بەنام خدا

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکدهٔ فیزیک

روش گروه بازبهنجارش غیراختلالی

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد فیزیک

رضا توکلی دینانی

استاد راهنما

دکتر فرهاد شهبازی

۱۳۸۸

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکدهٔ فیزیک

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشتهٔ فیزیک

تحت عنوان

روش گروه بازبهنجارش غیراختلالی

توسط

رضا توکلی دینانی

در تاریخ ۱۳۸۸/۱/۱۷ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

۱ —استاد راهنمای پایان‌نامه	دکترفرهاد شهبازی
۲ —استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر سیّد اکبر جعفری
۳ —استاد ممتحن داخلی	دکتر سیّد جواد هاشمی‌فر
۴ —استاد ممتحن داخلی	دکتر کیوان آقابابائی سامانی
سرپرست تحصیلات تکمیلی	دکتر فرهاد شهبازی

شکر و سپاس بی حد خداوندی که ما را نعمت وجود و ادراک تا بی‌کران‌ها بخشید.

با تشکر و قدر دانی

از

خانواده‌ی عزیزم که همیشه مشوق اصلی من در تحصیل بوده‌اند،

استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر شهبازی

به خاطر راهنمایی‌های موثر و مفید ایشان در طول انجام این پایان‌نامه،

استاد مشاور این پایان‌نامه جناب آقای دکتر جعفری

به خاطر آموزش‌های ایشان در زمینه‌ی برنامه‌نویسی به زبان فرترن ۹۰،

اساتید داور این پایان‌نامه آقای دکتر هاشمی‌فر و آقای دکتر سامانی

به جهت مطالعه و داوری این پایان‌نامه،

اساتید دانشکده فیزیک و دوستان عزیزم که مرا در رسیدن به اهدافم یاری کردند

و به این حقیر ابراز محبت داشته‌اند.

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

و به آنکه سبب اتصال زمین و آسمان است.

فهرست مندرجات

چکیده

یکی از روش‌هایی که با آن می‌توان رفتار بحرانی سیستم‌های فیزیکی را توصیف کرد روش گروه بازبهنجارش غیراختلالی است. هم اکنون این روش، چه از نظر فرمول بندی و چه از نظر استفاده برای توصیف سیستم‌های مختلف، در حال گسترش است. اما مهمترین مشکلی که در این روش وجود دارد معادلات نسبتا پیچیده‌ی آن است که برای حل این معادلات باید از روش های عددی استفاده کنیم. در این پایان نامه پس از آشنایی با روش گروه بازبهنجارش غیر اختلالی روش‌های عددی مورد نیاز برای حل معادلات مربوطه توضیح داده خواهد شد. با استفاده از روش‌های عددی به سراغ حل معادلات روش گروه باز بهنجارش غیراختلالی برای $O(N)$ مدل (حالت $N=۱$) می رویم و به محاسبه‌ی نقاط ثابت و نماهای بحرانی می پردازیم. نتایج بدست آمده وجود نقطه‌ی ثابت گوسی و نقطه‌ی ثابت ویلسون ـفیشر را تایید میکند. همچنین مقادیر بدست آمده برای نماهای بحرانی β،ν،γ و بعد ناهنجار η با مقادیر قبلی بدست آمده بروش گروه بازبهنجارش غیر اختلالی تطابق خوبی دارد. تطابق قابل قبول نتایج نهایی، راه را برای استفاده‌ی هر چه بیشتر از روش غیر اختلالی برای توصیف سیستم‌های دیگر، هموار می کند.

لغات کلیدی : گروه باز بهنجارش غیر اختلالی، میدان میانگین موثر، $O(N)$ مدل، پدیده‌های بحرانی.

