بسم الله الرحمن الرحیم

۱۳۸۷/ ۳/ ۱۱

۹۵۷۵۰

دانشگاه تهران

دانشکدهٔ ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پایان نامهٔ کارشناسی‌ارشد ریاضی محض

عنوان:

# بستار صحیح ایده‌آل‌ها

نگارش:

سعید جهاندوست

استاد راهنما:

دکتر سیامک یاسمی

زمستان ۱۳۸۶

جمهوری اسلامی ایران
دانشگاه تهران

اداره کل تحصیلات تکمیلی

شماره ..........
تاریخ ..........
پیوست ..........

باسمه تعالی

## تعهد نامه اصالت اثر

اینجانب سعید جهاندوست متعهد می شوم که مطالب مندرج در این پایان نامه / رساله حاصل کار پژوهشی اینجانب است وبه دستاوردهایپژوهشی دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده است ، مطابق مقررات ارجاع ودر فهرست منابع ومآخذ ذکر گردیده است. این پایان نامه / رساله قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است .

در صورت اثبات تخلف ( در هرزمان ) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد .

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به پردیس / دانشکده / مرکز دانشگاه تهران می باشد .

نام ونام خانوادگی دانشجو سعید جهاندوست

امضاء سعید جهاندوست

آدرس : خیابان انقلاب اول خیابان فخر رازی ـ پلاک ٥ کد پستی : ١٣٠٤٥/٥٦٨
فاکس : ٦٤٩٧٣١٤

١٣٨٧/٣/١١

به نام خداوند بخشنده مهربان

# تشکر

پروردگار متعال را شاکرم که همواره لطف بی‌کرانش شامل من بوده است. از پدر و مادر مهربانم که در طول زندگی‌ام حامی من بوده و هستند، متشکرم. همچنین لازم است از استاد گرامی‌ام، جناب آقای دکتر سیامک یاسمی که راهنمایی اینجانب را متقبل شدند و همچنین جناب آقای دکتر تیرداد شریف که به عنوان استاد مشاور بنده قبول زحمت فرموده‌اند، کمال تشکر را داشته باشم.

سعید جهاندوست

بهمن ۱۳۸۶

# چکیده


در این پایان نامه به بررسی بستار صحیح ایده‌آل‌ها می‌پردازیم.

ابتدا با استفاده از محک مقداریاب نشان می‌دهیم، $x$ در بستار صحیح ایده‌آل $I$ قرار دارد اگر و تنها اگر عنصر $c$ از $R$ که متعلق به هیچ ایده‌آل اول مینیمالی نیست موجود باشد، به‌طوری که برای $n$های به قدر کافی بزرگ $cx^n \in I^n$.

سپس با استفاده از جبرهای ریز ثابت می کنیم ، اگر $R$ حلقه‌ای نوتری و موضعاً شبه خالص باشد، برای هر ایده‌آل پارامتری $I$ و هر عدد طبیعی $n$، $\overline{I^n}$ هیچ ایده‌آل اول محاطی ندارد.

# فهرست مطالب

# مقدمه

نظریه بستار صحیح بسیارگسترده و وسیع می‌باشد و این که در حال حاضر زمینه تحقیقاتی افرادی نظیر I.Swanson ، W. V. Vascocelos، C.Huneke و A. Corso را تشکیل می‌دهد، مؤید این امر است.این نظریه نقشی‌اساسی را در هندسه جبری و نظریه اعداد ایفا می کند و تنظیم آن برای ایده‌آل ها در سال ۱۹۳۰ توسط Krull و Zariski آغاز شد.در این پایان نامه به مطالعه بستار صحیح ایده آل ها می پردازیم .

فصل اول این پایان نامه به پیش نیازها اختصاص دارد.در این فصل، از اثبات گزاره‌ها و قضایای که در کتب مرجع ذکر شده درانتهای پایان نامه به صراحت ثابت شده‌اند، خودداری کرده‌ایم.این فصل شامل هفت بخش است که به ترتیب عبارتند از: قضیه کاراتئودوری، حلقه یکدست، Completion، فرمول بعد، حلقه شبه خالص، بستار صحیح حلقه و شرایط سر.

