بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی

دانشکده علوم پایه

گروه علمی ریاضی

عنوان پایان نامه :

فضاهایی که شامل عملگرهایی ابردوری با الحاق ابردوری هستند

استاد راهنما:

دکتر بهمن یوسفی

استاد مشاور:

دکتر غلامعلی میرزاکریمی

نگارش:

خورشید اندشت

شهریور 1387

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان فضاهایی که شامل عملگرهای ابردوری با الحاق ابردوری هستند که توسط خورشید اندشت   درمرکز شیراز   تهیه و به هیات داوران ارائه گردیده است مورد تایید می باشد تاریخ دفاع : 87/6/2   نمره 18/25   درجه ارزشیابی : عالی

اعضای هیات داوران:

نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه علمی	امضاء
1- دکتربهمن یوسفی	استاد راهنما	استاد	
2- دکترغلامعلی میرزاکریمی	استاد مشاور	استادیار	
3- دکتراحمد خاکساری	استاد داور	استادیار	
4- دکتر حسین توللی	نماینده تحصیلات تکمیلی	استادیار	

تقدیم به

پدر مهربان و مادر دلسوزم

از زحمات استاد ارجمندم آقای پروفسور بهمن یوسفی که مرا در تهیه این پایان نامه یاری نمودند ،صمیمانه تشکر می نمایم .

همچنین از راهنمائیهای ارزشمند آقایان دکتر غلامعلی میرزاکریمی و دکتر احمد خاکساری سپاسگزارم .

در پایان ، لازم می دانم از پدر و مادر عزیزم و نیز خواهر دلسوزم که عهده دار تایپ این پایان نامه بودند، قدردانی نمایم چرا که این کار را مرهون فداکاری و همکاری صادقانه آنها می دانم.

چکیده :

یک عملگر خطی پیوسته $T : X \to X$ ابردوری است اگر یک $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $orb\{T^n x\}_{n\geq 0}$ در X چگال باشد. هکتر سالاس نشان داد که هر فضای جدا پذیر نامتناهی البعد هیلبرت شامل یک عملگر ابردوری همراه با الحاق ابردوری است. اکنون این سئوال مطرح می شود

که چه فضاهایی دیگری شامل چنین عملگری هستند.این موضوعی است که در فصل آخر این پایان نامه به آن پاسخ خواهیم داد.

در فصل اول، نگاهی کوتاه بر تعاریف و قضایایی داریم که به ما در درک مطالب گفته شده در فصلهای بعدی کمک خواهد نمود.

در فصل2 به بحث و بررسی عملگرهای ابردوری ، شرایط لازم و کافی برای ابردوری بودن عملگرهای انتقال و در فصل 3 نیز به اثبات چند قضیه پیرامون سوپردوری بودن عملگرهای انتقال می پردازیم.

فهرست مطالب

فصل 1

مقـدمـات

در این فصل سعی شده تا تعاریف و قضایای مقدماتی را که بعداً از آنها استفاده خواهیم کرد ، بیان شوند.

تعریف 1 -1 : اگر H یک فضای هیلبرت باشد و $M \subseteq H$. آنگاه تعریف می کنیم:

$$M^{\perp} = \{y \in H: \ <x, y>=0, \forall x \in M\}$$

که یک فضای بسته و ناتهی از H می باشد.

قضیه 1 - 2 : اگر M یک زیر فضای بسته از فضای هیلبرت H باشد و $h \in H$ آنگاه بردار یکتای $p_h \in M$ هست که $h - p_h \in M^{\perp}$. همچنین داریم:

الف)نگاشت $P: H \to M$ با ضابطه $P(h) = P_h$ یک تبدیل خطی است.

ب) به ازای هر $\|p(h)\| \leq \|h\|, h \in H$ و در نتیجه p پیوسته است.

پ) $p^2 = p$.

ت) $Rangp = M, Kerp = M^{\perp}$

تعریف 1 - 3 : اگر M یک زیر فضای بسته خطی از H و P نگاشت خطی تعریف شده در قضیه قبل باشد، آنگاه P را نگاشت تصویر متعامد از H به روی H می نامند.

