دانشگاه مازندران

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

رشته ریاضی (گرایش آنالیز)

عنوان:

تبدیلات ویل و کاربرد آن در حل یک معادله دیفرانسیل جزئی تباهیده بیضوی

استاد راهنما:

دکتر محسن علیمحمدی

استاد مشاور:

دکتر مهدی روحی

نگارش :

سمانه ولیپور خنکداری

شهریور ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به:

مادر مهربانم

پدر دلسوزم

همسر عزیزم

خواهر صبورم (روحش شاد)

تشکر و قدردانی

خداوند عزیز و مهربانم را سپاس می‌گویم. او که در تمام تنهایی‌ها یار و یاور من بود و حتی لحظه‌ای مرا از دریای رحمتش بی‌نصیب نگذاشت. آنکه هر گاه به خود می آیم و اندکی به فکر فرو می‌روم، می‌بینم که هر آنچه که خیر و صلاح من بود، در زندگی پیش رویم گذاشت، حتی اگر تلخ، حتی اگر دشوار، ولی همه سرشار از حلاوت حکمت، همه زیبا و سرشار محبت ...

بر خود لازم می‌دانم که از زحمات و همراهی دلسوزانه و بی‌دریغ استاد گرانقدر جناب آقای دکتر علیمحمدی که در کلیه مراحل تحصیل با صبر و تحمل فراوان مرا یاری و مساعدت فرمودند، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. از استاد بزرگوار، جناب آقای دکتر روحی که با مشورت های فاضلانه خویش یاوری بی ریا بوده، نهایت تقدیر را دارم.

همچنین از جناب آقایان دکتر علیزاده و دکتر نعمتی که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند، کمال تشکر را دارم.

در پایان نیز از همه عزیزانی که به هر نحو در این امر مرا یاری نموده اند صمیمانه تشکر می‌نمایم.

فهرست مندرجات

پیشگفتار

عملگرهای شبه دیفرانسیل، تعمیمی از عملگرهای دیفرانسیل هستند. مطالعه عملگرهای شبه دیفرانسیل در سال ۱۹۶۰ پدیدار شد. ریشه مطالعه این عملگرها در مطالعه عملگرهای دیفرانسیل انتگرالی است. اولین بار اصطلاح عملگر شبه دیفرانسیل در مقاله‌ای در سال ۱۹۶۵ بیان شده است [۴]. مقالات متعددی درباره کاربردهای عملگرهای شبه دیفرانسیل ارائه گردیده است که از جمله در تجزیه و تحلیل مدرن فیزیک ریاضی پر کاربرد هستند. این عملگرها اهمیت ویژه‌ای در مطالعه معادلات بیضوی و نظریه شاخص برای عملگرهای بیضوی دارند. عملگر شبه دیفرانسیل می‌تواند با ارائه فرمول‌های ساده تر و شفاف تر به ایجاد نظریه‌های جدید بپردازد. در فیزیک نظری تبدیلات ویل بعد از هرمان ویل نامگذاری شد. این پایان نامه بر اساس مقالات Wong ، Boggiatto و Grossmann است.

چکیــده

در این پایان نامه می‌خواهیم فرمول هسته حرارت یک عملگر مشتق جزئی بیضوی منحط L به صورت

$$L = -\frac{۱}{۲}(Z\bar{Z} + \bar{Z}Z)$$

را با استفاده از عملگرهای شبه دیفرانسیل بیان کنیم. با محاسبه و بکارگیری وارون L می‌توان جواب معادله مشتق جزئی $Lu = f$ را به دست آورد.

برای این منظور، ابتدا عملگرهای شبه دیفرانسیل

$$Au(x) = \int\int e^{i(x-y).\xi} a(x, y, \xi) u(y) dy d\xi$$

را معرفی می کنیم که در آن $a(x, y, \xi)$ به عنوان نماد این عملگر شناخته می‌شود. در ادامه ترکیب دو عملگر شبه دیفرانسیل بیان می‌شود.

