بسم الله الرحمن الرحیم

۱۳۹۱۳۲

دانشگاه پیام نور مشهد

مرکز مشهد

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت کارشناسی ارشد ریاضی

گرایش آنالیز

عنوان :

نگاشتهای خطی حافظ معکوس تعمیم یافته

استاد راهنما :

سرکار خانم دکتر ثریا طالبی

استاد مشاور :

آقای دکتر مجید میرزاوزیری

نگارش :

رویا کریمان

زمستان ۱۳۸۸

تاریخ: ۱۳۸۹/۲/۲۱
شماره: ۸۱۰/۴۲۵۰
پیوست:

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور
خراسان رضوی
باسمه تعالی

تصویب نامه پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان : **نگاشتهای خطی حافظ معکوس تعمیم یافته**

که توسط **رؤیا کریمان** تهیه و به هیئت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می باشد.

تاریخ دفاع : ۲۰ / ۱۲ / ۸۸ نمره ۱۸/۷۵ هجده و هفتاد و پنج صدم درجه ارزشیابی : عالی

اعضای هیئت داوران :

نام و نام خانوادگی	هیئت داوران	مرتبه علمی	امضاء
دکتر ثریا طالبی	استاد راهنما :	**استادیار**	
	استاد راهنمای همکار :		
دکتر مجید میرزا وزیری	استاد مشاوره :	**دانشیار**	
دکتر علی جلیلیان عطار	استاد ممتحن :	**استادیار**	
دکتر عقیله حیدری	نماینده گروه آموزشی :	**دانشیار**	

مشهد : خیابان امام خمینی ۴۰ – صندوق پستی : ۹۱۹ تلفن : ۸۵۲۸۵۲۸ (۰۵۱۱)
دور نگار : ۸۵۲۸۵۲۰ (۰۵۱۱) پست الکترونیک : mashhad@pnu.ac.ir

تاریخ: ۱۳۸۹/۱۲/۲۱
شماره: ۴۳۴۹/۸۱۰
پیوست:

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور
خراسان رضوی

باسمه تعالی

صورتجلسه دفاع از پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان : **نگاشتهای خطی حافظ معکوس تعمیم یافته**

که توسط **رؤیا کریمان** تهیه و به هیئت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می باشد.

تاریخ دفاع : **۲۰ / ۱۲ / ۸۸** نمره ۱۸/۷۵ هجده و هفتاد و پنج صدم درجه ارزشیابی : عالی

اعضای هیئت داوران :

نام و نام خانوادگی	هیئت داوران	مرتبه علمی	امضاء
دکتر ثریا طالبی	استاد راهنما :	**استادیار**	
	استاد راهنمای همکار :		
دکتر مجید میرزا وزیری	استاد مشاوره :	**دانشیار**	
دکتر علی جلیلیان عطار	استاد ممتحن :	**استادیار**	
دکتر عقیله حیدری	نماینده گروه آموزشی :	**دانشیار**	

مشهد : خیابان امام خمینی ۴۰ – صندوق پستی : ۹۱۹ تلفن : ۸۵۲۸۵۲۸ (۰۵۱۱)
دور نگار : ۸۵۲۸۵۲۰ (۰۵۱۱) پست الکترونیک : mashhad@pnu.ac.ir

تقدیم به پدرم که ریاضیات عشق را از او آموختم،

تقدیم به مادرم که دعاهایش همیشه بدرقه راهم است،

تقدیم به همسرم که با صبوریش درسهای زیادی را در زندگی به من آموخت و تکیه گاه واقعی من است،

و تقدیم به پسرم.

خداوند را سپاس، که توانستم مقطعی دیگر از زندگی را با موفقیت به پایان برسانم. بر خود لازم می دانم از خواهران خوبم که مشوقم بودند و از کلهای بی دریغشان در حق من مضایقه نکردند، استاد راهنمای عزیزم سرکار خانم دکتر طالبی که در تمام مراحل پایان نامه بسیار به من کمک کردند، استاد مشاور آقای دکتر میرزاوزیری و دوستان عزیزم سرکار خانم دکتر فائزه فشندی، وجیهه شمس آبادی و الهه ربانی بسیار سپاسگزارم.