تعریف 1 - 4 : فرض کنید B یک زیر فضای بسته از فضای هیلبرت X بوده و P تصویر متعامد روی B باشد . در این صورت تراکم[1] T به B به صورت تحدید PTP به B تعریف می شود.

تعریف 1 - 5 : فضای تمام دنباله های $x = \{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ که $\|x\|_p = (\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$ ، یک فضای باناخ است و آنرا با $l^p(Z)$ نشان می دهیم . در حالت خاص $p = 2$، فضای $l^2(Z)$ یک فضای هیلبرت است.

از این به بعد از نماد $B(X)$ برای مجموعه تمام عملگرهای خطی کراندار روی فضای باناخ X استفاده می کنیم.

قرارداد می کنیم که منظور از منیفلد یعنی زیرفضایی که لزوماً بسته نیست.

تعریف 1- 6 : فرض کنید $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ پایه استاندارد برای $l^2(Z)$ باشد. عملگر T که برای هر $n \in Z$ به صورت $Te_n = w_n e_{n+1}$ $(w_n \in C)$تعریف می شود را عملگر انتقال به جلو وزندار دو

---

[1] . Compression

طرفه [1] گویند که در آن دنباله $\{w_n\}$ را دنباله وزنی T می نامند. در ضمن عملگر الحاقی T به صورت $T^*e_n = \overline{w_{n-1}}e_{n-1}$ برای هر $n \in Z$ می باشد.

تعریف 1 -7: فرض کنید $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ پایه استاندارد برای فضای $l^2(Z)$ باشد. عملگر T که برای هر $n \in Z$ به صورت $Te_n = w_n e_{n-1}$ تعریف می شود را عملگر انتقال به عقب وزندار دو طرفه[2] گویند. به سادگی داریم:

$$T^{*n}e_j = (\prod_{s=0}^{n-1} \overline{w_{j+s+1}})e_{j+n}$$

تعریف 1 - 8 : فرض کنید $\{e_n : n \in Z^+\}$ یک پایه استاندارد برای فضای $l^2(Z^+)$ باشد. عملگر T که به صورت $Te_n = w_n e_{n+1}$ تعریف می شود را عملگر انتقال به جلو وزندار یکطرفه[3] گویند. به سادگی رابطه زیر برقرار است:

$$T^n e_j = (\prod_{s=0}^{n-1} w_{j+s})e_{j+n}$$

تعریف 1 - 9 : فرض کنید $\{e_n : n \in Z^+\}$ یک پایه استاندارد برای فضای $l^2(Z^+)$ باشد. عملگر T که به صورت $Te_n = w_n e_{n-1}$ برای هر $n \in N$ و $Te_0 = 0$ تعریف می شود را عملگر انتقال به عقب وزندار یکطرفه[4] نامند و داریم :

$$T^m e_j = \begin{cases} (\prod_{i=j-m+1}^{j} w_i)e_{j-m} & m \le j \\ 0 & m > j \end{cases}$$

گزاره 1 - 10: فرض کنید T یک انتقال وزندار رو به جلو باشد. در این صورت برای هر $n \in N$,

$$\|T^n\| = \operatorname{Sup}_k |w_k . w_{k+1} ... w_{k+n-1}|$$

بنابراین T کراندار است اگر و تنها اگر $\operatorname{Sup}_k |w_k| < \infty$.

تعریف 1- 11 : فرض کنیم X یک فضای جدایی پذیر باناخ باشد و $T \in B(X)$. عملگر T را دوری[5] گوئیم اگر $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که مدار آن یعنی

---

[1] - Bilateral forward weighted shift
[2]- Bilateral backward weighted shift
[3]- Unilateral forward weighted shift
[4]- Unilateral backward weighted shift
[5]- Cyclic

$orb(T,x)=\{x, Tx, T^2x,...\}$ یک منیفلد خطی چگال تولید کند و بردار x نظیر را بردار دوری گوئیم. یعنی ،

$$\overline{Span\ (orb(T,x))}=X$$

به عبارت دیگر x بردار دوری برای T است هرگاه داشته باشیم:

$$X=\vee\{T^n x : n\in N\cup\{0\}\}$$

جایی که $\vee\{.\}$ بیانگر بستار ترکیبات خطی متناهی مجموعه $\{.\}$ می باشد.

