دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی‌تکنیک تهران)

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض (منطق)

موضوع:

کامل سازی یوندا برای فضای شبه متریک

تهیه کننده :
زهیر افتخاری فسایی

استاد راهنما:
دکتر مسعود پورمهدیان

استاد مشاور:
دکتر بیژن هنری

تیر ۱۳۸۶

تقدیم به

نگاه همیشه منتظر مادرم

دستان نوازشگر پدرم

و

همدلی و یکرنگی همسرم

قدردانی

بر خود لازم می دانم از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر پورمهدیان که راهنمایی های ایشان کلید حل بسیاری از مسائل بود قدردانی نمایم. همچنین از دوست بزرگوارم جناب آقای رضا میرباقری جم و برادر عزیزم جناب آقای پوریا افتخاری که در انجام این پایان نامه مرا یاری نمودند کمال تشکر را دارم.

چکیده

در این پایان نامه یک کامل سازی یوندا ی تعمیم یافته بر حسب تورها بدست آمده است و نشان داده شده است که این کامل سازی در حالت کلی، بسنده ی دنباله ای نیست. پاسخی برای پرسش بونسانگ و بروگل درباره ی رده ی فضاهایی که کامل سازی یوندا روی آنها خودتوان است ارائه گردیده است و مشاهده شده است که بزرگ ترین رده از فضاهای شبه متریکی که کامل سازی یوندا روی آنها خودتوان است، از فضاهای شبه متریک اسمیت کامل شدنی تشکیل می شود. کامل سازی یوندا و کامل سازی اسمیت روی این رده که شامل فضاهای کلاً کراندار نیز می باشد به کامل سازی مضاعف تبدیل می شود.

همچنین نشان داده شده است که هر دو نوع کامل سازی یوندا و اسمیت، کلاً کراندار بودن و فشردگی را نسبت به توپولوژی متقارن وابسته حفظ می کنند. این مطلب که هر دو نوع کامل سازی اسمیت و یوندا در مورد نظریه ی فضاهای کلاً کراندار یکسان هستند، بیان می کند که این نظریه با دشواری خاصی همراه نیست و احتمال مطرح شدن بحث های پیچیده نسبت به فضاهایی که این دو نوع کامل سازی روی آنها یکسان نیستند کمتر است. نتایجی که توسط کامل سازی یوندا و کامل سازی اسمیت روی رده ی فضاهای کلاً کراندار بدست آمده است یکسان است و می توان آنها را به عنوان گسترش جایگزین کامل سازی مضاعف برای فضاهای غیر اسمیت کامل شدنی در نظر گرفت.

مشاهده خواهیم کرد که در حالت کلی، کامل سازی یوندا خودتوان نیست. با وجود این مطلب، ویژگی های توپولوژیکی پیش فشردگی و فشردگی توسط کامل سازی یوندا و کامل سازی اسمیت حفظ می شود. البته نباید انتظار داشت که هر ویژگی که برای یک کامل سازی کلاسیک مانند کامل سازی مضاعف برقرار است توسط کامل سازی یوندا یا کامل سازی اسمیت نیز حفظ شود. این موضوع با مثال نقضی برای ویژگی پیش فشردگی موروثی نشان داده شده است.

فهرست مندرجات

پیشگفتار

فیلیپ ساندرهاف[۱] در سال ۱۹۹۵ نسخه ای از کامل سازی اسمیت را با توجه به مفهوم تور ارائه کرده است. همچنین بونسانگ[۲] و بروگل[۳] در سال ۱۹۹۸ کامل سازی یوندا را با استفاده از دنباله ها معرفی کرده اند. از این رو کنزی[۴] و اسکلکنز[۵] در سال ۲۰۰۲ در جهت کامل نمودن کارهای فوق، کامل سازی یوندا را با توجه به مفهوم تورها بیان کرده اند. نتیجه ی مشابهی نیز توسط ساندرهاف و فلگ[۶] بدست آمده است که‌البته در مقایسه بانتایج کنزی و اسکلکنز، نیاز به مفاهیم پیچیده تری دارد.
از آنجا که کامل سازی یوندا در حوزه ی نظریه ی دامنه مورد بررسی قرار می گیرد، در فصل نخست به بررسی مفاهیم مقدماتی این نظریه خواهیم پرداخت. با توجه به نیاز به برخی مفاهیم توپولوژیکی، در ادامه ی این فصل به معرفی این مفاهیم می پردازیم.
فصل دوم را به بررسی انواع کامل سازی به ویژه کامل سازی یوندا و اسمیت اختصاص داده ایم و این دو نوع کامل سازی را با یکدیگر مقایسه خواهیم کرد.
در فصل پایانی نیز مفاهیمی چون خودتوان بودن و بسندگی دنباله ای را معرفی کرده و آنها را در مورد کامل سازی یوندا مورد بررسی قرار می دهیم. همچنین نشان خواهیم داد که کدام ویژگی های توپولوژیکی برای کامل سازی یوندای یک فضای شبه متریک حفظ می شود.
لازم به ذکر است که مرجع اصلی ما در این رساله، مقاله ی:

$$\text{«}On\ the\ Yoneda\ completion\ of\ a\ quasi-metric\ space\text{»}$$

نوشته ی $Hans-Peter\ Kunzi$ و $Michael\ Schellekens$ می باشد.
کلمات کلیدی:
فضاهای شبه متریک، ترتیب های جزئی، کامل سازی یوندا، توپولوژی، خود توانی، بسندگی دنباله ای

---

[۱] Philip Sunderhauf
[۲] Bonsangue
[۳] Breugel
[۴] Kunzi
[۵] Schellekens
[۶] Flagg

فصل ۱

نظریه ی دامنه

۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

نظریه ی دامنه که در دهه ی هفتاد توسط اسکات پایه گذاری شد، در سالهای اخیر به یکی ازمهمترین نظریه ها در علوم کامپیوتر تبدیل شده است. به عنوان تعریفی از دامنه می توان گفت دامنه، ساختاری است که به کمک آن می توان یک فرایند محاسباتی را مدل بندی کرد. تعریف دیگر چنین است که دامنه، مجموعه ای جزئاً مرتب است که ترتیب آن به مفهوم اطلاعات اشاره دارد. مفاهیم اصلی در این نظریه، همگرایی و تقریب هستند.

۱.۱.۱ همگرایی

ابتدا مجموعه های جزئاً مرتب (poset) را تعریف می کنیم؛

تعریف ۱.۱.۱ $(P, \sqsubseteq)$ را مجموعه ای جزئاً مرتب می نامیم اگر

۱) به ازای هر $x \in P$، $x \sqsubseteq x$. (انعکاسی [۱])

۲) به ازای هر $x, y \in P$، اگر $x \sqsubseteq y$ و $y \sqsubseteq x$، آنگاه $x = y$. (پادتقارنی [۲])

[۱] reflexivity
[۲] antisymmetry

۳) به ازای هر $x, y, z \in P$ اگر $z \sqsubseteq y$ و $y \sqsubseteq x$، آنگاه $z \sqsubseteq x$. (تعدی [۳])

زمانی که می گوییم $x \sqsubseteq y$ یعنی x اطلاعات کمتری نسبت به y در بر دارد.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید $(P, \sqsubseteq)$ مجموعه ای جزئاً مرتب باشد.

۱) زیرمجموعه ی A از P را یک مجموعه ی بالایی [۴] می نامیم هرگاه به ازای هر x و y در P که $x \sqsubseteq y$ اگر $x \in A$، آنگاه $y \in A$. مجموعه ی تمام عناصر بالاتر از A را با $\uparrow A$ نمایش می دهیم. بطور مشابه می توان یک مجموعه ی پائینی [۵] و $\downarrow A$ را نیز تعریف نمود.

۲) عنصری مانند $x \in P$ را یک کران بالا برای زیر مجموعه ی A از P می نامیم هرگاه بالاتر از تمام عناصر A باشد.

۳) عنصر $x \in P$ را ماکزیمال گوئیم هرگاه هیچ عنصری از P بالاتر از آن نباشد؛ به عبارت دیگر $\uparrow x \cap P = \{x\}$. به صورت مشابه عنصر می نیمال نیز تعریف می شود.

۴) اگر $x \in P$ کران بالایی برای A باشد و به ازای هر y که کران بالای دیگری برای A است داشته باشیم $x \sqsubseteq y$ آنگاه x را کوچکترین کران بالا یا سوپرمم A در P می نامیم. سوپرمم A را با $\bigsqcup A$ نمایش می دهیم.