فصل دوم شامل دو بخش است. در بخش اول ابتدا بستار صحیح یک ایده آل را تعریف می‌کنیم وسپس گزاره‌هایی را که بلافاصله از معادله صحیح وابسته به یک عنصر بر روی یک ایده آل، نتیجه می‌شود را ذکر می کنیم. در انتهای این بخش مفهوم تحویل را بیان می کنیم و به کمک آن نشان می دهیم،بستار صحیح یک ایده آل، یک ایده آل صحیحا بسته است. در بخش دوم به مطالعه بستار صحیح ایده‌آل ها در حلقه های مدرج می‌پردازیم .ابتدا ثابت می کنیم که بستار صحیح ایده آل تک جمله ای $I$ درحلقه $K[X_1,\dots,X_d]$ خودیک ایده‌آل تک جمله ایست و $\Gamma(\bar{I}) = \mathrm{NP}(I)\cap \mathrm{N}^d$ و ثابت می کنیم که این ایده آل نرمال است اگر وتنهااگر $I^m$ برای $m = 1,\dots,d-1$ صحیحاً بسته باشد.سپس در حلقهٔ $\mathrm{N}-$ مدرج $A$،ایده آل های همگن به فرم $A_{\geq m} = \bigoplus_{l\geq m} A_l$ را مورد بررسی قرار داده وسپس تعمیمی از یک نتیجه از S.Faridi در [۸] را ثابت می کنیم و آن اینست که اگر $A$ یک حلقه $\mathrm{N}-$

مدرج و فاقد عنصر پوچ توان ناصفر باشد که روی $A$. توسط عناصر $x_1, \ldots, x_n$ از درجه‌های مثبت $w_1, \ldots, w_n$ تولید شود و $w = lcm(w_1, \ldots, w_n)$ و $I = A_{\geq kw}$ و برای $1 \leq p \leq \frac{n-2}{k} + 1$، $I^p = A_{\geq pkw}$ . آنگاه $I$ یک ایده‌آل نرمال است. به ویژه اگر $k \geq n - 1$، آنگاه $I$ یک ایده‌آل نرمال است.در انتها فصل را با ارائه چند مثال به پایان می‌بریم.

جبر جابه‌جایی در زمینه‌های گوناگون نیازمند درک توان‌های ایده‌آل‌هاست و یک سئوال کلیدی در این زمینه آن است که اگر $I$ ایده‌آلی از حلقه $R$ و $r$ عضوی از حلقه باشد چه توانی از $r$ در $I^n$ قرار دارد. یک روش برای پاسخ دادن به این سئوال استفاده از بستار صحیح ایده‌آل‌هاست که در فصل سوم به آن می‌پردازیم.این فصل شامل سه بخش است. در بخش اول مقدار یاب و حلقه مقدار یاب را تعریف می کنیم و سپس به بیان خواص ابتدایی آن می پردازیم. در بخش بعد دو گزاره در مورد وجود حلقه های مقدار یاب را ثابت می کنیم ابتدا نشان می دهیم اگر $R$ یک حوزه صحیح و نه لزوماً نوتری باشد و $I$ ایده‌آل سره‌ای از آن باشد، آنگاه حلقه مقداریاب $V$، بین $R$ و میدان کسرهایش موجود است، به‌طوری که $IV \neq V$.سپس ثابت می کنیم اگر $R$ حوزه صحیح نوتری باشد و $P$ ایده‌آل اول ناصفری درآن، آنگاه یک حلقه مقداریاب نوتری $V$، بین $R$ و میدان کسرهایش موجود است به‌طوری که $m_V \cap R = P$.در بخش سوم نشان می دهیم بستار صحیح یک ایده آل در یک حوزه صحیح را می توان توسط مقدار یاب ها مشخص کرد واگر حوزه صحیح نوتری باشد، می‌توان آن را توسط مقدار یاب های نوتری مشخص کردوبه کمک این گزاره نشان می دهیم، اگر $I$ ایده‌آلی از حلقه نوتری $R$ باشد آنگاه $r \in \bar{I}$ اگر و تنها اگر $c \in R^\circ$ موجود باشد، به طوری که برای $n$های به قدرکافی بزرگ $cr^n \in I^n$. در نظریه بستارکیپ معرفی شده توسط M.Hochster و C.Huneke ، برای حلقه‌های با مشخصه عدد اول $p$ مستقیما به‌این صورت تعریف می شود: فرض کنیم $x \in R^*$ ، آنگاه $x \in I^*$ اگر $c \in R^\circ$ موجود باشد به طوری که برای $q_n = p^n$های به قدر کافی بزرگ، $cx^q \in I^{[q_n]}$. خاستگاه این تعریف در حقیقت بر اساس