در مرحله بعد تبدیل ویل را با استفاده از گروه هایزنبرگ محاسبه می‌نماییم. در ادامه فرمول هسته حرارت با استفاده از عملگرهای شبه دیفرانسیل از نوع ویل، یعنی تبدیلات ویل و تبدیل فوریه—وینر از توابع هرمیت، که به صورت پایه های متعامد $L^۲(R^۲)$ هستند، به دست می آید.

در انتها تبدیل وینر را به صورت جامع تر بیان می‌کنیم.

واژه های کلیدی :

عملگرهای شبه دیفرانسیل، تبدیل ویل، عملگر بیضوی منحط، تبدیل فوریه.

فصل ۱

تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا مفاهیم پایه مورد نیاز را بیان نموده، به معرفی فضاهای L^p، شوارتز و کلاس S^m می‌پردازیم. در ادامه تعاریفی از توزیع ها، عملگرهای شبه دیفرانسیل و نماد آن، انتگرال نوسانی، تبدیل فوریه و قضایای مرتبط با آن، عملگر بیضوی و پارابیضوی را ارائه می‌دهیم. در انتها ترکیب دو عملگر شبه دیفرانسیل را بیان می‌کنیم.

۲.۱ مفاهیم مقدماتی

۱.۲.۱ تعریف

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ را یک دامنه (باز و همبند) در نظر می‌گیریم، مجموعه همه توابع پیوسته روی $\Omega \subseteq R^n$ را با $C(\Omega)$ نشان می‌دهیم. برای $k \in N$، $C^k(\Omega)$ نشان دهنده توابعی هستند که همه مشتقات تا مرتبه $k-$ام آنها روی Ω پیوسته است. $C^\infty(\Omega)$ کلاس همه توابعی است که برای هر عدد طبیعی k، متعلق به $C^k(\Omega)$ باشد. فضای خطی از تمام توابع کراندار k بار مشتق پذیر روی Ω را با $C_b^k(\Omega)$ نشان می دهیم واضح است که $C_b^k(\Omega) \subseteq C_b(\Omega)$.

۲.۲.۱ تعریف (اندیس چند گانه)[۱۳]

اندیس چندگانه، یک n تایی $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ است که هر کدام از α_j ها، اعداد صحیح نامنفی هستند. تک جمله ای $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ را با x^α نشان می دهیم که دارای درجه $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ است، به طور مشابه اگر $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ برای $1 \leq j \leq n$ و $u : \Omega \subseteq R^n \longrightarrow R$ و $x = (x_1, \dots, x_n)$ در Ω باشد:

$$D^\alpha u = (D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n})(u) = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

که نشان دهنده عملگر دیفرانسیل پذیر از مرتبه $|\alpha|$ است. در ضمن $D^{(0,\dots,0)} u = u$.

۳.۲.۱ تعریف (فضای شوارتز $(S(R^n)$)[۱۳]

گوییم $f \in S(R^n)$، هرگاه f بی نهایت بار مشتق پذیر بوده $(f \in C^\infty(R^n))$ و برای هر اندیس چندگانه α, β داشته باشیم:

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x \in R^n} \left| x^\alpha (\partial^\beta f)(x) \right| < \infty \qquad (۱.۲.۱)$$

که در آن، $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$، $\partial = (\partial_1 \dots \partial_n)$ هستند.

۴.۲.۱ گزاره

فضای $S(R^n)$ یک فضای برداری است.

اثبات. اگر $f, g \in S(R^n)$ آنگاه داریم:

$$1)\|f+g\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x\in S(R^n)} |x^\alpha \partial^\beta (f+g)(x)| \le \sup_{x\in S(R^n)} |x^\alpha (\partial^\beta f)(x)| + \sup_{x\in S(R^n)} |x^\alpha (\partial^\beta g)(x)| < \infty,$$

$$\begin{aligned} 2)\|af.g\|_{\alpha,\beta} &:= \sup_{x\in R^n} |x^\alpha \partial^\beta (af.g)(x)| \\ &= \sup_{x\in R^n} |x^\alpha \sum_{\gamma+\delta=\alpha} \frac{\alpha!}{\gamma!\delta!} \left[\partial^\gamma f(x)\right] \left[\partial^\delta g(x)\right] | \\ &\le \sup_{x\in R^n} x^\alpha \sum_{\gamma+\delta=\alpha} \frac{\alpha!}{\gamma!\delta!} | \left[\partial^\gamma f(x)\right] \left[\partial^\delta g(x)\right] | < \infty. \end{aligned}$$