۵) اگر $x \in P$ موجود باشد که برای هر $y \in P$ داشته باشیم $x \sqsubseteq y$، آنگاه x را عضو پائین [۶] P گوئیم و با نماد $\perp$ نمایش می دهیم.

---

[۳] transitivity
[۴] upper set
[۵] lower set
[۶] bottom

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید X مجموعه ای دلخواه باشد و L خانواده ای از زیر مجموعه های X. گوئیم L یک گردایه ی بستار[۷] است هرگاه تحت اشتراک بسته باشد؛ به این معنی که‌اگر هر عضو خانواده ی $(A_i)_{i\in I}$ متعلق به L باشد آنگاه $\bigcap_{i\in I} A_i$ نیز به L تعلق دارد. اعضای L را غلافها[۸] یا مجموعه های بسته می نامیم.

تبصره ۴.۱.۱ اگر A زیرمجموعه ی دلخواهی از X باشد می توان $\bigcap\{B \in L \mid A \subseteq B\}$ را تشکیل داد که غلاف یا بستار A نامیده می شود.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنیم P و Q دو مجموعه ی مرتب جزئی باشند. تابعی مانند $f : P \longrightarrow Q$ یکنوا[۹] نامیده می شود هرگاه به ازای هر $x, y \in P$ اگر $x \sqsubseteq y$ آنگاه داشته باشیم $f(x) \sqsubseteq f(y)$ در Q.

تعریف ٦.۱.۱ فرض کنیم P یک *poset* باشد. زیرمجموعه ی A از P جهت دار نامیده می شود هرگاه ناتهی باشد و به ازای هر دو عنصر دلخواه از A،آن دو عضو کران بالایی در A داشته باشد. اگر مجموعه ی جهت دار A سوپرمم داشته باشد، آن را با نماد $\bigsqcup^{\uparrow} A$ نمایش می دهیم. مجموعه های پائینی جهت دار، ایده آل نامیده می شوند. ایده آلهایی به صورت $\downarrow x$، اصلی نامیده می شوند.زیرمجموعه ی A از P فیلتر شده است هرکاه ناتهی باشد و هر دو عضو دلخواه از A دارای کران پائینی در A باشند. مجموعه های بالایی فیلتر شده، فیلتر نامیده می شوند. فیلترهای به صورت $\uparrow x$ را فیلتر (اصلی) می نامیم.

---

[۷] closure system

[۸] hulls

[۹] monotone

مثال ۷.۱.۱ ساده ترین نمونه برای مجموعه های جهت دار، زنجیرها هستند.

تعریف ۸.۱.۱ $poset$ ای مانند D را یک $dcpo$ می نامیم هرگاه هر زیر مجموعه ی جهت دار آن سوپرمم داشته باشد.

مثال ۹.۱.۱ هر $poset$ متناهی یک $dcpo$ است.

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنید D و E دو $dcpo$ باشند. تابعی مانند $f : D \longrightarrow E$ را اسکات پیوسته می نامیم هرگاه یکنوا باشد و به ازای هر زیر مجموعه ی جهت دار A از D داشته باشیم $f(\bigsqcup^{\uparrow} A) = \bigsqcup^{\uparrow} f(A)$.

تبصره ۱۱.۱.۱ در علوم کامپیوتر، یک تابع مانند $f : D \longrightarrow E$ بین $dcpo$ های D و E، مفهوم یک فرایند محاسباتی را داراست. $d \in D$ به عنوان ورودی توسط تابع f محاسبه شده و $f(d) \in E$ خروجی آن خواهد بود.

مثال ۱۲.۱.۱ فرض کنید A مجموعه ای دلخواه و B زیر مجموعه ی ثابت A باشد و تابع $f : (P(A), \subseteq) \longrightarrow (P(A), \subseteq)$ برای هر $X \subseteq A$ به صورت $f(X) = B \cup X$ تعریف شود؛ می توان نشان داد f اسکات پیوسته است.

۲.۱.۱ تقریب

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنیم x و y عناصری از D باشند که D یک $dcpo$ است. گوئیم x، y را تقریب می زند هرگاه به ازای هر زیر مجموعه ی جهت دار A از D، اگر $y \sqsubseteq \bigsqcup^{\uparrow} A$ آنگاه $a \in A$ ای موجود باشد به طوریکه $x \sqsubseteq a$. گوئیم x فشرده است هرگاه خودش را تقریب بزند.