تعریف 1 - 12 : فرض کنیم X یک فضای جدایی پذیر باناخ باشد و $T\in B(X)$. اگر $x\in X$ چنان باشد که $orb(T,x)$ در X چگال باشد، آنگاه T را عملگر ابردوری[1] و بردار x نظیر را بردار ابردوری گوئیم.

تعریف 1 - 13 : فرض کنیم X یک فضای جدایی پذیر باناخ باشد و $T\in B(X)$. در این صورت T را ابردوری چندگانه[2] نامیم هرگاه $\{x_1, x_2,...x_n\}\subseteq X$ وجود داشته باشد به طوریکه $\bigcup_{i=1}^{n} orb(T,x_i)$ در X چگال باشد.

تعریف 1 - 14: فرض کنید X یک فضای جدایی پذیر باناخ و $T\in B(X)$ باشد. در این صورت عملگر T را سوپردوری[3] گوییم هرگاه $x\in X$ وجود داشته باشد به طوری که $\{\lambda T^n x : n\geq 0, \lambda\in C\}$ در X چگال باشد.

تعریف 1 - 15 : فرض کنیم X یک فضای باناخ، $T\in B(X)$ و $\{m_k\}_k$ دنباله ای از اعداد صحیح نامنفی باشد. T را عملگر ابردورری موروثی[4] نسبت به دنباله $\{m_k\}_k$ گوئیم هرگاه برای هر زیر دنباله $\{m_{k_j}\}_j$ از $\{m_k\}_k$، دنباله $\{T^{m_{k_j}}\}_{j\geq 1}$ ابردوری باشد. T را عملگر ابردوری موروثی می نامند هرگاه دنباله $\{m_k\}_k$ وجود داشته باشد که T نسبت به دنباله $\{m_k\}_k$ ابردوری موروثی است.

تعریف 1 -16 : (محک ابردوری[5])

---

[1]- Hypercyclic
[2]- Multi-hypercyclic
[3]- Supercyclic
[4]- Hereditarily hypercyclic
[5]- Hypercyclic Criterion

فرض کنیم X یک فضای باناخ بوده و $T \in B(X)$. گوئیم عملگر T در محک ابردوری صدق می کند هرگاه دنباله صعودی اکید $\{n_k\}_k \subseteq N$ موجود باشد به طوری که :

1)زیر مجموعه چگال X_0 از X موجود باشد که برای هر $x \in X_0$ داشته باشیم :

$$T^{n_k} x \to 0$$

2) زیر مجموعه چگال Y_0 از X و دنباله $\left\{S_{n_k} : Y_0 \to X\right\}$از نگاشت ها موجود باشند بـه طـوری که :

الف) $(\forall y \in Y_0) S_{n_k} y \to 0$

ب) $(\forall y \in Y_0) T^{n_k} S_{n_k} y \to y$

تعریف1 - 17 : فرض کنیم $T \in B(X)$. در این صورت مجموعـه $\bigcup_{n \geq 1} \ker(T^n)$ را هسـته تعمـیم یافته T نامند .

لم 1- 18 : عملگر T ابردوری است اگـر و تنهـا اگـر $\{(x, T^n x) : x \in X, n \in N\}$در $X \times X$ چگـال باشد. به علاوه اگر T ابردوری باشد، مجموعه بردارهای ابردوری T یک زیر مجموعه چگـال G_δ از X است.

نتیجه 1- 19 : برای عملگر $T \in B(X)$ گزاره های زیر معادلند:

الف) عملگر T ابردوری است .

ب)برای هر دو زیر مجموعه باز و ناتهی U و V در X، عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که

$$T^n(U) \cap V \neq \varphi$$

نتیجه 1- 20 : فرض کنید $T \in B(X)$. اگر T در محک ابردوری صدق کند، آنگاه T ابردوری است.