چون f, g در $S(R^n)$ هستند بنابراین قسمت دوم اثبات می‌شود. ■

فضای $S(R^n)$ مجهز به نرمی به صورت زیر می‌باشد

$$|||f|||_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in R^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| \qquad (۲.۲.۱)$$

گاهی عناصر فضای $S(R^n)$ را توابع به سرعت نزولی گویند.

۵.۲.۱ تعریف

برای هر $k, m \in Z_+$ و $f \in S(R^n)$ قرار می‌دهیم

$$\|f\|_{k,m} = \sum_{|\alpha|\le k, |\beta|\le m} |||f|||_{\alpha,\beta}$$

مثال: تابع $\left\{\begin{array}{l} f: R \to R \\ f(x) = e^{-x^{2}} \end{array}\right.$ متعلق به فضای شوارتز است.

۶.۲.۱ تعریف (دنباله همگرا و دنباله کوشی)

گوییم دنباله (f_n) در $S(R^n)$ به f همگراست هرگاه

$$\forall\ \alpha, \beta \in Z_+^n \Longrightarrow \|f_n - f\|_{\alpha,\beta} \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty$$

همچنین دنباله (f_n) در این فضا کشی است هرگاه

$$\forall\ \alpha, \beta \in Z_+^n \Longrightarrow \|f_n - f_m\|_{\alpha,\beta} \longrightarrow 0, \qquad n, m \to \infty$$

$S(R^n)$ با نرم ذکر شده در فرمول (۲.۲.۱) کامل است.[۱۲]

۷.۲.۱ تعریف

الف) به نگاشت $u : S(R^n) \longrightarrow \mathrm{C}$ تابعی مختلط در $S(R^n)$ گفته می‌شود. مقدار تابع u روی $f \in S(R^1)$ توسط $\langle u, f\rangle$ نشان داده می‌شود گوییم u خطی است اگر

$$\langle u, c_1 f + c_2 g\rangle = c_1\langle u, f\rangle + c_2\langle u, g\rangle, \qquad \forall\ f, g \in S(R^n), \quad \forall\ c_1, c_2 \in C^1$$

و u پیوسته است اگر $\langle u, f\rangle \longrightarrow \langle u, f_k\rangle$ هرگاه، $f_k \longrightarrow f$.

ب) تمام تابعک های خطی پیوسته روی فضای نرمدار را دوگان آن فضا گویند.

دوگان یک فضا همیشه کامل است.[۲۴]

۳.۱ توزیع

۱.۳.۱ تعریف (توزیع پیوسته)

به تابع خطی پیوسته در $S(R^n)$ توزیع پیوسته گفته می‌شود و آن را با $S'(R^n)$ نشان می دهیم.

اگر u, v توزیع پیوسته باشند و $c_1, c_2 \in C^1$، توزیع $c_1 u + c_2 v$ را به وسیله

$$\langle c_1 u + c_2 v, f\rangle = c_1\langle u, \varphi\rangle + c_2\langle v, f\rangle, \qquad \forall\ f \in S(R^n)$$

تعریف می‌کنیم، پس مجموعه‌ای از توزیع های پیوسته، فضایی خطی است. $S'(R^n)$ دوگان فضای شوارتز است.

۲.۳.۱ مثال ($\delta-$ تابع)

فرض می کنیم $x \in R^n$ نقطه‌ای ثابت باشد توزیع پیوسته δ_x به صورت ذیل تعریف می شود

$$\langle \delta_x, f\rangle = f(x), \qquad \forall\ f \in S(R^n),$$

که $\delta-$ تابع در نقطه x نامیده می‌شود.