قضیه فوق درباره بستار صحیح می باشد. تلاش های زیادی برای تعریفی مشابه هنگامی که حلقه $R$ از مشخصه صفر می باشد توسط متخصصین نظریه بستار کیپ انجام گرفته است. به عنوان اولین ایده به نظر می رسید همین تعریف را به شکل مشابه با عوض کردن $I^{[q_n]}$ با $I^{[n]}$ به مشخصه صفر تعمیم داد. اما به سادگی می توان نشان داد که با این تعریف، بر اساس قضیه بالا دوباره به همان تعریف بستار صحیح خواهیم رسید. برای این منظور [۴] را ببینید.

از آن جایی که حلقه‌های موضعاً شبه خالص در قسمت‌های متعددی از جبر جابه‌جایی ظاهر می‌شوند، بنابراین نیاز به بررسی چنین حلقه‌هایی داریم. در فصل چهارم یکی از مشخصه‌های این حلقه‌ها را ثابت می‌کنیم. این فصل شامل دو بخش است. بخش اول به معرفی جبر ریز اختصاص دارد.در بخش دوم ابتدا بستار صحیح جبر ریز را محاسبه می کنیم و به کمک آن به مطالعه ایده‌آل‌های اول وابسته بستار صحیح توان‌های ایده‌آل‌ها می‌پردازیم و در انتها قضیه Ratliff را در مورد حلقه‌های موضعاً شبه خالص ثابت می‌کنیم و آن اینست که اگر $R$ حلقه‌ای نوتری و موضعاً شبه خالص باشد، برای هر ایده‌آل پارامتری $I$ و هر عدد طبیعی $n$، $\overline{I^n}$ هیچ ایده‌آل اول محاطی ندارد.

# فصل اول

# پیش‌نیازها

در این فصل، از اثبات گزاره‌ها و قضایای که در کتب مرجع ذکر شده در انتهای پایان نامه به صراحت ثابت شده‌اند، خودداری کرده‌ایم.

این فصل شامل هفت بخش است که به ترتیب عبارتند از: قضیه کاراتئودوری، حلقه یکدست، Completion، فرمول بعد،حلقه شبه خالص ، بستار صحیح حلقه و شرایط سر.

## ۱-۱ قضیه کاراتئودوری

**۱-۱-۱ تعریف.** فرض کنیم $V$ یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد، گوییم بردار $\alpha$ ترکیب محدب بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ است، هرگاه عناصر $c_i \geq 0$ از $\mathbb{R}$ موجود باشند، به طوری که

$$\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_p\alpha_p \quad , \quad \sum_{i=1}^{p} c_i = 1$$

**۲-۱-۱ تعریف.** فرض کنیم $S$ زیرمجموعه‌ای از فضای برداری $V$ روی $\mathbb{R}$ باشد، مجموعه همه ترکیبات محدب اعضای $S$ را غلاف محدب $S$ نامیده و با نماد $\operatorname{conv}(S)$ نمایش می‌دهیم.

**۳-۱-۱ تعریف.** فرض کنیم $S$ زیرمجموعه‌ای از فضای برداری $V$ روی $\mathbb{R}$ باشد، گوییم $S$ محدب است هرگاه برای هر $x, y$ از $S$ و $t \in [0, 1]$. $tx + (1-t)y \in S$.

**۴-۱-۱ نکته.** اگر $S$ زیرمجموعه‌ای از فضای برداری $V$ روی $\mathbb{R}$ باشد در حقیقت $\operatorname{conv}(S)$ کوچک ترین مجموعه محدب شامل $S$ است.

**۵-۱-۱ تعریف.** گوییم زیرمجموعه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ از فضای برداری $V$ روی $\mathbb{R}$، وابسته آفین است، اگر عناصر $c_i \in \mathbb{R}$، که همگی صفر نیستند، موجود باشد به طوری که

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_p\alpha_p = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{p} c_i = 0$$

در غیر این صورت گوییم، $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ مستقل آفین است.