قضیه 1- 21:(محک سوپردوری[1])

فرض کنید X یک فضای جدا پذیر باناخ باشد و $T \in B(X)$. گوئیم عملگر T در محک سوپردوری صدق می کند هرگاه دو زیر مجموعه چگال Y و Z در X و یک دنبالـه $\{n_k\}_k$ از اعـداد صـحیح مثبت موجود باشد بطوریکه :

الف) برای هر $z \in Z$ داشته باشیم :

$$T^{n_k} S_{n_k} z \to z$$

ب) برای هر $y \in Y$ و $z \in Z$ داشته باشیم :

---

[1]- Supercyclic Criterion

$$\left\|T^{n_k}y\right\| \left\|S_{n_k}z\right\| \to 0$$

آنگاه T سوپردوری است.

قضیه 1- 22 : فرض کنید T یک انتقال وزندار یکطرفه روبه عقب با وزن مثبت به صورت $Te_i = w_i e_{i-1}$ برای $i \geq 1$ باشد و $Te_0 = 0$ ، آنگاه $I + T$ نیز ابردوری است.

تعریف 1- 23 : دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در فضای باناخ X، یک پایه شاذر[1] از X نامیده می شود هرگاه برای هر $x \in X$ ، یک دنباله یکتایی از اسکالرهای $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود داشته باشد به طوریکه $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$.

تعریف 1- 24 : دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ که طبق تعریف (1- 23) یک پایه شاذر از X را تشکیل دهد دنباله اساسی [2] نامیده می شود.

قضیه 1-25 : فرض کنید $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از بردارها در X باشد . آنگاه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایه شادر از X است اگر و تنها اگر سه شرط زیر را دارا باشد:

1)برای همه n ها، $x_n \neq 0$.

2)یک ثابت k وجود دارد به طوری که برای هر انتخاب از اسکالرهای $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ و اعداد صحیح $n < m$، داریم:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq k \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|.$$

3) ترکیب خطی بسته از $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ همه X را تشکیل می دهد.

تعریف 1 -26 : یک پایه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ را نرمال شده[3] گوئیم هرگاه برای هر n، $\|x_n\| = 1$ باشد.

تعریف 1- 27 : یک پایه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از فضای باناخ X را متقارن[4] گوئیم هرگاه برای هر جایگشت π از اعداد صحیح، $\left\{x_{\pi(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ با $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ معادل باشد.

قضیه 1- 28: فرض کنید X یک فضای باناخ با یک پایه شادر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ باشد.

تصاویر $P_n : X \to X$ با تعریف $P_n(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$، عملگرهای خطی کراندار هستند و $\sup_n \|P_n\| < \infty$.

---

[1]- Schauder
[2]- Basic sequence
[3]- Normalized
[4]- Symmetric

تصاویر $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ تصاویر طبیعی نسبت به $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ و اعداد $\sup_n \|P_n\|$ ثابت های پایه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ نامیده می شوند.

تعریف 1- 29 : فرض کنید X یک فضای باناخ با یک پایه شادر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ باشد. برای هر عدد صحیح n، تابعک خطی x_n^* روی X با تعریف $x_n^*(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i) = a_n$ یک تابعک خطی کراندار است (طبق قضیه 1- 28) این تابعک $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ ، که با رابطه $x_n^*(x_m) = \delta_n^m$ مشخص شده اند ، تابعک های دو متعامد[1] شرکت پذیر نسبت به $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ نامیده می شوند.

تعریف 1 - 30: یک پایه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ را انقباض پذیر[2] نامند هر گاه، برای هر $x^* \in X^*$ ، نرم از $x^*\big|_{[x_i]_{i=n}^{\infty}}$ (یعنی تحدید X^* به ترکیبات خطی بسته از $\{x_i\}_{i=n}^{\infty}$) زمانی که n به بی نهایت میل می کند ، به صفر میل کند. به عبارت دیگر :

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x^*|_{[x_i]_{i=n}^{\infty}} \right\| = 0.$$

قضیه 1- 31 : فرض کنید $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایه شادر از فضای باناخ X باشد. تابعک های دومتعامد $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایه از X^* را تشکیل می دهند اگر و تنها اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ پایه ای انقباض پذیر باشد.