۳.۳.۱ تعریف

فرض کنیم h تابعی بی نهایت هموار در R^n $(h \in C^\infty(R^n))$ چند جمله‌ای کراندار با تمام مشتقاتش است، اگر $u \in S'(R^n)$ پس hu توزیع است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\langle hu, f\rangle := \langle u, hf\rangle, \qquad \forall\ f \in S(R^n).$$

دو توزیع می‌توانند روی یک مجموعه باز منطبق باشند.[۷]

۴.۳.۱ تعریف

اگر $u \in S'(R^n)$ و α اندیس چندگانه باشد پس $\partial_x^\alpha u$ توزیع است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\langle \partial_x^\alpha u, f\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial_x^\alpha f\rangle, \qquad \forall\ f \in S(R^n).$$

۵.۳.۱ قضیه [۱۲]

اگر $u \in S'(R^n)$ باشد، آنگاه ثابت مثبت C و عدد صحیح مثبت m وجود دارد به طوریکه

$$|\langle u, f\rangle| \leq C \sum_{|\alpha+\beta|} \|f\|_{\alpha,\beta}, \qquad \forall\ f \in S(R^n).$$

٦.۳.۱ قضیه [۱۸]

تابع خطی T در $S(R^n)$ توزیع پیوسته است اگر وفقط اگر $C > 0$ وجود داشته باشد به طوریکه برای هر $k, m \in Z_+$

$$|T(f)| \leq C\|f\|_{k,m}, \qquad \forall\ f \in S(R^n).$$

۷.۳.۱ تعریف (تابع اندازه پذیر)

الف) گردایه‌ی $(\mathcal{M})$ از زیر مجموعه‌های مجموعه X را یک $\sigma-$ جبر در X نامیم، هرگاه $(\mathcal{M})$ از خواص ذیل بهره مند باشد:

(یک) $X \in (\mathcal{M})$،

(دو) هرگاه $A \in (\mathcal{M})$ آنگاه $A^c \in (\mathcal{M})$ (A^c متمم A نسبت به X است).

(سه) هرگاه $A_۱, A_۲, A_۳, \ldots \in (\mathcal{M})$، آنگاه $\cup_{n=۱}^{\infty} A_n \in (\mathcal{M})$.

ب) فرض کنیم هرگاه X یک فضای اندازه پذیر، Y یک فضای توپولوژیک و f نگاشتی از X به Y باشد. گوییم f اندازه پذیر است اگر به ازای هر مجموعه باز V در Y، $f^{-۱}(V)$ یک مجموعه اندازه پذیر در X باشد.

۸.۳.۱ گزاره [۱۸]

فرض کنیم $g \in L^۲(R^n)$ باشد آنگاه نگاشت خطی

$$T_g : f \mapsto \int g(x)f(x)dx$$

در $S(R^n)$ توزیع پیوسته است.

اثبات. برای هر $f \in S(R^n)$ داریم، $|T_g(f)| = |\int g(x)f(x)dx| \leq \|g\|_{L^۲}\|f\|_{L^۲}$ اما

$$\begin{aligned}
\|f\|^۲_{L^۲(R^n)} &= \int |f(x)||f(x)|dx \\
&= \|f\|_{۰,۰} \int |f(x)|dx \\
&= \|f\|_{۰,۰} \int (\prod_{j=۱}^{d}(۱ + x_j^۲))|f(x)| \frac{۱}{\prod_{k=۱}^{d}(۱ + x_k^۲)} dx \\
&\leq \|f\|_{۰,۰}\|f\|_{۲d,۰} \int \frac{۱}{\prod_{k=۱}^{d}(۱ + x_k^۲)} dx_۱ dx_۲ \ldots dx_d \\
&= \pi^d \|f\|_{۰,۰}\|f\|_{۲d,۰} \leq \pi^d \|f\|^۲_{۲d,۰}.
\end{aligned}$$