تبصره ۱۴.۱.۱ برای عناصر یک $dcpo$، ترتیب $\ll$ را تعریف می کنیم. اگر a و b عناصر یک $dcpo$ مانند D باشند، $a \ll b$ به این معناست که a، b را تقریب می زند. نیز گفته می شود که a بسیار پائین تر از b است.

نمادگذاری ۱۵.۱.۱

$$\Downarrow x = \{y \in D | y \ll x\}$$

$$\Uparrow x = \{y \in D | x \ll y\}$$

$$\Uparrow A = \bigcup_{a \in A} \Uparrow a$$

$$K(D) = \{x \in D | x \ll x\}$$

تبصره ۱۶.۱.۱ می توان ثابت کرد که رابطه ی $\ll$ قوی تر از $\sqsubseteq$ است.

تعریف ۱۷.۱.۱ گوئیم زیرمجموعه ی B از یک $dcpo$ مانند D پایه ای برای D است هرگاه به ازای هر عنصر $x \in D$ مجموعه ی $B_x = \Downarrow x \cap B$ شامل زیر مجموعه ای جهت دار با سوپرمم x باشد.

مثال ۱۸.۱.۱ اگر $(۰, ۱)$ را به عنوان $dcpo$ در نظر بگیریم می توان مشاهده کرد اعداد گویا پایه ای برای اعداد حقیقی هستند.

تعریف ۱۹.۱.۱ یک $dcpo$ را پیوسته‌نامیم (دامنه ی پیوسته) هرگاه دارای پایه باشد. D را $\omega-$پیوسته می نامیم هرگاه پایه ای شمارا داشته باشد.

گزاره ۲۰.۱.۱ فرض کنید D یک $dcpo$ و $\omega-$پیوسته باشد. تابع $f : D \longrightarrow D$ پیوسته است اگر و تنها اگر f یکنوا باشد و کوچکترین کران بالای دنباله های صعودی را حفظ کند یعنی برای هر دنباله ی صعودی $(x_i)_{i\in\omega}$ داشته باشیم $f(\bigsqcup_{i\in\omega} x_i) = \bigsqcup_{i\in\omega} f(x_i)$.

تعریف ۲۱.۱.۱ یک پایه ی مجرد[۱۰] توسط مجموعه ای مانند B همراه با یک رابطه ی متعدی مانند $\prec$ روی B مشخص می شود به طوریکه به ازای هر عنصر x از B و هر زیر مجموعه ی متناهی M از B داریم

$$M \prec x \Rightarrow \exists y \in B \ s.t. \ M \prec y \prec x$$

[۱۰] abstract basis

به خاصیت فوق خاصیت درونیابی[۱۱] (INT) نیز گفته می شود.

تعریف ۲۲.۱.۱ برای پایه ای مانند $< B, \prec >$، فرض می کنیم $idl(B)$ مجموعه ی تمام ایده آلهایی در B باشد که به وسیله ی رابطه ی شمول، مرتب شده اند.این مجموعه را کامل سازی ایده آل B می نامیم.

۳.۱.۱ توپولوژی اسکات روی یک $dcpo$

با ارائه ی یک توپولوژی روی فضای X، گردایه ای از زیرمجموعه های X را خواهیم داشت که مجموعه های باز نامیده می شوند و تحت اشتراک متناهی و اجتماع دلخواه، بسته است. بسیار شگفت انگیز است که با انتخاب یک توپولوژی مناسب، می توان تمام اطلاعات مورد نیاز در مورد همگرایی، تقریب، پیوستگی توابع و حتی خود نقاط X را بدست آورد.

تعریف ۲۳.۱.۱ فرض کنیم D یک $dcpo$ باشد. زیر مجموعه ی A را اسکات بسته می نامیم هرگاه یک مجموعه ی پائینی بوده و تحت سوپرمم زیرمجموعه های جهت دار بسته باشد. مکمل مجموعه های بسته، اسکات بازها هستند که عناصر σ_D می باشند. σ_D، اسکات توپولوژی روی D است.

تبصره ۲۴.۱.۱ یک مجموعه ی اسکات باز مانند O یک مجموعه ی بالایی است و نیز هر مجموعه ی جهت دار که سوپرمم آن در O قرار گیرد، اشتراک ناتهی با O خواهد داشت.

مثال ۲۵.۱.۱ ایده آلهای اصلی، مجموعه هایی بسته هستند.