قضیه 1- 32 : فرض کنید $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از بردارها در فضای باناخ X باشد . آنگاه ، شرایط زیر معادل اند:

1)سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ برای هر جایگشت π از اعداد صحیح، همگراست.

2)سری $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ برای هر انتخاب از $n_1 < n_2 < \dots$ همگراست .

3)سری $\sum_{i=1}^{\infty} \theta_n x_n$ برای هر انتخاب از علائم θ_n (یعنی $\theta_n = \pm 1$) همگراست.

4)برای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد صحیح n ای وجود دارد به طوریکه $\left\|\sum_{i\in\sigma} x_i\right\| < \varepsilon$ برای هر مجموعه متناهی از اعداد صحیح σ که در ویژگی $\min\{i \in \sigma\} > n$ صدق کند.

سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ که در یکی و در نتیجه در همه شرایط بالا صدق کند، همگرای غیر مشروط[3] نامیده می شود.

[1]- Biorthogonal functional
[2]- Shrinking
[3]- Unconditionally convergent

تعریف 1 - 33 : یک پایه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از فضای باناخ X ، غیر مشروط[1] نامیده می شود اگر برای هر $x \in X$ ، بسط آن برحسب پایه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ همگرای غیر مشروط باشد. لازم به ذکر است یک پایه متقارن الزاماً غیر مشروط است.

قضیه 1 - 34 : فرض کنید $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله اساسی غیر مشروط با یک ثابت غیر مشروط k باشد. آنگاه برای هر انتخاب از اسکالرهای $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ به طوری که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ همگرا باشد و هر انتخاب از اسکالرهای کراندار $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$، خواهیم داشت:

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n x_n\right\| \le 2k\sup_n |\lambda_n| \; \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\|.$$

(در حالت حقیقی می توانیم به جای 2K ، K را قرار دهیم) .

برهان: رجوع کنید (به قضیه 1 -3 -7 از [7]).

قضیه 1- 35 : فرض کنید X یک فضای باناخ با یک پایه غیر مشروط $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ باشد. آنگاه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ انقباض پذیر است اگر و تنها اگر X زیر فضای یکریخت به l_1 نداشته باشد.

برهان:رجوع کنید به (قضیه 1- 3- 9 از [7]).

مثال 1-36 : l_1 پایه انقباض پذیر ندارد. زیرا برای داشتن یک پایه انقباض پذیر بایستی طبق قضیه (1- 31) دنباله $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ برای هر $x^* \in X^*$، یک پایه از X^* را تشکیل دهد و باز طبق قضیه (1 - 25) ، بایستی ترکیب خطی بسته از $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ ، همه X^*را تشکیل دهد و این وقتی اتفاق می افتد که X^* جداپذیر باشد. بنابراین برای $X = l_1$ یا $X = C(0,1)$ این اتفاق نمی افتد چون همانطور که می دانیم دوگان l_1^* با l_∞ یکریخت است و l_∞ جدا پذیر نمی باشد .

پایه های واحد متعارف از C_0 و $l_p(1 < p < \infty)$، هردو انقباض پذیر و متقارن هستند.

(نمونه های دیگری از فضاهایی که چنین پایه هایی را می پذیرند ، فضاهای Orliczو Lorentz هستند[7]. در واقع l_p یک فضای Orliczاست.)

تعریف 1- 37 : یک فضای برداری توپولوژیک X، یک فضای فرچت[2] است اگر و تنها اگر در سه شرط زیر صدق نماید:

1) کامل باشد
2) موضعاً محدب باشد.

---
[1]- Unconditional
[2]- Frechet space

3) توپولـوژی آن بتوانـد بوسـیله یـک انتقـال پایـای متریـک القـا شـود یعنـی یـک متریـک $d : X \times X \to R$ به طوری که برای هر $a, x, y \in X$ ، داشته باشیم :

$$d(x, y) = d(x + a, y + a)$$

به طور خلاصه ، فضای فرچت، فضاهای موضعاً محدبی هستند که نسبت به یک انتقال پایای متریـک کامل باشند.