**۶-۱-۱ نکته.** زیر مجموعه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ مستقل آفین است اگر وتنها اگر $\{\alpha_2 - \alpha_1, \dots, \alpha_p - \alpha_1\}$ زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از $V$ باشد.

**۱-۱-۷ قضیه**[1] فرض کنیم $V$ یک فضای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{R}$ باشد و $S \subseteq V$. آن‌گاه بردار $\alpha \in V$ در $\operatorname{conv}(S)$ قرار دارد اگر و تنها اگر بردارهای مستقل آفین $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ در $S$ موجود باشند، به طوری که $\alpha \in \operatorname{conv}\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$.

**برهان.** بوضوح اگر بردارهای مستقل آفین $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ در $S$ موجود باشند به طوری که $\alpha \in \operatorname{conv}\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$، آن‌گاه $\alpha \in \operatorname{conv}(S)$.

حال فرض کنیم $\alpha \in \operatorname{conv}(S)$ لذا $\alpha = \sum_{i=1}^{n} b_i \alpha_i$ به طوری که $\alpha_i \in S$ و $b_i \geq 0$ و $\sum_1^n b_i = 1$. بدون از دست دادن کلیت مطلب می‌توانیم فرض کنیم $b_i > 0$ و $\alpha_i \neq 0$. اگر $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ مستقل آفین باشند که حکم ثابت می‌شود. در غیر این صورت عناصر $c_1, \dots, c_n$ از $\mathbb{R}$ که همگی صفر نیستند، موجودند به طوری که $\sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i = 0$ و $\sum_{i=1}^{n} c_i = 0$. قرار می‌دهیم

$$\frac{c_{i*}}{b_{i*}} = \max\left\{\frac{c_1}{b_1}, \dots, \frac{c_n}{b_n}\right\}$$

به وضوح $c_{i*} > 0$. داریم

$$\alpha_{i*} = -\sum_{i \neq i*} \left(\frac{c_i}{c_{i*}}\right) \alpha_i \qquad , \qquad \sum_{i \neq i*} \frac{c_i}{c_{i*}} = -1$$

بنابراین

$$\alpha = \sum_{i \neq i*} b_i \alpha_i - b_{i*} \sum_{i \neq i*} \left(\frac{c_i}{c_{i*}}\right) \alpha_i = \sum_{i \neq i*} \left(b_i - b_{i*}\left(\frac{c_i}{c_{i*}}\right)\right) \alpha_i$$

که

$$\sum_{i \neq i*} \left(b_i - b_{i*}\left(\frac{c_i}{c_{i*}}\right)\right) = \sum_{i \neq i*} b_i - b_{i*} \sum_{i \neq i*} \frac{c_i}{c_{i*}} = \left(\sum_{i \neq i*} b_i\right) + b_{i*} = 1$$

1) Carathedory's Theorem

و به وضوح $b_i - b_{i*}(\frac{c_i}{c_{i*}}) \geq 0$ برای $i \neq i*$. پس $\alpha \in \mathrm{conv}(\alpha_1, \ldots, \hat{\alpha}_{i*}, \ldots, \alpha_n)$. با تکرار عمل بالا حکم ثابت خواهد شد.

## ۲-۱ حلقه یکدست

**۱-۲-۱ تعریف.** فرض کنیم $M$ یک $R-$ مدول و $\varphi$ دنباله دقیق دلخواه

$$\ldots \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow \ldots$$

از $R-$ مدول‌ها باشد. گوییم $M$ روی $R$ یکدست است، هرگاه دنباله $M \bigotimes\limits_R \varphi$ یعنی

$$\ldots \longrightarrow N' \bigotimes_R M \longrightarrow N \bigotimes_R M \longrightarrow N'' \bigotimes_R M \longrightarrow \ldots$$

دقیق باشد.

**۲-۲-۱ تعریف.** $M$ را روی $R$ دقیقاً یکدست گوییم، هرگاه برای هر دنباله $\varphi$، $\varphi$ دقیق باشد اگر وتنها اگر $M \bigotimes\limits_R \varphi$ دقیق باشد.

**۳-۲-۱ تعریف.** فرض کنیم $R$ و $S$ دو حلقه باشند و $f : R \longrightarrow S$ یک همریختی حلقه‌ای باشد. اگر $S$ به عنوان $R-$ مدول یکدست باشد، $f$ را همریختی یکدست می‌نامیم و اگر $S$ را به عنوان $R-$ مدول دقیقاً یکدست باشد، $f$ را همریختی دقیقاً یکدست می‌نامیم.