[۱۱] interpolation

کوچک ترین مجموعه ی بسته شامل A را با $Cl(A)$ و بزرگ ترین مجموعه ی باز درون A را با $Int(A)$ نمایش می دهیم.

گزاره ۲۶.۱.۱ به ازای دو $dcpo$ مانند D و E، تابع $f : D \longrightarrow E$، اسکات پیوسته است اگر و تنها اگر با توجه به اسکات توپولوژی های موجود روی D و E، پیوسته ی توپولوژیکی باشد.

برهان : مرجع [[۵]، صفحه ی ۳۰، قضیه ی ۴.۳.۲]

گزاره ۲۷.۱.۱ فرض کنیم D دامنه ای پیوسته با پایه ی B باشد. در این صورت باز بودن زیر مجموعه ای مانند O از D را می توان با استفاده از دو خاصیت زیر بیان کرد:

۱) $O = \bigcup_{x \in O} \Uparrow x$

۲) $O = \bigcup_{x \in O \cap B} \Uparrow x$

تبصره ۲۸.۱.۱ در واقع گزاره ی بالا می گوید که هر مجموعه ی باز به وسیله ی اعضای پایه مشخص می شود.

۴.۱.۱ توپولوژی

در این بخش، بر حسب نیاز به معرفی تعاریف و قضایایی از توپولوژی می پردازیم.

تعریف ۲۹.۱.۱ یک تور[۱۲] در مجموعه ای مانند X، تابعی مانند $P : \Lambda \longrightarrow X$ است که Λ مجموعه ای جهت دار است. نقطه ی $P(\lambda)$ را معمولاً با نماد x_λ نمایش می دهیم و اغلب گفته می شود تور $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ یا تور (x_λ). یک زیر تور[۱۳] از یک تور مانند $P : \Lambda \longrightarrow X$، ترکیب $P \circ \phi$ است به طوری که $\phi : M \longrightarrow \Lambda$ یک تابع هم‌پایان[۱۴] از مجموعه ای جهت دار مانند M به Λ می باشد؛ به عبارت دیگر:

[۱۲] net
[۱۳] subnet
[۱۴] cofinal

۱) $\phi(\mu_1) \leq \phi(\mu_2)$ هرگاه $\mu_1 \leq \mu_2$ (ϕ صعودی است)

۲) به ازای هر $\lambda \in \Lambda$، وجود دارد $\mu \in M$ که $\lambda \leq \phi(\mu)$ (ϕ در Λ، هم پایان است)

به ازای $\mu \in M$، نقطه ی $P \circ \phi(\mu)$ اغلب به صورت $x_{\lambda\mu}$ نوشته می شود و معمولاً گفته می شود زیر تور $(x_{\lambda\mu})$ از (x_λ). اگر (x_λ) یک تور در X باشد، مجموعه ای به صورت $\{x_\lambda | \lambda \geq \lambda_\circ\}$ به ازای $\lambda_\circ \in \Lambda$، یک دم[۱۵] (x_λ) نامیده می شود.

تعریف ۳۰.۱.۱ فرض کنیم (x_λ) یک تور در فضایی مانند X باشد، گوییم (x_λ) به $x \in X$ همگرا می شود (می نویسیم $x_\lambda \to x$) هرگاه به ازای هر همسایگی U از x، وجود داشته باشد $\lambda_\circ \in \Lambda$ به طوری که به ازای هر $\lambda \geq \lambda_\circ$ داشته باشیم $x_\lambda \in U$؛ به عبارت دیگر $x_\lambda \to x$ اگر و تنها اگر هر همسایگی از x شامل دمی از (x_λ) باشد. گوییم (x_λ) یک نقطه ی انباشتگی مانند x دارد هرگاه به ازای هر همسایگی U از x و به ازای هر $\lambda_\circ \in \Lambda$ وجود داشته باشد $\lambda \geq \lambda_\circ$ به طوری که $x_\lambda \in U$.

مثال ۳۱.۱.۱ مجموعه ی اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ با ترتیب معمولی اش، یک مجموعه ی جهت دار است. بنابر این هر دنباله ی (x_n) یک تور است.