چکیده

فرض کنید H فضای هیلبرت مختلط تفکیک پذیر با بعد نامتناهی و $B(H)$ جبر همه ی عملگرهای کراندار بر H باشد. فرض کنید $\phi: B(H)\to B(H)$ نگاشت خطی، پیوسته، یکانی ودوسویی حافظ معکوس تعمیم یافته در دو جهت باشد، در این صورت ایده آل همه عملگرهای فشرده تحت ϕ پایاست ونگاشت خطی القاشده در جبر کالکین یا خودریختی است یا پاد خود ریختی.

کلمات کلیدی: حافظ خطی؛ جبر کالکین؛ معکوس تعمیم یافته.

فهرست مندرجات

مقدمه

دراین پایان نامه مقاله ی نگاشتهای خطی حافظ معکوس تعمیم یافته، نوشته ی مصطفی مختا[1] بررسی می شود[۱۲]. دردو دهه ی گذشته مسائل حافظ خطی بسیار قابل توجه بوده اند .

این پایان نامه در ٤ فصل نگارش شده است. در فصل اول تعاریف مقدماتی و قضایای پیش نیاز از آنالیز تابعی و جبر عملگرها آورده شده است.

فصل دوم شامل دو بخش است، که در آن به بررسی مجموعه عملگرهای دارای معکوس تعمیم یافته و عملگرهای معکوس تعمیم یافته با هسته و همبعد برد با بعد نا متناهی می پردازیم و در فصل سوم به معرفی رابطه و نمادهایی در مجموعه عملگرهای معکوس تعمیم یافته پرداخته و در فصل چهارم که اصلی ترین فصل پایان نامه است، نگاشت های حافظ معکوس تعمیم یافته در دو جهت را بررسی می کنیم.

---

[1] Mostafa mbekhta

فصل ۱

تعاریف مقدماتی و قضایای پیش نیاز

۱-۱ تعاریف مقدماتی

۱ . ۱ . ۱ تعریف

فرض کنید H یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ و تابعی $\langle x,y\rangle : H\times H\to\mathbb{C}$ با خواص زیر باشد:

۱) اگر $a,b\in\mathbb{C}$ و $x_1,x_2,y\in H$ باشد، $\langle ax_1+bx_2,y\rangle = a\langle x_1,y\rangle + b\langle x_2,y\rangle$؛

۲) $\overline{\langle x,y\rangle}=\langle y,x\rangle$؛

۳) به ازای هر $x\in H$، $\langle x,x\rangle\geq 0$؛

٤) $\langle x,x\rangle=0$ اگر و فقط اگر $x=0$؛

در این صورت این تابع، **ضرب داخلی**و H یک فضای ضرب داخلی یا یک فضای پیش هیلبرت نامیده می شود.

بنابر (۳) می توان $\|x\|$ یعنی نرم بردار $x\in H$ را ریشه دوم $\langle x,x\rangle$تعریف کرد.

$$\|x\|^2=\langle x,x\rangle$$

حال اگر فاصله ی بین x و y را مساوی $\|x-y\|$ تعریف کنیم، آنگاه تمام اصول موضوع یک فضای متری برقرارند. لذا H یک فضای متری است.

۱ . ۱ . ۲ تعریف

هر گاه فضای ضرب داخلی Hبا متر فوق یک فضای متری تام باشد، یعنی هر دنباله ی کشی در آن همگرا باشد، H یک **فضای هیلبرت** نام دارد.

۱ . ۱ . ۳ تعریف

فضای برداری مختلط X را یک **فضای خطی نرمدار** نامیم اگر به ازای هر $x\in X$ یک عدد حقیقی

نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم x چنان مربوط باشد که

۱) به ازای هر $x,y\in X$، $\|x+y\|\le\|x\|+\|x\|$؛

۲) اگر $x\in X$ و α اسکالر باشد، آنگاه $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$؛

۳) $\|x\|=0$ اگر و فقط اگر $x=0$.