از رابطه بالا نتیجه می شود

$$|T_g(f)| = \left| \int g(x)f(x)dx \right| \leq \|g\|_{L^۲} \pi^{\frac{d}{۲}} \|f\|_{۲d,۰}$$

که نشان می دهد $T \in S'(R^n)$. ■

۹.۳.۱ قضیه (انتگرال بخش اصلی کوشی) [۱۸]

تابع

$$P(\frac{1}{x}) : f \mapsto \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{1}{x} f(x) dx$$

توزیع پیوسته است.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که $P(\frac{1}{x})$ در $S(R^n)$ خوش تعریف است. برای هر $f \in S(R)$

$$\int_{|x| \geq \epsilon} \frac{1}{x} f(x) dx = \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{f(x) - f(-x)}{x} dx$$

به هر حال، وقتی $x \to 0$ ، $\frac{f(x)-f(-x)}{x} \to 2f'(0)$ و بنابراین $\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ در بازه $[0, \infty)$ انتگرال پذیر است و $P(\frac{1}{x})$ خوش تعریف است. $P(\frac{1}{x})$ خطی است و باید بررسی کنیم که در $S(R)$ پیوسته است. برای انجام این کار،

$$\begin{aligned}\Big|\frac{f(x) - f(-x)}{x}\Big| &= \Big|\frac{1}{x} \int_{-x}^{x} f'(t) dt\Big| \\ &\leq \frac{1}{x} \int_{-x}^{x} |f'(t)| dt \leq 2\|f'\|_{\infty}\end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}\Big|p(\frac{1}{x})\Big| &= \Big|\int_0^1 \frac{f(x) - f(-x)}{x} dx + \int_1^{\infty} \frac{f(x) - f(-x)}{x} dx\Big| \\ &\leq \int_0^1 2\|f'\|_{\infty} dx + \int_1^{\infty} \{|f(x)| + |f(-x)|\} x \frac{dx}{x^2} \\ &\leq 2\|f'\|_{\infty} + 2\|xf(x)\|_{\infty} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \\ &\leq 2|||f|||_{0,1} + 2|||xf(x)|||_{1,0}\end{aligned}$$

■

۱۰.۳.۱ تعریف (فضای $L^p(\Omega)$)

فرض کنید Ω یک دامنه کراندار در R^n و p یک عدد حقیقی مثبت باشد و همچنین u یک تابع اندازه پذیر و تعریف شده روی Ω باشد. تعریف می‌کنیم

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

در این صورت $L^p(\Omega)$ متشکل از همه u هایی است که برای آنها داشته باشیم:

$$\|u\|_p < \infty.$$

$\|u\|_p$ را نرم L^p تابع u می‌نامیم. در $L^p(\Omega)$ توابعی را یکی می‌گیریم که به طور تقریباً همه جا، با هم برابر باشند، یعنی اندازه مجموعه نقاطی که در آن‌ها این توابع با هم برابر نیستند، برابر صفر باشد. گوییم $u = ۰$ در $L^p(\Omega)$ اگر $u(x) = ۰$ به طور تقریباً همه جا در Ω.

به وضوح اگر $u \in L^p(\Omega)$ و $c \in R$ آنگاه $cu \in L^p(\Omega)$. به علاوه اگر $u, v \in L^p(\Omega)$ آنگاه داریم:

$$|u(x) + v(x)|^p \leq (|u(x)| + |v(x)|)^p \leq ۲^p \left(|u(x)|^p + |v(x)|^p \right)$$

پس $u + v \in L^p(\Omega)$، بنابراین $L^p(\Omega)$ یک فضای برداری است.

۴.۱ عملگرها

۱.۴.۱ تعریف (عملگر خطی)

بررسی نگاشتهای بین فضای توابع بسیار با اهمیت است. دسته مهم این نگاشتها، نگاشتهایی هستند که بین فضاهای برداری تعریف می‌شوند. فرض کنید X و Y فضاهای برداری باشند، نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ عملگر خطی نامیده می شود هرگاه

$$T(\lambda_۱ x_۱ + \lambda_۲ x_۲) = \lambda_۱ T(x_۱) + \lambda_۲ T(x_۲) \qquad (\forall\ \lambda_i \in R,\ \ x_i \in X\ ;\ \ i = ۱, ۲).$$

بعلاوه اگر X و Y دارای نرم $\|.\|_X$ و $\|.\|_Y$ باشند می‌توان مفهوم کرانداری عملگرهای خطی را تعریف کرد.