**۴-۲-۱ گزاره.** فرض کنیم $f : R \longrightarrow S$ یک همریختی حلقه‌ای دقیقاً یکدست باشد. برای هر ایده‌ال $I$ در $R$، $IS \cap R = I$.

برهان. رجوع کنید به [۵].

**۱-۲-۵ قضیه.** فرض کنیم $f : R \longrightarrow S$ یک همریختی حلقه‌ای یکدست باشد و $P_۲ \subseteq P_۱$ ایده‌آل‌های اولی از $R$ باشند، به قسمی که ایده‌آل اول $Q_۲ \subseteq S$ موجود است، به طوری که $f^{-۱}(Q_۲) = P_۲$. در این صورت ایده‌آل اول $Q_۱$ از $S$ موجود است، به طوری که $f^{-۱}(Q_۱) = P_۱$ و $Q_۱ \subseteq Q_۲$.

**برهان.** رجوع کنید به [۵].

## ۱-۳ Completion

**۱-۳-۱ تعریف.** فرض کنیم $(G, +)$ یک گروه آبلی باشد، گوییم $G$ یک گروه توپولوژیک است، هرگاه

۱) $G$ یک فضای توپولوژیک باشد.

۲) نگاشت‌های $(x, y) \longmapsto x + y$ و $x \longmapsto -x$ برای هر $x, y \in G$، پیوسته باشند.

**۱-۳-۲ تعریف.** فرض کنیم $G$ یک گروه توپولوژیک باشد وفرض کنیم $(x_n)$ دنباله‌ای از اعضای $G$ باشد، گوییم $(x_n)$ یک دنباله کوشی است، هرگاه برای هر همسایگی $U$ از صفر عدد طبیعی $N(U)$ موجود باشد، بطوری که برای هر $r, s \geq N(U)$، $x_r - x_s \in U$.

**۱-۳-۳ تعریف.** دو دنباله $(x_n)$ و $(y_n)$ را هم‌ارز گوییم، هرگاه تفاضل‌شان همگرا به صفر باشد.

**۱-۳-۴ تعریف.** فرض کنیم $\{A_n\}$ دنباله‌ای از گروه‌ها و $\{\theta_n : A_{n+۱} \longrightarrow A_n\}$ دنباله‌ای از همریختی‌ها باشد. دنباله $\{(A_n, \theta_n)\}$ را یک سیستم وارون می‌نامیم و حد وارون این سیستم را

بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\varprojlim A_n = \{(a_n) \mid a_n \in A_n \ , \ \theta_{n+۱} a_{n+۱} = a_n\}$$

**۱-۳-۵ نکته.** فرض کنیم $G$ یک گروه باشد و

$$G = G_۰ \supseteq G_۱ \supseteq \dots$$

دنباله‌ای از زیرگروههای $G$ باشد. آن گاه $\{G_n\}$ به عنوان مجموعه‌ای از همسایگی صفر، $G$ را تبدیل به یک گروه توپولوژیک می‌کند. حال فرض کنیم $(x_m)$ دنباله‌ای کوشی در $G$ باشد، بوضوح برای هر عدد نامنفی و صحیح $n$، تصویر دنباله فوق در $\frac{G}{G_n}$ ثابت خواهد بود، که آن را با $\xi_n$ نمایش می‌دهیم. اگر $\theta_{n+۱} : \frac{G}{G_{n+۱}} \longrightarrow \frac{G}{G_n}$ را بصورت $\theta_{n+۱}(g + G_{n+۱}) = g + G_n$ تعریف کنیم، بوضوح $\theta_n$ یک همریختی گروهی است و $\theta_{n+۱}\xi_{n+۱} = \xi_n$. دنباله $(\xi_n)$ را دنباله همدوس وابسته به $(x_m)$ می‌نامیم.

توجه کنید، که اگر دو دنباله کوشی هم‌ارز باشند، دنباله‌های نظیر آن‌ها برابر خواهند بود و اگر $(\xi_n)$ دنباله‌ای همدوس باشد، اگر $x_n$ عنصری دلخواه از کلاس $\xi_n$ باشد، دنباله $(x_n)$ دنباله‌ای کوشی در $G$ خواهد بود که دنباله نظیر آن $(\xi_n)$ است.