اگر فاصله ی بین y,x در X را مساوی $\|x-y\|$ تعریف کنیم آنگاه تمام اصول موضوع یک فضای متری برقرار است.

۱.۱.٤ تعریف

هر فضای خطی نرمدار که متر تعریف شده توسط نرمش تام باشد، **فضای باناخ** نامیده می شود.

۱.۱.۵ مثال

هر فضای هیلبرت یک فضای باناخ است.

۱.۱.٦ تعریف

فضای نرمدار X را **فضای تفکیک پذیر** گوییم، اگر یک مجموعه ی شمارای چگال در آن موجود باشد.

۱.۱.۷ تعریف

فضای هیلبرت H را **تفکیک پذیر** نامیم، هرگاه یک پایه ی شمارای چگال در آن موجود باشد.

۱.۱.۸ تعریف

نگاشت $F:X\to\mathbb{C}$ **تابعی خطی** روی فضای برداری توپولوژیک X نامیده می شود، هرگاه

برای تمام x و y ها در X و تمام α و β ها در $\mathbb{C}$ داشته باشیم $F(\alpha x+\beta y)=\alpha F(x)+\beta F(y)$.

۱ . ۱ . ۹ تعریف

فضای دوگان، فضای برداری توپولوژیک X عبارت است از فضای برداری X^* که عناصرش تابعی هـای خطی پیوسته بر X هستند و جمع و ضرب در X^* به صورت زیر تعریف می شوند:

برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $x \in X$
$$(T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x$$

$$(\alpha T)x = \alpha .Tx$$

فرض کنید X و Y فضاهای باناخ باشند:

۱ . ۱ . ۱۰ تعریف

نگاشت خطی $T : X \to Y$ را عملگر فشرده گوییم، اگر برای هر دنباله ی کراندار $x_n \in X$، دنباله ی $\{Tx_n\}$ یک زیر دنباله ی کشی در Y داشته باشد.

۱ . ۱ . ۱۱ تعریف

عملگر $T : X \to Y$ را **رتبه متناهی** گوییم هرگاه

$$rankT = \dim(\operatorname{Im} T)\langle\infty$$

۱ . ۱ . ۱۲ تعریف

عملگر $T : X \to Y$ **وارون پذیر** است اگر عملگر $S : Y \to X$ موجود باشد به طوری که

$TS = I = ST$.

تذکر:اگر Xو Y دو فضای توپولوژیک باشند، $B(X,Y)$ را گردایه ی تمام نگاشتهای خطـی کرانـدار (یا عملگرها) از Xبتوی Y در نظر می گیریم.

۱ . ۱ . ۱۳ تعریف

فرض کنید H,K دو فضای هیلبرت دلخواه باشد و $A\in B(H,K)$ در این صورت عملگر منحصر به فرد $B\in B(K,H)$ که به ازای هر $h\in H$ و به ازای هر $k\in K$ در شرط $\langle Ah,k\rangle=\langle h,Bk\rangle$ صدق می کند را عملگر الحاقی A می نامیم و با A^* نشان می دهیم.

۱ . ۱ . ١٤ تعریف

یک **حلقه** مجموعه ایست ناتهی مثل R همراه با دو عمل به نام های جمع و ضرب به طوری که

۱) $(R,+)$ یک گروه آبلی باشد؛

۲) به ازای هر $a,b,c\in R$، $(ab)c=a(bc)$ (ضرب شرکت پذیر است)؛

۳) $a(b+c)=ab+ac$ و $(a+b)c=ac+bc$ (قوانین پخش پذیری از چپ و راست برقرار است.)؛

هرگاه علاوه براین

٤) به ازای هر $a,b\in R$ ، $ab=ba$ گوییم R یک حلقه تعویض پذیر است؛

هرگاه R شامل عنصری مثل I_R باشد به طوری که

٥) به ازای هر $a\in R$ ، $I_Ra=aI_R=I$ گوییم R یک حلقه یکدار است.