قضیه 1- 38 : هر فضای جداپذیر نامتناهی البعد فرچت، شامل یک عملگر ابردوری پوشا است.

برهان: قضیه (1) از [3] را ببینید.

تعریف 1- 39 : فرض کنید X یک F - فضا (یعنی متریک- خطی – کامل)حقیقـی باشـد. مخـتلط شده (Complexification) Xرا که با $\tilde{X}$ نمایش مـی دهـیم، عبارتسـت از حاصـل ضـرب فضـای حاصل ضربی $X \times X$ در اسکالرهای مختلط. که ضرب اسکالری آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$(a + ib)(x, y) := (ax - by, ay + bx) \qquad ،x, y \in X \quad ، \quad a, b \in R$$

همچنین اگر $T \in L(X)$ ، مختلط شده آن را با $\tilde{T} \in L(\tilde{X})$ نمایش می دهیم که به صورت

$$\tilde{T}(x, y) := (Tx, Ty) \quad ، \quad x, y \in X$$

از این که نگاشت همانی بین $X \times X$ و $\tilde{X}$ یعنی $(i : X \times X \to \tilde{X})$ ،یک همئومورفیسم است و دیاگرام

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{T}} & \tilde{X} \\ \uparrow{\scriptstyle id} & & \uparrow{\scriptstyle id} \\ X \times X & \xrightarrow[T \oplus T]{} & X \times X \end{array}$$

جابجایی است ،از قضیه (2- 1) داریم:

نتیجه 1- 40: فرض کنید $T \in L(X)$ ، به طوری که X یک F - فضای حقیقی باشد. اگـر $\tilde{T} \in L(\tilde{X})$ نمایش مختلط شده T باشد، آنگاه T در محک ابردوری صدق می کند اگر و تنها اگر $\tilde{T}$صـدق کنـد. بعلاوه $\tilde{T}$ در محک ابردوری صدق می کند هرگاه ابردوری باشد.

منظور از نماد $L(X)$، فضای عملگرهای خطی پیوسته روی X می باشد.

تعریف 1 - 41: عملگر کراندار T روی X ، (Fredholm) نامیده می شود اگر برد T بسـته باشـد و همبعد متناهی داشته باشد و هسته T نیز متناهی البعد باشد.

تعریف 1 - 42 : طیف اساسی[1] T را تعریف می کنیم:

$$\sigma_e(T)=\{\lambda\in C:\ T-\lambda,\text{Fredholm نباشد}\}$$

قضیه 1- 43 : فرض کنید T یک عملگر خطی پیوسته روی فضای جدا پذیر مختلط باناخ X باشد. اگر T در محک ابردوری صدق کند، آنگاه گزاره های زیر معادلند:

1)عملگر T یک منیفلد برداری ابردوری نامتناهی البعد بسته دارد.

2) یک زیر فضای بسته نامتناهی البعد X_0 از X و یک دنباله صعودی (n_k) از اعداد صحیح مثبت وجود دارد به طوری که ، برای هر $x\in X_0$ ،

$$T^{n_k}x\to 0$$

3) طیف اساسی T برابر با گوی واحد بسته است.

قضیه 1- 44 : فرض کنید T یک عملگر خطی کراندار روی یک فضای جداپذیر باناخ X باشد. اگر T ابردوری موروثی (در نتیجه ابردوری) باشد، آنگاه T یک زیر فضای ابردوری دارد اگر و تنها اگر طیف اساسی T برابر با گوی واحد بسته باشد.

زیر فضاهای ابردوری ، زیر فضاهای بسته نامتناهی البعدی هستند که بردارهای غیر صفرشان ابردوری باشد.

تعریف 1 - 45: فرض کنید X یک فضای برداری نرم دار و K گوی واحد در X باشد. آنگاه تابعک مینکوفسکی[2] را تعریف می کنیم:

$\rho: X\to R$ به طوریکه برای هر $x\in X$،

$$\rho(x)=\inf\{\lambda>0:\quad x\in\lambda k\}$$

گزاره 1- 46 : یک مجموعه C به طور مطلق محدب[3] است اگر و تنها اگر برای هر نقاط x_1 و x_2 در C و اعداد λ_1 و λ_2 که در شرط $|\lambda_1|+|\lambda_2|\le 1$ صدق می کند، مجموع $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$ متعلق به C باشد.