مثال ۳۲.۱.۱ فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد و $x \in X$ و Λ همسایگی دلخواهی از x در X. گردایه ی تمام زیرمجموعه های باز Λ که شامل x اند با رابطه ی ترتیبی زیر، جهت دار است:

$$U_1 \leq U_2 \Leftrightarrow U_2 \subset U_1$$

---

[۱۵] tail

بنابراین اگر به ازای هر $(U \neq \phi) \in \Lambda$ عنصری مانند $x_U \in U$ را انتخاب کنیم، حاصل یک تور مانند (x_U) در X است. به علاوه $x_U \to x$. به ازای همسایگی داده شده ی V از x ، وجود دارد $U_\circ \in \Lambda$ به طوری که $U_\circ \subset V$. در نتیجه از $U \geq U_\circ$ داریم $U \subset U_\circ$، بنابراین $x_U \in U \subset V$.

گزاره ۳۳.۱.۱ y یک نقطه ی انباشتگی برای یک تور است اگر و تنها اگر این تور زیر توری همگرا به y داشته باشد.

برهان : مرجع [[۴]، صفحه ی ۷۵، قضیه ی ۱۱.۵]
به عنوان نتیجه ای از قضیه ی بالا می توان گفت که اگر y یک نقطه ی انباشتگی برای زیر توری از (x_λ) باشد، آنگاه y یک نقطه ی انباشتگی برای (x_λ) نیز خواهد بود زیرا زیر توری از یک زیر تور از (x_λ) خود، زیر توری از (x_λ) است.

گزاره ۳۴.۱.۱ فرض کنیم $E \subset X$. $x \in \overline{E}$ اگر و تنها اگر وجود داشته باشد توری مانند (x_λ) در E به طوری که $x_\lambda \to x$.

برهان : اگر $x \in \overline{E}$، آنگاه هر همسایگی U از x دست کم در نقطه ای مانند x_U با E اشتراک دارد. در نتیجه (x_U) یک تور در E است که همگرا به x خواهد بود (با توجه به مثال ۳۲.۱.۱). برعکس، اگر (x_Λ) یک تور در E و همگرا به x باشد، آنگاه هر همسایگی از x با E اشتراک خواهد داشت. (در یک دم از (x_Λ)) و بنابراین $x \in \overline{E}$.

تعریف ۳۵.۱.۱ دنباله ی (x_n) در فضای متریک (M,ρ) را کوشی (ρ − کوشی) گوییم هرگاه به ازای هر $\epsilon > \circ$، عدد صحیح مثبتی مانند N موجود باشد به طوری که به ازای هر $m,n \geq N$ داشته باشیم: $\rho(x_n,x_m) < \epsilon$.

تعریف ۳٦.۱.۱ فضای متریک (M,ρ) کامل است هرگاه هر دنباله ی کوشی در M همگرا شود؛ همچنین می گوییم ρ یک متریک کامل برای M است. فضای توپولوژیک X را متریک کامل پذیر[۱٦] می نامیم هرگاه متریک کاملی برای X موجود باشد که توپولوژی مربوط به X را تولید کند؛ به عبارت دیگر X متریک کامل پذیر است هرگاه با فضای متریک کاملی، همسانریخت[۱۷] باشد.

مثال ۳۷.۱.۱ $(0,1)$ با متریک معمولی اش، یک فضای متریک کامل نیست امامتریک کامل پذیر است چرا که همسانریخت با فضای کامل $\mathbb{R}$ است.

تعریف ۳۸.۱.۱ فضاهای متریک (M,ρ) و (N,σ) را طولپای[۱۸] می نامیم هرگاه تابع یک به یکی مانند f از M به روی N موجود باشد به طوری که به ازای هر x و y در M داریم $\sigma(f(x),f(y))=\rho(x,y)$. نگاشت f را یک طولپایی[۱۹] گوییم.

گزاره ۳۹.۱.۱ هر فضای متریک M را می توان به طور طولپای به عنوان یک زیر مجموعه ی چگال در یک فضای کامل، نشاند. کامل سازی حاصل در حد طولپایی، یکتاست به طوری که M را نقطه به نقطه، ثابت نگه می دارد.

برهان : مرجع [۴]، صفحه ی ۱۷٦، قضیه ی ۲۴.۴]

[۱٦] completely metrizable
[۱۷] homeomorphic
[۱۸] isometric
[۱۹] isometry

تعریف ۴۰.۱.۱ فرض کنیم X مجموعه ای دلخواه باشد، قطر $\{(x,x)|x \in X\}$ در $X \times X$ را با نماد Δ نمایش می دهیم. اگر U و V زیر مجموعه هایی از $X \times X$ باشند، قرار می دهیم $U \circ V = \{(x,y)|\exists z \ s.t. \ (x,z) \in V, (z,y) \in U\}$.

