دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض(آنالیز)

گروه ریاضی

نگاشت های خطی حافظ معکوس پذیری در $M_2(\mathbb{C})$

آرمان شیروانی

استاد راهنما :

دکتر فریبا ارشاد

استاد مشاور :

دکتر بهمن یوسفی

بهمن ۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه

مرکز شیراز

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

گروه ریاضی

نگاشت های خطی حافظ معکوس پذیری در $\mathbf{M}_2(\mathbb{C})$

آرمان شیروانی

استاد راهنما :

دکتر فریبا ارشاد

استاد مشاور :

دکتر بهمن یوسفی

بهمن ۹۱

(ﷲ)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور استان فارس
باسمه تعالی

تاریخ : ۹۱/۱۱/۱۸
شماره : ۵/۱۰۶۲۷۷
پیوست : ....

صورتجلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد آقای **آرمان شیروانی** دانشجوی رشته **ریاضی محض** گرایش **آنالیز** به شماره دانشجویی **۸۷۰۰۰۵۶۱۲** با عنوان:

" نگاشت‌های خطیِ حافظِ معکوس‌پذیری در $M_2(\mathbb{C})$"

با حضور هیأت داوران در روز **چهارشنبه** مورخ **۱۳۹۱/۱۱/۱۸** ساعت **۱۰ صبح** در محل ساختمان **اندیشه دانشگاه پیام نور شیراز** برگزار شد و هیأت داوران پس از بررسی، پایان‌نامه مذکور را شایسته نمره به عدد ...۱۸/۰۰... به حروف ...هجده... با درجه ...عالی... تشخیص داد.

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱	دکتر فریبا ارشاد	راهنما	استادیار	پیام‌نور شیراز	
۲	دکتر بهمن یوسفی	مشاور	استاد	پیام‌نور شیراز	
۳	دکتر شمس‌الملوک خوشدل	داور	استادیار	پیام‌نور شیراز	
۴	امیر اکبری	نماینده تحصیلات تکمیلی	مربی	پیام‌نور شیراز	

رئیس اداره تحصیلات تکمیلی

شیراز- شهرک گلستان، بلوار دهخدا
قبل از نمایشگاه بین المللی
تلفن : ۳-۶۲۲۲۲۴۰-۰۷۱۱
دورنگار : ۶۲۲۲۲۴۹-۰۷۱۱
صندوق پستی :۱۳۶۸ - ۷۱۹۵۵
www.spnu.ac.ir
Email : admin@spnu.ac.ir

اینجانب **آرمان شیروانی** دانشجوی ورودی سال **۱۳۸۷** مقطع کارشناسی ارشد رشته **ریاضی** گواهی می نمایم چنانچه در پایان نامه خود از فکر ، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته ام با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و ماخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده ام . بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می دانم و جوابگوی آن خواهم بود .

دانشجو تائید می نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است .

نام و نام خانوادگی دانشجو

تاریخ و امضاء

۹۱/۱۱/۲۰

اینجانب **آرمان شیروانی** دانشجوی ورودی سال **۱۳۸۷** مقطع کارشناسی ارشد رشته **ریاضی** گواهی می نمایم چنانچه بر اساس مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار مقاله ، کتاب ، و ... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما ، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله ، کتاب ، و ... و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم .

نام و نام خانوادگی دانشجو

تاریخ و امضاء

۹۱/۱۱/۲۰

کلیه حقوق مادی مرتبط از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه پیام نور می باشد .

بهمن ۹۱

تقدیم به:

مادر عزیزم که آغوش گرم خویش را از من گرفته و به آغوش سرد خاک تن سپرده است و همسر نازنینم که

هدیه های آسمانی ام، آرین و آروین، را در

دامان پرمهرش می پروراند.

سپاسگزاری:

از استاد عزیزم سرکار خانم ***دکتر فریبا ارشاد*** که دقایق زیادی از وقت گرانبهای خویش را صرف مطالعه و تصحیح این پایان نامه نمودند و بنده حقیر را از راهنمایی های با ارزش خود بهره مند ساختند نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

از اساتید محترم بخش ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز و بخش تحصیلات تکمیلی سپاسگزاری می کنم.

چکیده

ریاضیدانان بسیاری روی قضیه معروف گلیسون-کاهانه-زلازکو مطالعه و تحقیق کرده اند. در این پایان نامه، دو تعمیم از این قضیه بیان می شوند. همچنین خواص تابعهای خطی حافظ وارون پذیری از یک جبر باناخ یکدار به فضای $M_n(\mathbb{C})$ بررسی خواهند شد.در حالت خاص n=2، فرم کلی این تابع ها، در حالتی که ناپیوسته هستند بیان می شوند.