۱ . ۱ . ١٥ تعریف

فضای برداری A روی میدان F را یک **جبر** گوییم، اگر روی آن یک عمل ضرب تعریف شده باشد به طوری که A با این ضرب یک حلقه باشد و برای هر $a,b\in A$ و هر $\alpha\in F$ داشته باشیم

$$\alpha(ab)=(\alpha a)b=a(\alpha b)$$

۱ . ۱ . ۱۶ تعریف

زیر فضای خطی I از یک جبر A **ایده آل چپ** است، اگر به ازای هر $x,y\in I$ و هر $z\in A$، $x-y\in I$ و $zx\in I$.

۱ . ۱ . ۱۷ تعریف

زیر فضای خطی I از یک جبر A **ایده آل راست** است، اگر به ازای هر $x,y\in I$ و هر $z\in A$، $x-y\in I$ و $xz\in I$.

۱ . ۱ . ۱۸ تعریف

اگر یک ایده آل چپ، ایده آل راست هم باشد آنگاه **ایده آل دو طرفه** است.

۱ . ۱ . ۱۹ تعریف

ایده آل I از جبر A را که $I\neq A$ **ایده آل محض** نامیم.

۱ . ۱ . ۲۰ تعریف

فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و فرض کنیم $I\subseteq A$ یک ایده آل چپ A باشد، گوییم I یک **ایده آل چپ ماکسیمال** A است، اگر I یک ایده آل چپ محض باشد و تنها ایده آل چپ محض A که I را شامل می شود خود I باشد. **ایده آل راست ماکسیمال** A به طور مشابه تعریف می شود و ایده آل I از A را ایده آل دو طرفه ی ماکسیمال و به طور ساده **ایده آل ماکسیمال** گوییم، اگرهم ایده آل چپ ماکسیمال هم ایده آل راست ماکسیمال باشد.

۱.۱.۲۱ تعریف

میدان عبارت است از حلقه ی جا به جایی و یکداری که دارای حداقل دو عنصر می باشد به طوری که هر عنصر غیر صفر آن دارای معکوس ضربی باشد.

۱.۱.۲۲ تعریف

هرگاه A یک فضای باناخ نسبت به نرم صادق در نامساوی ضربی

به ازای تمام x و yها در A $\qquad \|xy\| \le \|x\|\|y\|$

بوده و A شامل عنصر یکه ی e باشد به طوری که

$$ex = xe = e \qquad x \in A$$

$$\|e\| = 1$$

آنگاه A یک **جبرباناخ** نامیده می شود.

مثال: میدان مختلط $\mathbb{C}$ همراه با نرم $|z| = \|z\|$ ساده ترین جبر باناخ است.

۱.۱.۲۳ تعریف

جبر باناخ A به همراه نگاشت $x \to x^*$ بر A که در شرایط زیر صدق می کند را یک C^***-جبر** نامیم.

۱) $(x^*)^* = x$ برای تمام $x \in A$؛

۲) $(ax+by)^* = \bar{a}x^* + \bar{b}y^*$ برای تمام $x, y \in A$ و $a, b \in \mathbb{C}$؛

۳) $(xy)^* = y^*x^*$ برای تمام $x, y \in A$.

مثال: جبر باناخ $A = \mathbb{C}$ با $x^* = \bar{x}$ ساده ترین C^*-جبر است.

۱ . ۱ . ۲٤ تعریف

فرض کنید A یک C^*-جبر باشد، در این صورت $x \in A$ را خود الحاق می نامیم، هر گاه $x = x^*$.

۱ . ۱ . ۲۵ تعریف

فرض کنید E یک فضای خطی باشد، در این صورت

۱) عملگر خطی $p : E \to E$ خود توان (تصویر) نامیده می شود هر گاه $P^2 = P$.

۲) عملگرهای $P_1, P_2 : E \to E$ را متعامد می نامیم هر گاه $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$.

۳) تصویر P در فضای هیلبرت H تصویر متعامد نامیده می شود هرگاه $P^* = P$.

۱ . ۱ . ۲٦ تعریف

فرض کنید $K(H)$ فضای تمام عملگرهای فشرده روی H باشد، $K(H)$ ایده آل بسته ای از $B(H)$ است.