فصل ۱

مقدمه

توصیف رفتار ماکروسکوپی سیستم‌های بس‌ذره‌ای یکی از مهمترین هدف‌های فیزیک‌دانان ماده چگال بوده و هست. آنها در پی یافتن پاسخ این سوال هستند که چگونه می‌توان از روی مشخصات میکروسکوپی یک سیستم بس‌ذره‌ای رفتار ماکروسکوپی آنرا توصیف کرد؟ طبیعتا پاسخ این سوال در محاسبه‌ی تابع پارش خواهد بود. اما مهمترین مشکل در این زمینه وجود درجات آزادی زیاد سیستم‌های بس‌ذره‌ای است. وجود این درجات آزادی زیاد محاسبه‌ی تابع پارش را مشکل می‌کند. برای غلبه بر این مشکل ایده‌ی درشت دانه کردن[۱] از دهه‌ی ۶۰ میلادی شکل گرفت. در ایده‌ی درشت دانه کردن با جمع بستن بروی درجات آزادی ریز مقیاس درتابع پارش، اصطلاحا سیستم فیزیکی درشت دانه می شود، سپس بروی درجات آزادی ریز مقیاس سیستم درشت دانه شده جمع می زنیم و این کار را تا جایی ادامه می دهیم که بروی تمامی درجات آزادی سیستم جمع زده شود. گرچه مسیر کلی این ایده کاملا شناخته شده بود اما جزئیات چگونگی محاسبه‌ی کمیت‌های فیزیکی در این ایده مشخص نبود. تا اینکه در دهه‌ی ۷۰ میلادی ویلسون[۲] توانست با بسط ایده‌ی درشت دانه کردن نظریه‌ی توانمند گروه بازبهنجارش را ارائه دهد. روش گروه باز بهنجارش ویلسون بر پایه‌ی بسط‌های اختلالی استوار بود. در این روش برای بدست آوردن کمیت‌های فیزیکی نیاز به یک پارامتر کوچک داریم تا بتوان رفتار جفت‌شدگی‌های

---

۱ *Coarse Graining*

۲ *Wilson*

پتانسیل را توصیف کنیم. بعنوان مثال هنگامی که در سه بعد با مساله‌ی پتانسیل ϕ^4 کار می کنیم:

$$U(\phi) \;=\; a\phi^{2} \;+\; b\phi^{4}, \qquad (۱-۱)$$

برای استخراج نتایج فیزیکی از این پتانسیل (از قبیل نقاط ثابت، نوع گذار فاز و نماهای بحرانی) می‌توان ضریب b را کوچک فرض کرد و در بدست آوردن تابع پارش از بسط بر حسب توان‌های مختلف b استفاده کرد، و یا اینکه مساله را در چهار بعد حل کرد و به‌تدریج بعد سیستم را به سمت سه میل داد.

$$\epsilon = 4 - d, \qquad (۱-۲)$$

با اینکار می‌توان مساله را بر حسب توان‌های ϵ بسط داد. در هر دو روش اختلالی بالا نیاز داریم که تا مراتب بالای ϵ و b را در معادلات توصیف کننده‌ی رفتار جفت‌شدگی های پتانسیل نگه داریم تا نتایج قابل قبولی بدست آوریم که البته کار پر زحمتی خواهد بود.

اما در اواخر دهه‌ی ۸۰ میلادی رهیافت جدیدی از گروه باز بهنجارش توسط وتریچ[۳] ارائه شد که در آن نیازی به بسط های اختلالی نیست [۵]، [۷] و [۸]. در این روش یک تکانه‌ی برش به نام k تعریف می‌شود به طوری که تکانه‌های کمتر از k در تابع پارش وارد نشوند و بعبارتی تنها سهم درجات آزادی ریز مقیاس در تابع پارش وارد شود. این کار با دادن جرم های سنگین به میدان‌های موجود در تابع پارش انجام می‌شود. اضافه کردن جمله‌ی زیر به پتانسیل باعث دور ریخته شدن سهم تکانه‌های کمتر از k[۴] در تابع پارش می‌شود:

$$\Delta S_k[\chi] \;=\; \frac{1}{2} \int \frac{d^dq}{(2\pi)^d}\, \chi(q)\, R_k(q)\, \chi^*(q). \qquad (۱-۳)$$

با میل دادن تکانه برش k به سمت صفر، تمامی درجات آزادی انتگرال گیری شده، پتانسیل ماکروسکوپی سیستم بدست می آید. در این رهیافت، رفتار پتانسیل و جفت‌شدگی‌های آن را می‌توان با معادله‌ی شار گاما[5] توصیف کرد [۵]، [٦]، [۷]، [۸]، [۹] و [۱۰].

$$\frac{\partial}{\partial k}\Gamma_k[\phi] \;=\; \frac{1}{2}\, Tr\, \frac{\frac{\partial R_k}{\partial k}}{\Gamma_k^{(2)}[\phi] + R_k}. \qquad (۱-۴)$$

معادله‌ی (۱–۴) یک معادله‌ی دیفرانسیلی جزئی غیرخطی است که بدون استفاده از هر گونه تقریبی بدست آمده است. با استفاده از آن می‌توان نقاط ثابت جفت‌شدگی‌های پتانسیل را پیدا کرد و همچنین رفتار آنها را بر

---

۳ $C.\ Wetterich$

۴ k را تکانه‌ی برش می‌نامند.