واژگان کلیدی: جبر باناخ، تابع خطی، وارون پذیری، ماتریس و ایده ال.

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فصل اول

مقدمه

مقدمات و قضایای مورد نیاز

۱-۱ جبرباناخ

۱-۱-۱تعریف:یک جبر مختلطA ، یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط$\mathbb{C}$ است با یک ضرب که دارای ویژگیهای زیر باشد:

برای هر $x,y,z \in A$ و $\lambda \in \mathbb{C}$

$$x(yz) = (xy)z$$

$$(x+y)z = xz + yz$$

$$x(y+z) = xy + xz$$

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$$

علاوه بر این اگرA یک فضای باناخ با نرم$\|.\|$ و صادق در

$$\|xy\| \leq \|x\|.\|y\| \quad ; x, y \in \mathrm{A}$$

باشد، گوییمA یک جبر باناخ مختلط است.

هرگاه در جبر مختلطA ، برای هر$x,y \in A$ داشته باشیم $xy = yx$، آنگاه A را جابجایی گوییم.

۱-۱-۲ چند مثال از جبر باناخ:

الف) $C(X)$ که در آن X یک فضای هاسدورف فشرده است. این فضا با نرم سوپریمم و ضرب نقطه به نقطه توابع،

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

یک جبرباناخ جابجایی یکدار(تابع ثابت۱) می باشد.(رودین[1]، ۱۹۷٤: ۱۹۰)

ب) اگر K یک فضای موضعاً فشرده باشد آنگاه$C_0(K)$، فضای همه توابع پیوسته مختلط روی K که در بینهایت صفر می شوند، (فضای تمام توابع پیوستهf بطوریکه برای هر $\varepsilon > 0$، مجموعه $\{x: x \in K, |f(x)| \geq \varepsilon\}$فشرده است) با نرم سوپریمم، یک جبر باناخ غیر یکدار است مگر اینکهK فشرده باشد.(اپتیت،۱۹۹۱: ۳۱)

پ) فرض کنید X یک فضای باناخ باشدآنگاه $L(X)$، جبر همه عملگرهای خطی کراندار روی X با نرم معمول عملگرها، یک جبر باناخ یکدار است.

ت) اگر X یک فضای متناهی البعد با$dimX = n$ باشدآنگاه $L(X)$ می تواند با$M_n(\mathbb{C})$ یکی شود. اگر $\dim X > 1$ آنگاه $L(X)$ جابجایی نیست.

ث) بجز حالاتی که H متناهی البعد است، ساده ترین جبر باناخ ناجابجایی$L(H)$ است کهH یک فضای هیلبرت با بعد نامتناهی است.

ج) $\mathbb{C}$ ساده ترین جبر باناخ جابجایی است.

[1]-Rudin

۱-۱-۳ تعریف: گوییم زیرمجموعه I از جبر مختلط جابجایی A یک ایده آل است اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱- I زیر فضای A(به مفهوم فضای برداری) باشد.

۲- هرگاه $x\epsilon A$, $y\epsilon I$ آنگاه $xy\epsilon I$

اگر $I \neq A$ آنگاه I را یک ایده آل حقیقی می نامیم.

ایده آل های ماکسیمال، ایده آل هایی حقیقی اند که در هیچ ایده آل حقیقی بزرگتر قرار ندارند.

۱-۱-٤ توجه: هیچ ایده آل حقیقی شامل یک عنصر وارون پذیر نیست.

شایان ذکراست که ازیک جبرباناخ می توان یک جبر باناخ دیگرساخت. در مثال زیر مثالی در این خصوص آورده شده است .

۱-۱-٥ مثال: فرض کنید I یک ایده آل دوطرفه بسته ازجبر باناخ A باشدآنگاه $\frac{A}{I}$ یک فضای باناخ با نرم

$$|||\dot{x}||| = \inf_{u\in I}\|x + u\|$$

است. در اینجا $\dot{x}$، هم مجموعه $x + I$ می باشد.

