساوی زیر

$$(g\rho)A = A(g\rho) \quad \forall g \in G$$

صدق کند، مضرب اسکالری از ماتریس همانی است.

اثبات. رجوع شود به [۳۴]، صفحه ۸۸، نتیجه ۳.۹]. □

گزاره ۱۷.۱.۱. اگر G یک گروه آبلی متناهی باشد، آنگاه بعد هر CG -مدول تحویل ناپذیر برابر ۱ است.

اثبات. رجوع شود به [۳۴]، صفحه ۹۰، گزاره ۵.۹]. □

قضیه ۱۸.۱.۱. هر گروه آبلی متناهی با حاصل ضرب مستقیم گروه‌هایی دوری یکرخت است.

اثبات. رجوع شود به [۳۵]، فصل ۶]. □

فرض کنیم $G = C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_r}$ و به ازای $1 \leq i \leq r$ مولد c_i مولد C_{n_i} باشد. می‌نویسیم

$$g_i = (1, \dots, c_i, \dots, 1)$$

جائیکه c_i در مکان i -ام قرار دارد. در این صورت $G = \langle g_1, \dots, g_r \rangle$ که در آن $g_i^{n_i} = 1$ و $g_i g_j = g_j g_i$. حال

فرض کنید $\rho: G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ یک نمایش تحویل ناپذیر G روی \mathbb{C} باشد. در این صورت بنابر گزاره ۱۷.۱.۱

داریم $n = 1$ ، ولذا به ازای $1 \leq i \leq r$ ، عددی مانند $\lambda_i \in \mathbb{C}$ وجود دارد به قسمی که $g_i \rho = (\lambda_i)$. چون مرتبه‌ی g_i برابر n_i است پس $\lambda_i^{n_i} = 1$. علاوه بر این مقادیر $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ نمایش ρ را معین می‌کنند، زیرا به ازای $g \in G$ داریم $g = g_1^{i_1} \dots g_r^{i_r}$ و در نتیجه $g \rho = (g_1^{i_1} \dots g_r^{i_r}) \rho = (\lambda_1^{i_1} \dots \lambda_r^{i_r})$. نمایشی مانند ρ از G را که به ازای تمام i_1, \dots, i_r ها در تساوی اخیر صدق کند به صورت $\rho = \rho_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}$ نشان می‌دهیم.

برعکس به ازای n_i دلخواه λ_i هایی که ریشه های n_i -ام واحد هستند ($1 \leq i \leq r$)، تابع

$$g_1^{i_1} \dots g_r^{i_r} \rightarrow (\lambda_1^{i_1} \dots \lambda_r^{i_r})$$

یک نمایش G است. تعداد چنین نمایش‌هایی $n_1 \dots n_r$ است و هیچ یک از آن‌ها با دیگری هم ارز نیست. بدین ترتیب قضیه‌ی زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۱۹.۱.۱. فرض کنید G گروه آبله $C_{n_1} \times \dots \times C_{n_r}$ باشد. در این صورت نمایش‌های $\rho_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}$ که در بالا ساخته شدند تحویل‌ناپذیر و دارای درجه‌ی ۱ هستند. تعداد این نمایش‌ها $|G|$ است و هر نمایش تحویل‌ناپذیر G روی \mathbb{C} دقیقاً هم‌ارزی از آن‌هاست.

قضیه ۲۰.۱.۱. فرض کنید V_1, \dots, V_k تشکیل دهنده‌ی مجموعه‌ی کاملی از CG -مدول‌های

$$\sum_{i=1}^k (\dim V_i)^2 = |G|$$

تحویل‌ناپذیر غیریکریخت باشند. در این صورت:

اثبات. رجوع شود به [۳۴]، صفحه ۱۱۲، قضیه ۱۲.۱۱. □

۲.۱ رده‌ی مزدوجی

در این بخش به مبحثی از نظریه‌ی گروه‌ها می‌پردازیم که در مطالعه‌ی نظریه‌ی نمایش به کار می‌آیند. پس از تعریف رده‌ی مزدوجی، رده‌های مزدوجی گروه‌های دوجهی، متقارن، متناوب و چند گروه خاص را معرفی خواهیم کرد.

در این بخش فرض می‌کنیم G گروهی متناهی است.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید $x, y \in G$. گوئیم x مزدوج y در G است اگر عضوی مانند $g \in G$ موجود باشد به

قسمی که $y = g^{-1}xg$. مجموعه‌ی تمام عناصری که با x در G مزدوجند عبارت است از:

$$x^G = \{g^{-1}xg : g \in G\}$$

گزاره ۲.۲.۱. اگر $x, y \in G$ آنگاه $x^G = y^G$ یا $x^G \cap y^G = \emptyset$.