درفضای خارج قسمتی $\frac{B(H)}{K(H)}$ ضرب زیر را تعریف می کنیم

$$[S][T] = [ST]$$

که $[S]$ هم مجموعه ی $S + K(H)$ است. فضای خارج قسمتی $\frac{B(H)}{K(H)}$ با ضرب فوق یک جبر است که **جبر کالکین** نام دارد و همانی آن $[I]$ است.

مثال: می دانیم اگر A یک C^*-جبر باشد و I یک ایده آل بسته ای از A باشد آنگاه $\frac{A}{I}$ نیز یک C^*-جبر می باشد و بنابراین با فرض این که H یک فضای هیلبرت با بعد نامتناهی و $B(H)$ یک C^*-جبر است، $\frac{B(H)}{K(H)}$ یک C^*-جبر می باشد.([۱۹]/٤.۱۵)

۱ . ۱ . ۲۷ تعریف

توپولوژی قوی عملگرها (یا SO) توپولوژی بر $B(H)$، توپولوژی موضعاً محدبی است که توسط نیم نرم‌های $\| \|_x$، $x \in H$ تولید شده است و برای $T \in B(H)$

$$\|T\|_x = \|Tx\|$$

$T_\alpha \to T$ در توپولوژی قوی عملگرها اگر و فقط اگر

$$\|T_\alpha x - Tx\| \to 0 \quad , \quad x \in H$$

۱ . ۱ . ۲۸ تعریف

توپولوژی ضعیف عملگرها (یا WO) توپولوژی بر $B(H)$، توپولوژی موضعاً محدبی است که توسط نیم نرم‌های $\| \|_{x,y}$، $x, y \in H$ تولید شده است و برای $T \in B(H)$

$$\|T\|_{x,y} = |\langle Tx, y\rangle|$$

$T_\alpha \to T$ در توپولوژی ضعیف عملگرها اگر و فقط اگر

$$\langle T_\alpha x, y\rangle \to \langle Tx, y\rangle \quad , \quad x, y \in H$$

۱ . ۱ . ۲۹ تعریف

فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد، در این صورت یک C^*-جبر A از $B(H)$ را یک جبر **فون ـ نویمان** می نامیم، اگر A در توپولوژی قوی عملگرها بسته باشد.

مثال: فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد، در این صورت $B(H)$ یک جبر فون ـ نویمان است.

زیرا اگر $\{T_n\}$ دنباله ای در $B(H)$ باشد که به ازای هر $x \in H$ ، $T_n(x) \to Tx$ آنگاه $T : H \to H$ خطی و کراندار است بنابراین $T \in B(H)$ در نتیجه به ازای هر $x \in H$

$$\|T_n - T\|_x = \|T_n(x) - Tx\| \to 0$$

و این یعنی $B(H)$ تحت توپولوژی قوی عملگرها بسته است.

۱ . ۱ . ۳۰ تعریف

اگر X یک فضای برداری باشد و N, M دو زیر فضای خطی آن باشد آنگاه $M + N$ نیز زیر فضای خطی X است. اگر $M \cap N = \{0\}$ آنگاه این جمع، **جمع مستقیم** N, M نامیده می شود و با $M \oplus N$ نشان داده می شود.

۱ . ۱ . ۳۱ تعریف

فرض کنید M زیر فضای بسته ی فضای باناخ X باشد، آنگاه M در X **تتمیم پذیر** است، اگر زیر فضای بسته ای مانند $M' \in X$ وجود داشته باشد، به طوری که

$$X = M \oplus M'$$

۱ . ۱ . ۳۲ تعریف

فرض کنید N زیر فضای برداری X باشد در این صورت **همبعد** N بعد فضای خارج قسمتی $\frac{X}{N}$ است که آن را با $co\dim(N)$ نشان می دهیم. اگر X بعد متناهی داشته باشد آنگاه

$$co\dim(N) = \dim(\frac{X}{N}) = \dim(X) - \dim(N)$$