۵ گاما (Γ_k)، کنش میانگین موثر است.

حسب مقیاس t بیان کرد. گرچه معادله‌ی (۱ — ۴) به صورت غیراختلالی بدست آمده اما برای حل آن باید از کمی تقریب استفاده شود علاوه بر این، حل این معادله به صورت تحلیلی جز در موارد خاص امکان پذیر نیست. با پیشرفت روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیلی، حل (۱ — ۴) امکان پذیر شده و همین مساله محققان فیزیک پدیده‌های بحرانی را به سمت استفاده از رهیافت غیراختلالی گروه بازبهنجارش سوق داده است.

آنچه که ما در این پایان‌نامه به آن خواهیم پرداخت روش‌های حل عددی معادلات گروه بازبهنجارش غیراختلالی است. ما به سراغ حل معادلات $O(N)$ مدل می رویم و نتایج کار خود را با نتایج کارهای قبلی انجام شده بروش گروه بازبهنجارش غیراختلالی مقایسه خواهیم کرد. با در دست داشتن روش‌های حل عددی معادلات گروه باز بهنجارش غیراختلالی، می‌توان به سراغ توصیف مدل‌ها و سیستم‌های فیزیکی مختلف با استفاده از این روش رفت.

ترتیب فصل‌هایی که در این پایان‌نامه آمده به این گونه خواهد بود که ابتدا در فصل دوم مروری بر مفاهیم پدیده‌های بحرانی خواهیم داشت. مفاهیمی از قبیل نماهای بحرانی، کلاس جهان‌شمولی، نقاط ثابت وانواع گذار فاز. علاوه بر این با نظریه‌ی گروه باز بهنجارش آشنا می‌شویم. در فصل سوم با ایده و فرمول بندی روش گروه باز بهنجارش غیراختلالی آشنا خواهیم شد و در فصل چهارم نتایج این روش برای $O(N)$ مدل را مرور می کنیم. همان طور که گفته شد در روش گروه بازبهنجارش غیراختلالی نیاز به حل عددی معادلات خود داریم که این روش‌ها در فصل پنجم توضیح داده می‌شوند. در آخر هم جزئیات روابط مورد استفاده در فصل‌های دوم تا چهارم و همچنین کد برنامه‌های مورد استفاده برای حل عددی معادلات گروه بازبهنجارش غیراختلالی، همگی در قسمت پیوست آورده شده‌اند.

فصل ۲

مقدمه‌ای بر فیزیک پدیده‌های بحرانی

فیزیک پدیده‌های بحرانی [۱] یکی ازحوزه‌های مورد توجه فیزیکدانان ماده‌چگال است که در آن فیزیک‌دانها به توصیف رفتار سیستم های فیزیکی در نزدیکی نقطه‌ی بحرانی می پردازند. نقطه بحرانی دارای شرایطی است که درآن با کوچکترین تغییر در پارامترهای سیستم (ازقبیل دما T، فشار P، میدان مغناطیسی H و....) سیستم دچار گذار فاز می‌شود و ماهیت فاز آن تغییر می کند. آنچه که فیزیک‌دانها راعلاقمند به توصیف پدیده‌های بحرانی کرده، وجود جهان‌شمولی در فیزیک آن است. جهان‌شمولی به این معنا که کمیت‌های فیزیکی دو سیستم به ظاهر متفاوت (مثلا سیستم اسپینی و سیستم گاز—مایع) در نقطه‌ی بحرانی رفتار تقریبا یکسانی از خود نشان می‌دهند. به عنوان مثال مغناطش بر حسب دما (برای سیستم اسپینی) و چگالی بر حسب دما(برای سیستم گاز—مایع) به صورت مشابهی رفتار می کنند. رفتار سیستم های فیزیکی در نزدیکی نقطه‌ی بحرانی یک رفتار توانی است. مثلا اگر بخواهیم در نزدیکی نقطه بحرانی رفتار کمیت X را بر حسب پارامتر Y [۲] بیان کنیم رفتار آن به صورت $X \sim Y^a$ خواهد بود. وجود رفتار های مشابه در سیستم های متفاوت به معنی یکسان بودن توان a برای آنها است. a را نمای بحرانی می گویند. هدف اصلی فیزیک‌دانها در بررسی پدیده‌های بحرانی محاسبه‌ی همین نماهای بحرانی است. فیزیک‌دانان نظری در تلاش‌اند تا با روش‌های مختلف نماهای بحرانی را محاسبه کنند و

---

۱ مطالب این فصل از مرجع [۱] گردآوری شده است.