اثبات. رجوع شود به [۲۴]، صفحه ۱۱۵، گزاره ۲.۱۲. □

تعریف ۳.۲.۱. اگر $G = x_1^G \cup \dots \cup x_\ell^G$ و رده‌های مزدوجی x_1^G, \dots, x_ℓ^G متمایز باشند، آنگاه x_1, \dots, x_ℓ را

نماینده‌های رده‌های مزدوجی G می‌نامیم.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید $x \in G$. مرکزساز x در G ، که آن را با نماد $C_G(x)$ نشان می‌دهند، عبارت است از

مجموعه‌ی عناصری از G که با x جابجا می‌شوند، یعنی

$$C_G(x) = \{g \in G : xg = gx\}$$

قضیه ۵.۲.۱. فرض کنید $x \in G$. در این صورت :

$$|x^G| = |G : C_G(x)| = |G|/|C_G(x)|$$

اثبات. رجوع شود به [۳۴]، صفحه ۱۱۷، قضیه ۸.۱۲. □

قضیه ۶.۲.۱. فرض کنید x_1, \dots, x_ℓ نماینده‌های رده‌های مزدوجی G باشند. در این صورت :

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x_i \notin Z(G)} |x_i^G|$$

اثبات. رجوع شود به [۳۴]، صفحه ۱۱۸، قضیه ۱۰.۱۲. □

قضیه ۷.۲.۱. فرض کنید $G = D_{2n} = \langle a, b : a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. در این صورت :

(۱) اگر n فرد باشد، آنگاه G دقیقاً دارای $(n+2)/2$ رده‌ی مزدوجی است که عبارتند از:

$$\{1\}, \{a, a^{-1}\}, \dots, \{a^{(n-1)/2}, a^{-(n-1)/2}\}, \{b, ab, \dots, a^{n-1}b\}$$

(۲) اگر $n = 2m$ ، آنگاه G دقیقاً دارای $m+2$ رده‌ی مزدوجی است که عبارتند از:

$$\{1\}, \{a^m\}, \{a, a^{-1}\}, \dots, \{a^{m-1}, a^{-m+1}\}, \{a^{2j}b : 0 \leq j \leq m-1\}, \{a^{2j+1}b : 0 \leq j \leq m-1\}$$

اثبات. رجوع شود به [۳۴]، صفحه ۱۱۸ و ۱۱۹. □

قضیه ۸.۲.۱. اگر $x \in S_n$ آنگاه x^{S_n} متشکل از جایگشت هایی از S_n است که شاکله‌ی دوری آن‌ها با

شاکله‌ی دوری x یکی است.

اثبات. رجوع شود به [۳۴]، صفحه ۱۲۰، قضیه ۱۵.۱۲. □

گزاره ۹.۲.۱. فرض کنید $x \in A_n$ و $n > 1$. در این صورت:

(۱) اگر x با جایگشت فردی از S_n جابجا شود آنگاه $x^{S_n} = x^{A_n}$.

(۲) در غیر این صورت x^{S_n} به دوره‌ی مزدوجی A_n با اندازه‌های برابر و نماینده‌های x و $(1\ 2)x(1\ 2)$ تجزیه می‌شود.

اثبات. رجوع شود به [۳۴]، صفحه ۱۲۲، گزاره ۱۷.۱۲. □

قضیه ۱۰.۲.۱. فرض کنید $G = T_{fn} = \langle a, b : a^{fn} = 1, a^n = b^f, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. در این صورت G

دقیقاً دارای $n+3$ دوره‌ی مزدوجی است که عبارتند از:

$$\{1\}, \{a^n\}, \{a^r, a^{-r}\} \quad (1 \leq r \leq n-1), \{a^{2j}b : 0 \leq j \leq n-1\}, \{a^{2j+1}b : 0 \leq j \leq n-1\}$$

اثبات. رجوع شود به [۳۴]، صفحه ۴۲۰. □

قضیه ۱۱.۲.۱. فرض کنید $G = U_{fn} = \langle a, b : a^{fn} = b^f = 1, a^{-1}ba = b^{-1} \rangle$. در این صورت G

دقیقاً دارای $2n$ دوره‌ی مزدوجی است که عبارتند از:

$$\{a^{2r}\}, \{a^{2r}b, a^{2r}b^2\}, \{a^{2r+1}, a^{2r+1}b, a^{2r+1}b^2\} \quad (0 \leq r \leq n-1)$$

اثبات. رجوع شود به [۳۴]، صفحه ۴۲۱. □

قضیه ۱۲.۲.۱. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت فرد باشد و

$$G = V_{\lambda n} = \langle a, b : a^{fn} = b^f = 1, ba = a^{-1}b^{-1}, b^{-1}a = a^{-1}b \rangle.$$

در این صورت G دقیقاً دارای $2n + 3$ رده‌ی مزدوجی است که عبارتند از:

$$\{1\}, \{b^2\}, \{a^{2r+1}, a^{-2r-1}b^2\} \quad (0 \leq r \leq n-1)$$

$$\{a^{2s}b, a^{-2s}\}, \{a^{2s}b^2, a^{-2s}b^2\} \quad (1 \leq s \leq (n-1)/2)$$

$$\{a^j b, a^j b^2 : j = 2k\}, \{a^j b, a^j b^2 : j = 2k+1\}$$

اثبات. رجوع شود به [۳۴]، صفحه ۴۲۱. □

۳.۱ سرشت

در این بخش سرشت گروه را تعریف خواهیم کرد. سپس سرشت‌های تحویل‌ناپذیر یک گروه را معرفی کرده در آخر جدول سرشت گروه‌های دوری متناهی، گروه دووجهی و چند گروه دیگر را که در فصل بعد مورد نیاز هستند را ارائه خواهیم کرد.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم $\rho: G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ یک نمایش گروه G باشد. برای صورت تابع $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه‌ی $\chi(g) = \text{tr}(g\rho)$ ($g \in G$) را یک سرشت G از درجه‌ی n می‌نامیم. سرشت درجه‌ی یک را سرشت خطی می‌نامیم. همچنین می‌گوییم χ یک سرشت تحویل‌ناپذیر G است هرگاه CG -مدول \mathbb{C}^n متناظر با آن نمایش، تحویل‌ناپذیر باشد. فرض کنیم V یک CG -مدول باشد. در این صورت تابع $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه‌ی