با این نرم می توان تحقیق کرد $\frac{A}{I}$ یک جبر باناخ است. این فضا را جبر خارج قسمتی A بوسیله ایده آل دو طرفه I می نامیم. زیرا برای هر $u, v \in I$

$$|||\dot{x} + \dot{y}||| = |||(x\dot{+}y) + I||| \leq \|x + y + u + v\| \leq \|x + u\| + \|y + v\|$$
$$|||\dot{x} \cdot \dot{y}||| \leq \|xy + xv + uy + uv\| = \|(x + u)(y + v)\| \leq \|x + u\| \cdot \|y + v\|$$

بنابراین با گرفتن inf از طرفین در بالا بدست می آوریم:

$$|||\dot{x}+\dot{y}||| \leq |||\dot{x}||| + |||\dot{y}|||$$
$$|||\dot{x}\cdot\dot{y}||| \leq |||\dot{x}|||\cdot|||\dot{y}||| \ .$$

در حالت خاص اگر A یکدار باشد آنگاه

$$|||\dot{1}||| = |||\dot{1}^2||| \leq |||\dot{1}|||\cdot|||\dot{1}|||$$
$$1 \leq |||\dot{1}||| \leq \|1\| = 1$$
$$|||\dot{1}||| = 1$$

(اپتیت[۱]، ۱۹۹۱: ۳۳).

۱–۱–۶ تعریف: (زیر فضای با همبعد متناهی)

اگر A یک جبر باناخ باشد زیر فضای M از A را باهمبعد متناهی می نامیم هرگاه $\dim\frac{A}{M} < \infty$. اگر $\dim\frac{A}{M} = n$ آنگاه می نویسیم $codim\ M = n$ و n را همبعد M می نامیم.

۱–۱–۷ **تعریف:** فضای تمام توابع خطی و کراندار از A به میدان اسکالر را با A^* نمایش می دهیم. هر عضو A^* یک تابعک خطی نامیده می شود.

[1] -Aupetit

۱-۱-۸ قضیه: اگر X یک فضای نرمدار، M یک زیرفضای بسته X و N یک زیرفضای متناهی البعد از X باشد، آنگاه $M + N$ یک زیرفضای بسته از X است.(کانوی[1]، ۷۱:۱۹۹۰)

۱-۱-۹ قضیه(هان باناخ): اگر X یک فضای نرمدار، M یک زیرفضای X و $\mathrm{f}: \mathrm{M} \longrightarrow \mathbb{F}$ یک تابعک خطی کراندار باشد، آنگاه یک F در X^* وجود دارد بطوریکه $F|_M = f$ و $\|F\| = \|f\|$.

(کانوی، ۱۹۹۰: ۷۸)

۱-۱-۱۰نتیجه: اگر X یک فضای نرمدار باشد، M زیرفضای بسته X، $x_0 \in X\backslash M$ و $\mathrm{d} = \mathrm{dist}(x_0, \mathrm{M})$، آنگاه یک f در X^* وجود دارد بطوریکه برای هر x در M، $f(x) = 0$، $f(x_0) = 1$ و $\|f\| = d^{-1}$. (کانوی، ۱۹۹۰: ۷۹)

۱-۱-۱۱ قضیه: فرض کنیم A یک جبر باناخ و M یک زیرفضای بسته A باهمبعد n باشد در این صورت تابعکهای خطی $F_1, F_2, \dots, F_n$ روی A موجودند بطوریکه:

$$\mathrm{M} = \bigcap_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \ker \mathrm{F}_{\mathrm{i}} \ .$$

۱-۱-۱۲ تعریف: رادیکال یک جبر باناخ جابجایی، اشتراک ایده آلهای ماکسیمال آن است. رادیکال جبر باناخ A را با نماد $\mathrm{rad(A)}$ نمایش میدهیم.

۱-۱-۱۳ تعریف: فضای A نیم ساده است هرگاه $\mathrm{rad(A)} = \{0\}$.

[1]-Conway

۱–۱–۱٤ **قضیه:** در یک فضای با ناخ $\sum x_n$ همگراست هرگاه $\sum\|x_n\|$ همگرا باشد.

اثبات: فرض کنید $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $\varepsilon > 0$ خواهیم داشت:

$$\|S_n - S_m\| = \|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\| \leq \sum_{k=m+1}^{n}\|x_k\| < \varepsilon \ .$$

۱–۱–۱۵ **قضیه:** فرض کنید A یک جبر باناخ یکدار و $x \in A$ بطوریکه $\|x\| < 1$، دراین صورت

$1\text{-}x$ وارون پذیر است و

$$(1-x)^{-1} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} x^{\mathrm{k}} \quad .$$

اثبات: فرض کنید $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$, $\|x\| = r < 1$

بنابراین برای $m > n$ داریم:

$$\|S_n - S_m\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{m} x^k\right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x^k\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x \quad \|^k < \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

بنابراین وقتی $\mathrm{n} \to \infty$ داریم که $\|\mathrm{S_n} - \mathrm{S_m}\| \to 0$ پس $\{\mathrm{S_n}\}$ یک دنباله کوشی در جبر باناخ A است و چون هر دنباله کوشی در فضای باناخ A همگرا است بنابراین دنباله $\{\mathrm{S_n}\}$ همگرا به عضوی مانند