۲ Y می‌تواند $|T - T_c|$، $|P - P_c|$(P فشار)، $|\rho - \rho_c|$ (ρ چگالی) و کمیت‌هایی از این قبیل باشد.

جهان شمولی آنها را توصیف کنند. مهمترین روشهایی که تا کنون مورد توجه بوده است، عبارت‌اند از: روش گروه بازبهنجارش (RG) اختلالی و روش شبیه سازی مونت‌کارلو.

۲–۱ نماهای بحرانی، انواع گذار فاز و پارامتر نظم

همانطور که گفته شد در نزدیکی نقطه بحرانی سیستم‌های فیزیکی رفتار توانی از خود نشان می‌دهند. در مورد نماهای ظاهر شده در رفتارهای توانی به دو نکته می‌توان اشاره کرد. اول اینکه این نماها اعداد کسری ساده نیستند که بتوان آنها را با تحلیل ابعادی به دست آورد. دوم اینکه این نماها می‌توانند در سیستم‌های متفاوت فیزیکی یکسان باشند. سیستم‌هایی که نماهای بحرانی آنها با هم برابر است، اصطلاحا در یک کلاس جهان‌شمول قرار می گیرند. بنابر این اگر بتوان تشخیص داد که یک سیستم فیزیکی در چه کلاس جهان‌شمولی قرار گرفته است، می‌توان نماهای بحرانی آنرا با استفاده از نماهای بحرانی سیستم‌های شناخته شده‌ی قبلی در همان کلاس جهان‌شمول بدست آورد. اگر دو سیستم متفاوت اسپینی و گاز–مایع را در نظر بگیریم، رفتار چگالی با دما (برای سیستم گاز–مایع) و رفتار مغناطش بر حسب دما(برای سیستم اسپینی) بسیار به یکدیگر شبیه هستند و این دو سیستم به ظاهر متفاوت در یک کلاس جهان‌شمول قرار می گیرند.

$$M \sim |T-T_c|^{\beta_{spin}} \quad , \quad \beta_{spin} = ۰/۳۱۱ \pm ۰/۰۰۵,$$

$$\rho_{liquid} - \rho_{gas} \sim |T-T_c|^{\beta_{liquid-gas}} \quad , \quad \beta_{liquid-gas} = ۰/۳۲۷ \pm ۰/۰۰۶. \qquad (۲–۱)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود هر دو نمای بحرانی بالا را نمی‌توان به صورت یک کسر ساده نوشت وهر دوی این نماها در محدوده‌ی خطایشان تقریبا با هم برابراند. سیستم‌هایی که در یک کلاس جهان‌شمول قرار می گیرند از ۳ نظر با یکدیگر شباهت دارند.

۱) تقارن‌های هامیلتونی

۲) بعد سیستم فیزیکی

۳) بلند برد یا کوتاه برد بودن برهمکنش‌ها

بر این اساس هامیلتونی که برای سیستم گاز–مایع و سیستم اسپینی می‌نویسیم، تقارنهای یکسانی دارند و بعد هر دو سیستم یکسان است ($d = ۳$) و همچنین برد برهمکنش‌ها در این دو سیستم هم اندازه (کوتاه برد) است. در

فیزیک پدیده‌های بحرانی ٦ نمای بحرانی وجود دارد که آنها را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد. دسته‌ی اول نماهای ترمودینامیکی که مربوط به کمیت‌های ترمودینامیکی می‌شوند. و دسته‌ی دوم نماهایی که مربوط به همبستگی درون سیستم می‌شود. این ٦ نمای بحرانی عبارتند از: η[۳] ، ν، δ، γ، β، α. برای یک سیستم اسپینی این نماها در روابط زیر ظاهر می‌شوند[۴]:

$$\begin{aligned} C_h &\sim |T-T_c|^{-\alpha}, h \to ۰ \\ \chi &\sim |T-T_c|^{-\gamma}, h \to ۰ \\ h &\sim |M|^{\delta}, T = T_c \\ M &\sim (T_c - T)^{\beta}, T < T_c \\ \xi &\sim |T-T_c|^{-\nu} \\ G(r) &\sim r^{۲-d-\eta} e^{-\frac{r}{\xi}}, r \ll \xi, \end{aligned} \tag{۲−۲}$$