گوییم عملگر خطی T کراندار است، هرگاه ثابت M ای وجود داشته باشد به طوریکه

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X \qquad (\forall\ x \in X),$$

بعبارتی اگر A در X کراندار باشد، آنگاه $T(A)$ در Y کراندار است. نرم عملگر T به صورت زیر تعریف می شود[۹]

$$\|T\| = \sup_{x \neq ۰} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

۲.۴.۱ عملگر مشتق جزئی

عملگر مشتق جزئی خطی از مرتبه m روی R^n یک نگاشت است از $C^k(R^n)$ به $C^{k-m}(R^n)$ که برای $m < k$ به شکل

$$Du(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} f_\alpha(x) D_x^\alpha u(x), \qquad f_\alpha \in C^\infty(R^n)$$

تعریف می‌شود.

۳.۴.۱ تعریف

محمل یک تابع پیوسته f روی R^n به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$supp\ f = \{\overline{x \in R^n : f(x) \neq ۰}\} = K$$

یعنی برای هر $x \in R^n$، اگر $x \notin K$، آنگاه $f(x) = ۰$. همانطور که می‌دانیم (طبق قضیه هاینه—برل) مجموعه‌های بسته و کراندار در R^n فشرده می‌باشند، بنابراین اگر محمل f کراندار باشد می‌گوییم f

دارای محمل فشرده است. فضای همه توابع پیوسته f که محمل فشرده دارند را با $C_\circ(R^n)$ نمایش می‌دهیم. به طور مشابه $C_\circ(\Omega)$ نشان دهنده توابع پیوسته روی Ω می‌باشد که محمل آنها یک زیر مجموعه فشرده از Ω است. همچنین $C_\circ^k(\Omega)$ نشان دهنده توابع k بار مشتق پذیر با محمل فشرده می‌باشد.

۴.۴.۱ تعریف

الف) اگر u در R^n تعریف شده و مشتقات جزئی آن موجود باشد آنگاه گرادیان u در $x=(x_۱,\cdots,x_n)$ برداری است در R^n که به صورت زیر تعریف می شود

$$\nabla u = grad\ u = (\frac{\partial u}{\partial x_۱},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}).$$

ب) اگر u یک تابع تعریف شده در $\Omega \subseteq R^n$ بوده و $u \in C^۲(\Omega)$ ، آنگاه لاپلاسین u در $x=(x_۱,\cdots,x_n)$ که آن را با نماد Δu نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta u = \sum_{i=۱}^{n} D_{ii}u = div(\nabla u) = \frac{\partial^۲ u}{\partial x_۱^۲}+\cdots+\frac{\partial^۲ u}{\partial x_n^۲}$$

که در آن $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = \partial_i u$ و همچنین $D_{ij}u = \frac{\partial^۲ u}{\partial x_i \partial x_j} = \partial_i\partial_j u$.

به وضوح از تعریف مشخص است که Δ یک عملگر خطی است، یعنی به ازای هر دو ثابت دلخواه a,b و توابع u,v که در $\Omega \subseteq R^n$ تعریف شده باشند، داریم :

$$\Delta(au+bv) = a\Delta u + b\Delta v.$$

که α یک اندیس چندگانه است، $|\alpha| = \sum_{j=۱}^{n}\alpha_j$ و $D^\alpha = D^{\alpha_۱}\dots D^{\alpha_n}$ می‌باشد.

۵.۴.۱ تعریف (انتگرال نوسانی)

انتگرال بصورت

$$I_\phi(x,y) = (۲\pi)^{-n}\int e^{i\phi(x,y,\xi)}a(x,y,\xi)d\xi \qquad (۱.۴.۱)$$