در واقع، یک زیر مجموعه به طور مطلق محدب A را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i : n\in N, x_i\in A, \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\le 1\right\}$$

1- Essential spectrum
2- Minkowski functional
3- Absolutely convex

فصل 2

عملگرهــا و انتقالهــای وزندار ابــردوری

در این فصل به بررسی عملگرهای ابردوری ، قضایا و شرایط لازم و کافی برای ابردوری بودن عملگرهای انتقال خواهیم پرداخت .

قضیه 2 - 1 : فرض کنید $T \in B(X)$. در این صورت گزاره های زیر معادلند :

1) T در محک ابردوری صدق می کند.

2) T ابردوری موروثی است.

3) $T \oplus T$ ابردوری است .

برهان : $(2 \Leftarrow 1)$: فرض کنید X_0 ، Y_0، $\{n_k\}_k \subseteq N$ و $\{S_{n_k} : Y_0 \to X\}$ مفروضات تعریف (1- 16) باشند. توجه می کنیم که شرط های (1) و (2) از تعریف برای هر زیر دنباله $\{n_{k_j}\}_j$ از $\{n_k\}_k$ نیز صادق است. از این رو کافیست نشان دهیم که $\{T^{n_k}\}_{k\geq 1}$ ابر دوری است (T نسبت به دنباله $\{n_k\}_k$ ابردوری موروثی است.).

حال فرض کنید U و V زیر مجموعه های باز و ناتهی از X باشند. $x \in X_0$ و $y \in Y_0$ و $\varepsilon > 0$ را به گونه ای در نظر می گیریم که $B(x,\varepsilon) \subset U$ و $B(y,2\varepsilon) \subset V$. بنابر فرض (1) و (2) از تعریف (1- 16) ، n_r به دلخواه بزرگ وجود دارد بطوریکه:

$$T^{n_r}x \in B(0,\varepsilon) \quad , \quad , \quad S_{n_r}y \in B(0,\varepsilon) \quad T^{n_r}S_{n_r}y - y \in B(0,\varepsilon)$$

چون $S_{n_r}y \in B(0,\varepsilon)$ ، داریم

$$x + S_{n_r}y \in B(x,\varepsilon) \subset U$$

و بنابراین

$$.\, x + S_{n_r}y \in U$$

همچنین

$$d(T^{n_r}x, 0) < \varepsilon$$

به علاوه

$$d(T^{n_r}S_{n_r}y - y, 0) < \varepsilon$$

پس داریم :

$$d(T^{n_r}x + T^{n_r}S_{n_r}y - y, 0) \le d(T^{n_r}S_{n_r}y + T^{n_r}x - y, T^{n_r}x) + d(T^{n_r}x, 0) < 2\varepsilon$$

بنابراین

$$T^{n_r}(x + S_{n_r}y) \in B(y, 2\varepsilon) \subset V$$

که ایجاب می کند

$$T^{n_r}(x + S_{n_r}y) \in V.$$

در واقع

$$T^{n_r}U \cap V \neq \varphi .$$

بنابراین دنباله $\{T^{n_k}\}_{k\ge 1}$ یک مجموعه G_δ چگال از بردارهای ابردوری دارد و این یعنی که دنباله $\{T^{n_k}\}_{k\ge 1}$ ابردوری است.