(h میدان مغناطیسی، C_h ظرفیت گرمایی، χ نفوذ پذیری مغناطیسی، M مغناطش، ξ طول همبستگی[۵] و $G(r)$[٦] تابع همبستگی دو نقطه‌ای است.) α، γ و δ بعنوان نمای بحرانی ترمودینامیکی شناخته می‌شوند و نماهای بحرانی η، ν، β مربوط به نظم داخلی سیستم هستند. روابط ترمودینامیکی که در آنها M، χ، C_h ظاهر می‌شوند به صورت زیر است:

$$C_h = T(\frac{\partial^۲ F}{\partial T^۲}),\ \chi = (\frac{\partial M}{\partial h})_{T=T_c},\ M = -\frac{۱}{N}\frac{\partial F}{\partial H}, \tag{۳−۲}$$

در (۲−۳)، F انرژی آزاد است. که رابطه آن با تابع پارش سیستم می‌شود:

$$F = -K_B T ln(Z). \tag{۴−۲}$$

انواع گذار فاز:

---

[۳] η بعنوان بعد ناهنجار شناخته می‌شود . از η در توصیف رفتار تابع همبستگی دو نقطه‌ی $G(r)$ در r های بزرگ (در نقطه‌ی بحرانی) استفاده می‌شود.

[۴] نماهای بحرانی که راجع به آنها صحبت می‌شود، همگی نماهای بحرانی تعادلی هستند. در پدیده‌های بحرانی علاوه بر نماهای بحرانی تعادلی، نماهای بحرانی دینامیکی هم وجود دارد که در اینجا توضیحی راجع به آنها داده نمی‌شود.

[۵] نشان دهنده‌ی فاصله‌ای بین دو نقطه از فضا است که افت و خیزها در آن دو نقطه تحت تاثیر یکدیگر قرار می گیرند.

[٦] تابع همبستگی معیاری از نظم درون سیستم است و نشان دهنده‌ی وابستگی مکانی متغیرهای میکروسکوپی نسبت به یکدیگر است. مثلا برای سیستم اسپینی داریم: $G(r) = < S(r)S(۰) > - < S(r) >< S(۰) >$

جدول ۲—۱: پارامتر نظم برای چند سیستم مختلف. زاویه‌های φ, θ به ترتیب معرف زاویه‌ی بین محور طولی مولکولها با محور قائم بر صفحات بلور مایع و زاویه‌ی بین تصویر مولکولها با محوری معین در صفحات بلور مایع می باشند[۲]. ρ چگالی سیستم گاز—مایع است.

پارامتر نظم	نوع سیستم فیزیکی
$\phi =< S >$	فرو مغناطیس (مدل آیزینگ)
$\phi = \frac{\rho}{\rho_c} - ۱$	گاز— مایع
$\phi_۱ = \frac{۱}{۲} < ۳\cos^۲\theta - ۱ >, \phi_۲ =< \cos^۲\varphi > -\frac{۱}{۲}$	بلور مایع

در فیزیک پدیده‌های بحرانی دو نوع گذار فاز وجود دارد. گذار فاز ناپیوسته یا مرتبه اول و گذار فاز پیوسته یا مرتبه دوم. نوع گذار فازها با پیوسته بودن و یا گسسته بودن مشتق انرژی آزاد نسبت به پارامتر های آن، در نقطه‌ی بحرانی، مشخص می‌شود. در نقطه‌ی گذار فاز اگر یکی از مشتق‌های مرتبه اول انرژی آزاد نسبت به یکی از پارامترهای آن ناپیوسته باشد، گذار فاز مرتبه اول است و اگر تمامی مراتب مشتق آنرژی آزاد نسبت به پارامترهای آن پیوسته باشد، گذار فاز مرتبه دوم است. بعنوان مثالی از گذار فاز مرتبه اول و دوم، هنگامی که در سیستم گاز—مایع، در نقطه‌ی بحرانی به یکباره تمامی مایع به گاز تبدیل شود، گذار فاز مرتبه دوم روی می‌دهد. و هنگامی که مایع آرام آرام به گاز تبدیل شود گذار فاز مرتبه اول روی می‌دهد. نماهای بحرانی رفتار سیستم در نزدیکی گذار فاز مرتبه دوم را توصیف می کنند.