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

است.از طرفی برای هر n،

$$xS_n = S_{n+1} - 1$$

بنابراین وقتی که $n \to \infty$،

$$xa = a - 1 => a(1-x) = (1-x)a = 1 \ . \blacksquare$$

و به همین ترتیب می توان ثابت کردکه($\|x\| < 1$)$x + 1$نیز وارون پذیر است و

$$(1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k.$$

۱-۱-۱٦ نتیجه: اشتراک هر ایده آل حقیقی یک جبر باناخ یکدار جابجایی A باگوی باز به مرکز "۱" و شعاع "۱"، تهی است. بنابراین هر ایده آل ماکسیمالA بسته است به ویژه $rad(A)$ بسته است. بنابراین$\frac{A}{rad(A)}$ یک جبر باناخ نیم ساده است.

اثبات: فرض می کنیمL یک ایده آل ماکسیمالA باشدآنگاهL شامل هیچ عضو وارون پذیری نیست. زیرااگر $a \in L$ وارون پذیر باشدآنگاه a^{-1}عضوی از A است. ودر نتیجه: $1 \in L$. پس $L = A$ و این تناقض است با اینکه L یک ایده آل ماکسیمال است.

بنابراین طبق قضیه قبل اشتراک L باگوی باز به مرکز "۱" و شعاع "۱"، تهی است.

چون A یک جبر باناخ است و L یک ایده آل ماکسیمال از A است پس $\bar{L}$ نیزیک ایده آل حقیقیA است (چون اگر $\bar{L} = A$ آنگاه $1 \in \bar{L}$ و در نتیجه $\{x_n\} \subseteq L$ موجود است که $\|x_n - 1\| < 1$ و بنابراین x_n وارون پذیراست ودرنتیجه $L = A$).

همچنین داریم که $L \subseteq \bar{L}$ وچون L یک ایده آل ماکسیمال است، نتیجه می دهد که $L = \bar{L}$. پس L بسته است و چون $rad(A)$ اشتراک ایده آل های ماکسیمال A است، پس $rad(A)$ نیز بسته است و همچنین داریم که A یک جبر باناخ جابجایی است و $rad(A)$ یک ایده آل بسته از A است بنابراین $\frac{A}{rad(A)}$ یک جبرباناخ جابجایی است و $rad\left(\frac{A}{rad(A)}\right) = \{0\}$. پس این جبر نیم ساده هم می باشد. ■

۱-۱-۱۷ نکته: ازاین قسمت به بعد منظور از A یک جبرباناخ یکدار است.

۱-۱-۱۸تعریف: طیف عنصر $x \in A$ رامجموعه تمام اعداد مختلطλ درنظرمی گیریم که $x - 1 \cdot \lambda$ وارون پذیر نباشد. طیف x را با $\sigma(x)$ نشان می دهیم.

۱-۱-۱۹ تعریف: شعاع کوچکترین قرص بسته ای به مرکز مبدا که شامل $\sigma(x)$ می باشد شعاع طیفی نامیده می شود که گاهی این عدد را نرم طیفی x نیز می نامند و با $\rho(x)$ نمایش می دهند.در واقع

$$\rho(x) = sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$$

۱-۱-۲۰ نتیجه: به ازای هر $x \in A$ اگر $\lambda \in \sigma(x)$ آنگاه

$$|\lambda| \leq \|x\|$$

اثبات: فرض کنید G مجموعه تمام عناصر وارون پذیر جبرباناخ مختلط A باشد، اگر $\lambda \in \sigma\ (x)$ و

$\|x\| < |\lambda|$ آنگاه چون $\left\|\frac{x}{\lambda}\right\| < 1$ بنابر قضیه ۱-۱-۱۵،

$$1 - \lambda^{-1} x \epsilon G\ .$$

وهمین امر برای

$$x - \lambda \cdot 1 = -\lambda(1 - \lambda^{-1} x)$$

درست است. لذا $\lambda \notin \sigma(x)$ و این تناقض با فرض است.■

۱-۱-۲۱ تبصره: برای هر $x \in A$ ، $\sigma(x)$ فشرده و ناتهی است.(رودین، ۱۹۷٤)

۱-۱-۲۲تعریف: عنصر $a \epsilon A$ شبه پوچتوان نامیده می شود اگر $\rho(a) = 0$.

۱-۲ تابعک‌های خطی ضربی

۱-۲-۱ تعریف: اگر A و B دو جبر مختلط باشند نگاشت خطی $\varphi : A \rightarrow B$ خطی ضربی است اگر به ازای هر $x, y \in A$

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$