بنابراین $\left\{ \left( \frac{G}{G_n}, \theta_n \right) \right\}$ یک سیستم وارون خواهد بود.

**۱-۳-۶ تعریف.** حد وارون سیستم $\left\{ \left( \frac{G}{G_n}, \theta_n \right) \right\}$ را کامل شده $G$ نامیده و با $\hat{G}$ نمایش می‌دهیم.

براحتی می‌توان نشان داد که $\hat{G}$ با عمل جمع معمولی دنباله‌ها، تشکیل یک گروه آبلی می‌دهد.

**۱-۳-۷ تعریف.** فضای توپولوژیک $G$ را کامل گوییم هرگاه همریختی گروهی $\varphi : G \longrightarrow \hat{G}$ که $\varphi(x)$ برابر تصویر دنباله ثابت $(x_n(=x))$ در $\hat{G}$ است، یکریختی باشد.

**۱-۳-۸ نکته.** فرض کنیم $R$ یک حلقه و $I$ ایده‌آلی سره در $R$ باشد، اگر $G = R$ و $G_n = I^n$، آن‌گاه $R$ یک حلقه توپولوژیک خواهد بود و توپولوژی آن را $I-$ ادیک توپولوژی می‌نامیم و کامل شده $R$ تحت این توپولوژی، خود نیز یک حلقه توپولوژیک خواهد بود، که تحت آن $\varphi : R \longrightarrow \hat{R}$ یک همریختی حلقه‌ای پیوسته است.

**۱-۳-۹ گزاره.** فرض کنیم $(R, m)$ حلقه‌ای موضعی و نوتری باشد و $\hat{R}$ کامل شده $R$ تحت $m-$ادیک توپولوژی باشد، آن‌گاه

۱) $\hat{R}$، دقیقاً یکدست است.

۲) $\hat{R}$، موضعی و نوتری، با ایده‌آل ماکسیمال $m\hat{R}$ است.

۳) اگر $R$ کامل و $I$ ایده‌آل سره‌ای از آن باشد، آن‌گاه $\frac{R}{I}$ نیز کامل و موضعی است.

برهان. رجوع کنید به [۵].

## ۱-۴ فرمول بعد

**۱-۴-۱ قضیه.** فرض کنیم $R$ یک حلقه نوتری و $S$ توسیعی از آن باشد. فرض کنیم $R$ و $S$ حوزه‌های صحیح باشند و فرض کنیم $Q$ ایده‌آل اولی در $S$ و $P = Q \cap R$ در این صورت

$$\operatorname{ht} Q + \operatorname{tr.deg}_{k(P)} k(Q) \leq \operatorname{ht} P + \operatorname{tr.deg}_R S$$

برهان. رجوع کنید به [۵].

**۱-۴-۲ تعریف.** حلقه $R$ را یک حلقه کاتنری گوییم، هرگاه برای هر دو ایده‌آل اول $P \subseteq Q$ از $R$، تمام زنجیرهای اشباع شده از ایده‌آل‌های اول با شروع از $P$ و انتها در $Q$ دارای یک طول مشترک باشند.

**۱-۴-۳ تعریف.** حلقه $R$ را یک حلقه بطور عام کاتنری گوییم، هرگاه هر $R-$ جبر متناهی مولد، کاتنری باشد.

با یک تغییر در اثبات ۱.۴.۱ داریم:

**۱-۴-۴ قضیه.** اگر $R$ یک حوزه صحیح نوتری و بطور عام کاتنری و $S$ یک حوزه صحیح و توسیع متناهی مولد از $R$ باشد و $Q$ ایده‌آل اولی در $S$ باشد،

$$\operatorname{ht} Q + \operatorname{tr.deg}_{k(Q\cap R)} k(Q) = \operatorname{ht}(Q\cap R) + \operatorname{tr.deg}_R S$$

**۱-۴-۵ تعریف.** فرض کنیم $R$ یک حوزه صحیح نوتری باشد. گوییم $R$ در فرمول بعد صدق می‌کند، هرگاه برای هر توسیع متناهی مولد $S$ از $R$ که حوزه صحیح نیز می‌باشد و برای هر ایده‌آل اول $Q$ در $S$

$$\operatorname{ht} Q + \operatorname{tr.deg}_{k(Q\cap R)} k(Q) = \operatorname{ht}(Q\cap R) + \operatorname{tr.deg}_R S$$

**۱-۴-۶ نتیجه.** فرض کنیم $R$ در فرمول بعد صدق کند و فرض کنیم $S$ یک $R-$ جبر متناهی مولد باشد، به طوری که حوزه صحیح نیز می‌باشد. در این صورت $S$ نیز در فرمول بعد صدق می‌کند.