پارامتر نظم:

گذار فاز در سیستم‌های فیزیکی موجب افزایش نظم و یا ایجاد بی‌نظمی در آن می‌شود. برای تشخیص میزان نظم موجود دریک سیستم فیزیکدان‌ها کمیتی به نام پارامتر نظم ϕ را تعریف می کنند. این تعریف به گونه‌ای است که مقدار پارامتر نظم در دمای کمتر از دمای بحرانی باید غیر صفر و در دمای بزرگتر از دمای بحرانی مقدار صفر باشد. در جدول (۱—۱) چند نمونه از پارامترهای نظم آورده شده است.

۲—۲ انرژی آزاد لاندائو در سیستم‌های همگن و ناهمگن

انرژی آزاد پدیده‌شناختی لاندائو (L) یکی از مهمترین پایه‌های فیزیک پدیده‌های بحرانی است که در اثر کارهای لاندائو وارد این حوزه از فیزیک شده است. لاندائو در پی نظریه‌ای بود که با آن بتواند گذار فاز مرتبه دوم را

توصیف کند او فرض کرد که می‌توان معادله‌ی حالت سیستم‌های فیزیکی را از مشتق یک انرژی آزاد گیبس کلی (به نام انرژی آزاد لاندائو) نسبت به پارامتر نظم آن بدست آورد. انرژی آزاد لاندائو از نظر ابعادی بعد انرژی دارد اما دقیقا برابر انرژی آزاد گیبس نیست. لاندائو انرژی آزادش را وابسته به پارامتر نظم و جفت‌شدگی‌های سیستم‌های فیزیکی در نظر گرفت. مهمترین ویژگی‌های انرژی آزاد لاندائو از این قرارند:

۱) از تقارنهای سیستم تبعیت می‌کند.

۲) مشتق آن نسبت به پارامتر نظم معادله حالت را می‌دهد.

۳) در نزدیکی دمای بحرانی می‌توان آنرا بر حسب توانهای پارامتر نظم بسط داد[۷]، که برای یک سیستم دارای پارامتر نظم یکنواخت داریم:

$$l = \frac{L}{V} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n[k]\phi^n. \qquad (۵-۲)$$

(V حجم سیستم است، $a_n[K]$ ضرایب جفت‌شدگی و K ها پارامترهای سیستم هستند.)

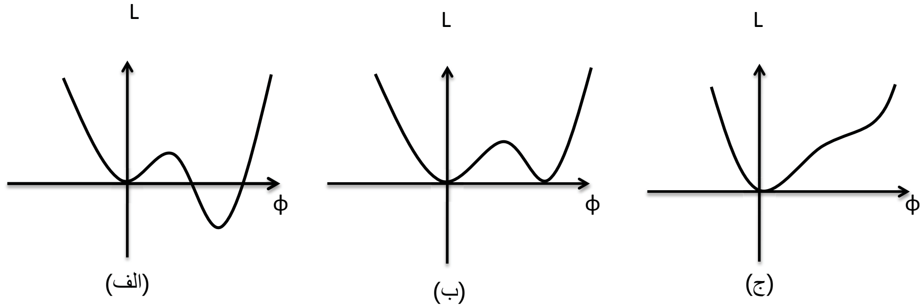
۴) اگر از یک انرژی آزاد لاندائو با تقارن‌های مشخص استفاده کنیم و نماهای بحرانی آنرا بدست بیاوریم، تمامی سیستمهایی که این تقارن‌ها را دارند نماهای بحرانی آنها با نماهای بحرانی بدست آمده از این انرژی آزاد لاندائو یکسان است.

۵) ضریب جمله‌ی ϕ^2 متناسب با $T - T_c$ است.