$3 \Leftarrow 2$): فرض کنید T نسبت به دنباله $\{n_k\}_k$ ابردوری موروثی باشد و U_i و V_i زیر مجموعه های باز و ناتهی از X باشند $(i=1,2)$. نشان می دهیم که یک عدد صحیح مثبت به دلخواه بزرگ m وجود دارد بطوریکه :

$$T^m U_i \cap V_i \neq \varphi \qquad (i=1,2)$$

چون $\{T^{n_k}\}_{k\ge 1}$ ابردوری است پس عدد صحیح k_1 وجود دارد به طوریکه :

$$T^{n_{k_1}}U_1 \cap V_1 \neq \varphi$$

چون T نسبت به دنباله $\{n_k\}_k$ ابردوری موروثی است بنابراین دنباله $\{T^{n_k}\}_{k>k_1}$ ابـردوری اسـت و در نتیجه عدد صحیح k_2 که $k_2 > k_1$ وجود دارد به طوری که :

$$T^{n_{k_2}}U_2 \cap V_2 \neq \varphi$$

با ادامه این روند ،زیر دنباله صعودی $\{n_{k_j}\}_j$ از $\{n_k\}_k$ با این خاصیت که $\forall j: j\ge 1$، $T^{n_{k_j}}U_1 \cap V_1 \neq \varphi$ بدست می آید. اما T نسبت به دنباله $\{n_k\}_k$ ابردوری موروثی است. بنابراین $\{T^{n_{k_j}}\}_{j\ge 1}$ نیز ابردوری است. از این رو با توجه به این که $\{T^{n_{k_j}}\}_{j\ge 1}$ یک مجموعه G_δ چگال از بردارهای ابردوری دارد یک $m \in \{n_{k_j}\}_j$ به دلخواه بزرگ وجود دارد به طوریکه :

$$T^mU_2 \cap V_2 \neq \varphi$$

بنابراین

$$T^mU_i \cap V_i \neq \varphi \qquad (i=1,2)$$

همچنین اگر $U=U_1\times U_2$ و $V=V_1\times V_2$ زیر مجموعه های بازی از $X\oplus X$ باشند آنگاه

$$(T\oplus T)^m U \cap V = (T^m \oplus T^m)(U_1\times U_2) \cap (V_1\times V_2) \neq \varphi$$

در این صورت $T\oplus T$ ابردوری است.

$(3\Rightarrow 1)$: فرض کنید (x,y) بردار ابردوری برای $T\oplus T$ باشد. بویژه x و y برای T ابردوری باشند.

به علاوه $(x,T^k y)$ برای $T\oplus T$ ابردوری است ، زیرا

$$\begin{aligned}\overline{\{(T\oplus T)^n(x,T^ky):n\in N\}} &= \overline{\{(T^nx,T^{n+k}y):n\in N\}}\\ &= \overline{\{T^nx:n\in N\}}\oplus\overline{\{T^{n+k}y:n\in N\}}\\ &= X\oplus X\end{aligned}$$

ادعا می کنیم که برای همه مجموعه های باز $U\subset X$ ، یک $u\in U$ وجود دارد به طوریکه (x,u) یک بردار ابردوری برای $T\oplus T$ می باشد.

چون y یک بردار ابر دوری برای T است، بنابراین یک $k\in N$ وجود دارد به طوری که $T^ky\in U$. اما با توجه به قسمت قبل (x,T^ky) یک بردار ابردوری برای $T\oplus T$ است، قرار می دهیم $u=T^ky$، بنابراین (x,u) یک بردار ابردوری برای $T\oplus T$ است.

حال فرض کنید که برای هر $k\in N$ ، $U_k=B(0,\frac{1}{k})$. با توجه به قسمت بالا می بینیم که برای هر $k\in N$، $u_k\in U_k$ وجود دارد به طوری که (x,u_k) یک بردار ابردوری برای $T\oplus T$ می باشد. بنابراین ما می توانیم یک دنباله صعودی $\{n_k\}_k$ از اعداد طبیعی پیدا کنیم به طوری که :

$$(T\oplus T)^{n_k}(x,u_k)\in U_k\times(x+U_k)$$

در نتیجه $T^{n_k}u_k\in x+U_k, T^{n_k}x\in U_k$.

فرض کنید $X_0=orb(T,x)$ که در X چگال می باشد. با توجه به تعریف U_k و $T^{n_k}x\in U_k$ داریم

$$T^{n_k}x\to 0,$$

$$\upsilon = T^m x\in X_0 \text{ ،}$$

$$T^{n_k}\upsilon = T^m(T^{n_k}x)\to 0.$$