تعریف ۴۱.۱.۱ یک یکنواختی قطری روی مجموعه ای مانند X، گردایه ای مانند $\mathbb{D}(X)$ (یا فقط $\mathbb{D}$) از زیر مجموعه های $X \times X$ است به طوری که در شرایط زیر صدق می کند:

۱) $D \in \mathbb{D} \Rightarrow \Delta \subset D$

۲) $D_1, D_2 \in \mathbb{D} \Rightarrow \ D_1 \cap D_2 \in \mathbb{D}$

۳) $D \in \mathbb{D} \Rightarrow \ \exists \ E \in \mathbb{D} \ s.t. \ E \circ E \subset D$

۴) $D \in \mathbb{D} \Rightarrow \ \exists \ E \in \mathbb{D} \ s.t. \ E^{-1} \subset D$

۵) $D \in \mathbb{D}, D \subset E \Rightarrow \ E \in \mathbb{D}$

هنگامی که X چنین ساختاری داشته باشد، X را یک فضای یکنواخت می نامیم.
یکنواختی $\mathbb{D}$ را تفکیک کننده[۲۰] می نامیم (و X را تفکیک شده گوییم) هرگاه $\bigcap\{D|D \in \mathbb{D}\} = \Delta$. $\mathbb{E}$ را پایه ای برای $\mathbb{D}$ می نامیم هرگاه $\mathbb{E} \subset \mathbb{D}$ و هر $D \in \mathbb{D}$ شامل $E \in \mathbb{E}$ باشد.

مثال ۴۲.۱.۱ هر متریک دلخواه مانند ρ بر مجموعه ای مانند M می تواند یک یکنواختی متریک مانند $\mathbb{D}_\rho$ را تولید کند که به ازای هر $\epsilon > 0$، مجموعه های $\mathbb{D}^\rho_\epsilon$ را به عنوان پایه دارد به طوری که $\mathbb{D}^\rho_\epsilon = \{(x,y) \in M \times M|\rho(x,y) < \epsilon\}$. یکنواختی هایی که بدین صورت به وسیله ی متریک ها تولید می شوند را متریک پذیر می نامند.

[۲۰] seperating

تعریف ۴۳.۱.۱ به ازای $x \in X$ و $D \in \mathbb{D}$، تعریف می کنیم

$D[x] = \{y \in X | (x, y) \in D\}$ و همچنین

$D[A] = \bigcup_{x \in A} D[x] = \{y \in X | \exists x \in A \ s.t. \ (x, y) \in D\}$

گزاره ۴۴.۱.۱

۱) به ازای هر $x \in X$، گردایه ی $\mathbb{U}_x = \{D[x] \ | D \in \mathbb{D}\}$ یک پایه ی همسایگی در x تشکیل می دهد که X را تبدیل به یک فضای توپولوژیک می کند. اگر هر پایه ی دیگری مانند $\mathbb{E}$ را به جای $\mathbb{D}$ قرار دهیم ، توپولوژی یکسانی تولید می شود.

۲) توپولوژی، هاوسدورف است اگر و تنها اگر $\mathbb{D}$ تفکیک کننده باشد.

برهان : مرجع[[۴]، صفحه ی ۲۴۰، قضیه ی ۳۵.٦]

تعریف ۴۵.۱.۱ توپولوژی مربوط به یک یکنواختی قطری را توپولوژی یکنواخت $\tau_{\mathbb{D}}$ تولید شده توسط $\mathbb{D}$ می نامیم. هرگاه بتوان توپولوژی روی فضای توپولوژیک X را بدین صورت از یک یکنواختی بدست آورد، X را یک فضای توپولوژیک یکنواختی پذیر[۲۱] می نامند.

مثال ۴٦.۱.۱ به ازای مجموعه ی دلخواه X، گردایه ی $\mathbb{D}$ متشکل از تمام زیرمجموعه های $X \times X$ که Δ را در بر دارند، یک یکنواختی روی X است که یکنواختی گسسته نامیده می شود. پایه ی این یکنواختی ، گردایه ای متشکل از مجموعه ی تک عضوی Δ است. می توان نشان داد که یکنواختی گسسته روی مجموعه ای مانند X، توپولوژی گسسته را تولید می کند.

---
[۲۱] uniformizable topological space