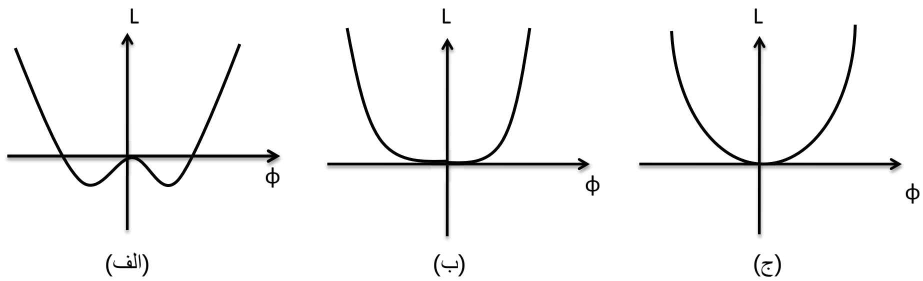
با استفاده از نمودار L بر حسب ϕ می‌توان گذار فاز مرتبه اول و دوم را به خوبی نمایش داد. به این صورت که اگر با تغییر دما از دماهای بزرگتر به دماهای کمتر از دمای بحرانی (T_c) مقدار کمینه‌های L بصورت ناگهانی از صفر به مقداری غیر صفر برود گذار فاز مرتبه اول است و اگر کمینه‌های L بصورت تدریجی تغییر کنند گذار فاز مرتبه دوم خواهد بود. در نمودارهای شکل (۱—۲) و (۲—۲) گذار فاز مرتبه اول و دوم نشان داده شده است.

در بسیاری از سیستم‌های فیزیکی مقدار پارامتر نظم در نقاط مختلف سیستم متفاوت است و تابع مکان می باشد. در چنین مواردی سیستم را به قسمتهای کوچکتر تقسیم می کنند به نحوی که می‌توان پارامتر نظم رادر هر

[۷] بدلیل اینکه لاندائو می خواست گذار فاز مرتبه دوم را توصیف کند و در گذار مرتبه دوم مقدار پارامتر نظم آرام آرام از صفر افزایش پیدا می کند طبیعتا باید بتوان انرژی آزاد را بر حسب توان‌های پارامتر نظم بسط داد. اما استفاده از نظریه‌ی لاندائو برای توصیف گذار فاز مرتبه اول ممکن است به نتایج نادرستی منجر شود بدلیل اینکه در گذار فاز مرتبه اول مقدار پارامتر نظم به یکباره از صفر به مقدار قابل توجهی تغییر می کند و بنابر این نمی‌توان انرژی آزاد لاندائو را در این حالت بر حسب توان‌های پارامتر نظم بسط داد.



شکل (۲—۱): گذار فاز مرتبه اول. نمودار (الف) مربوط به $T < T_c$ نمودار (ب) مربوط به $T = T_c$ و نمودار (ج) مربوط به $T > T_c$ است.



شکل (۲—۲): گذار فاز مرتبه‌دوم. نمودار (الف) مربوط به $T < T_c$ نمودار (ب) مربوط به $T = T_c$ و نمودار (ج) مربوط به $T > T_c$ است.

قسمت یکنواخت در نظر گرفت. طول هر یک از این قسمتها در حدود طول همبستگی است وآنرا با $\Lambda^{-۱}$ (طول درشت دانگی) نشان می‌دهند. معمولا اجزای سیستم با اندازه‌هایی در حد طول همبستگی رفتار مشابهی از خود نشان می‌دهند. بنابر این انتظار می رود که پارامتر نظم در سرتاسر طول همبستگی یکنواخت باشد. حال اگر بخواهیم انرژی آزاد لاندائو را برای تمام سیستم بنویسیم می‌بایست سهم پارامتر نظم [۸] در هر نقطه از سیستم را در آن لحاظ کنیم.

$$L = \int d^d r l(\phi_\Lambda(r)) + \frac{۱}{۲}\lambda(\nabla\phi_\Lambda(r))^۲ \qquad (۲—۶)$$

(λ ثابتی مثبت و $l(\phi_\Lambda(r))$ انرژی آزاد لاندائو بر حسب پارامتر نظم یکنواخت است.) جمله‌ی دوم (۲—۶) برای جبران اختلاف بین پارامتر نظم در دو قسمت مجاورهم وارد شده است. نکته‌ی مهم در مورد (۲—۶) تابعی بودن L است. L تابعی‌ای از $\phi(r)$ است بعبارت دیگر L تابع $\phi(r_۱), \phi(r_۲), \phi(r_۳),...$ است. انرژی آزاد لاندائو دو تفاوت عمده با انرژی آزاد گیبس دارد.

[۸] که در این مورد تابع مکان است: $\phi(r)$