**برهان.** فرض کنیم $T$ توسیع متناهی مولدی از $S$ باشد به طوری که حوزه صحیح نیز باشد و فرض کنیم $Q$ ایده‌آل اولی از $T$ باشد. اما $R$ در فرمول بعد صدق می‌کند، پس داریم

$$\mathrm{ht}(Q) + \mathrm{tr.deg}_{k(Q\cap R)}\, k(Q) = \mathrm{ht}(Q\cap R) + \mathrm{tr.deg}_R\, T$$

همچنین

$$\mathrm{ht}(Q\cap S) + \mathrm{tr.deg}_{k(Q\cap R)}\, k(Q) = \mathrm{ht}(Q\cap R) + \mathrm{tr.deg}_S\, T$$

از طرفی

$$\mathrm{tr.deg}_R\, T = \mathrm{tr.deg}_R\, S + \mathrm{tr.deg}_S\, T$$

$$\mathrm{tr.deg}_{k(Q\cap R)}\, k(Q) = \mathrm{tr.deg}_{k(Q\cap R)}\, k(Q\cap S) + \mathrm{tr.deg}_{k(Q\cap S)}\, k(Q)$$

بنابراین با استفاده چهار تساوی بالا به راحتی می‌توان نشان داد

$$\mathrm{ht}(Q) + \mathrm{tr.deg}_{k(Q\cap S)}\, k(Q) = \mathrm{ht}(Q\cap S) + \mathrm{tr.deg}_S\, T$$

**۱-۴-۷ گزاره.** هر حلقه موضعی و کامل، بطور عام کانتری است. هر حوزه صحیح موضعی و کامل در فرمول بعد صدق می‌کند.

**برهان.** برای اثبات این که هر حلقه موضعی و کامل، به طور عام کانتری است، رجوع کنید به[۲]. اما برای قسمت دوم چون هر حوزه صحیح موضعی و کامل بطور عام کانتری است، بنابراین طبق قضیه ۱.۴.۴ و تعریف ۱.۴.۵، در فرمول بعد صدق خواهد کرد.

## ۱-۵ حلقه شبه خالص

**۱-۵-۱ تعریف.** حلقه نوتری $R$ را حلقه متساوی بعد می‌نامیم، هرگاه برای هر ایده‌آل اول مینیمال $P$ از $R$، $\dim R = \dim \frac{R}{P}$.

**۱-۵-۲ تعریف.** حلقه موضعی و نوتری $(R, m)$ را شبه خالص می‌نامیم، هرگاه کامل شده $R$، تحت $m-$ ادیک توپولوژی روی $R$، حلقه‌ای متساوی بعد باشد.

**۱-۵-۳ تعریف.** حلقه نوتری $R$ را موضعاً شبه خالص می‌نامیم، هرگاه برای هرایده‌آل اول $P$ از $R$، $R_P$ شبه خالص باشد.

**۱-۵-۴ گزاره.** اگر $(R, m)$ حلقه‌ای موضعی، متساوی بعد و کانتری باشد، آن گاه، برای هر دو ایده‌آل اول $P \subseteq Q$ از $R$، $\operatorname{ht} Q = \operatorname{ht} P + \operatorname{ht} \frac{Q}{P}$.

**برهان.** رجوع کنید به [۵].

**۱-۵-۵ گزاره.** فرض کنیم $(R, m)$ حلقه‌ای موضعی و نوتری و شبه خالص باشد، آن‌گاه

۱) برای هر ایده‌آل اول $P$ از $R$، $R_P$ حلقه‌ای شبه خالص است.

۲) اگر $I$ ایده‌آلی در $R$ باشد، $R/I$ متساوی بعد است اگر و تنها اگر $R/I$ شبه خالص باشد.

**برهان.** رجوع کنید به [۵].