دانشگاه پیام نور

گروه ریاضی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان

مقایسه بین روشهای اختلال هموتوپی و آنالیز هموتوپی برای مسائل غیرخطی از نوع موجی

مؤلف

ناصر سرباززاده خسروشاهی

استاد راهنما

دکتر حسین خیری استیار

استاد مشاور:

دکتر محمد چایچی رقیمی

آذر ماه ۱۳۸۸

نام خانوادگی دانشجو: سرباززاده خسروشاهی نام: ناصر

عنوان: مقایسه روشهای اختلال هموتوپی و آنالیز هموتوپی برای مسائل غیرخطی از نوع موجی

استاد راهنما: دکتر حسین خیری استیار

استاد مشاور: دکتر محمد چایچی رقیمی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی
دانشگاه پیام نور گروه ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: دیماه ۱۳۸۸ تعداد صفحه: ۹۱

کلید واژه‌ها: روش تجزیه آدومیان، روش اختلال هموتوپی، روش آنالیز هموتوپی، معادله غیرخطی، معادله فردهلم، معادله شرودینگر، معادله فیشر

چکیده

در این پایان‌نامه، روش تجزیه آدومیان، روش اختلال هموتوپی و روش آنالیز هموتوپی را برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی به کار می‌بریم. این تکنیک‌ها دنباله‌ای از توابع را که به جواب دقیق مسأله همگرا هستند، فراهم می‌کنند. تأکید ما بر روی مقایسه روشهاست، که با جزئیات به آن می‌پردازیم. نتایج عددی نشان می‌دهند که روشهای تجزیه آدومیان و اختلال هموتوپی حالتهای خاصی از روش آنالیز هموتوپی هستند.

بسم الله الرحمن الرحيم

سپاسگزاری

شایسته است صمیمانه‌ترین تشکرات قلبی خود را تقدیم اساتید محترمی نمایم که با همکاری و مساعدت بی‌شائبه و نظراتشان گام‌هایم را در مسیری که آغاز نموده‌ام، استوارتر ساختند. بخصوص از استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر خیری و راهنمایی‌های سودمندشان در تهیه و تدوین این پایان‌نامه، با تمام وجود تشکر می‌نمایم.
از جناب آقای دکتر چایچی که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را قبول فرموده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.
از نماینده گروه ریاضی کاربردی جناب آقای دکتر صحت‌خواه به خاطر حضورشان در جلسه دفاعیه تشکر می‌نمایم.

ناصر سرباززاده خسروشاهی

آذر ماه ۱۳۸۸

فهرست مطالب

مقدمه

بررسی ماهیت پدیده‌ها در طبیعت و مشاهده ساختار و تغییر ویژگی آنها مستلزم بکارگیری ابزاری نیرومند جهت قالب بندی آنها در مدل‌های ریاضی می‌باشد. اغلب این مدل‌ها متکی بر مجموعه‌ای از معادلات هستند که بیانگر رفتارهای خاص یک دستگاه فیزیکی می‌باشند. معادلات دیفرانسیل از جملهٔ این ابزار است. لذا گستردگی این معادلات، راه حل‌های ویژه‌ای را جهت یافتن جوابهای عددی آنها می‌طلبد.
در این پایان‌نامه، سه روش پیشرفته جدید برای حل معادلات دیفرانسیل به شکل کلی $A(u) = g$ ارائه شده است که در آن A یک عملگر عمومی و g یک تابع معلوم می‌باشد. این سه تحت عناوین، روش تجزیه آدومیان، روش اختلال هموتوپی و روش آنالیز هموتوپی بررسی می‌شوند.
در فصل اول تعاریف و مفاهیم اساسی مورد نیاز در فصل‌های بعدی مطرح شده است.
روش تجزیه آدومیان که در سال ۱۹۸۱ توسط جورج آدومیان[1] ارائه گردیده است، را در فصل دوم مورد بررسی قرار داده‌ایم. این روش بر پایه یافتن جوابی به شکل سری و تجزیه عملگر غیرخطی به یک سری نامتناهی است، که جملات آن بطور بازگشتی با استفاده از چندجمله‌ایهای آدومیان محاسبه می‌شوند.
روش اختلال هموتوپی که در فصل سوم به آن پرداخته‌ایم، توسط جی هوآن هی[2] معرفی گردیده، که ترکیبی از دو روش اختلال و روش آنالیز هموتوپی است، که جواب به صورت یک سری است، که جملات آن بطور بازگشتی حاصل می‌شوند.
در فصل چهارم روش آنالیز هموتوپی که در سال ۱۹۸۸ توسط لیائو[3] مطرح گردیده، مورد بررسی قرار گرفته است. این روش بر پایه ساختن یک هموتوپی و تشکیل معادلات تغییر شکل مرتبه صفر و بالاتر بنا نهاده شده است، که جواب به صورت یک سری است که جملات آن نیز بطور بازگشتی به دست می‌آیند.
در فصل پنجم مقایسه‌ای از لحاظ دقت و همگرایی سه روش صورت گرفته است که نتایج عددی سه روش برای مثالهای ارائه شده در فصلهای دو تا چهار مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

---

[1] George Adomian
[2] Ji-Huan-He
[3] Liao

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ معادلات دیفرانسیل

معادله‌ای که شامل یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل باشد، معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود. منظور از جواب یک معادله دیفرانسیل، یافتن تابعی است که‌اولاً تا مرتبه معادله مشتق پذیر بوده، ثانیاً در معادله صدق کند.

۱.۱.۱ معادلات دیفرانسیل معمولی

تعریف ۱. معادله‌ای که شامل یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک متغیر مستقل باشد، معادله دیفرانسیل معمولی نامیده می‌شود.
نکته: شکل کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه nام به صورت

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0,$$

یا

$$y^{(n)} = F(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}),$$

است.

تعریف ۲. مرتبه بالاترین مشتق موجود در یک معادله را مرتبه آن معادله دیفرانسیل می‌نامند.

تعریف ۳. معادله دیفرانسیل به شکل

$$a_0y^{(n)}(x) + a_1y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}y'(x) + a_ny(x) = Q(x),$$

را معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n گویند.

۲.۱.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

اگر در معادله دیفرانسیل بیش از یک متغیر مستقل وجود داشته باشد آنرا معادله دیفرانسیل جزئی می‌نامند. به عنوان مثال یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با دو متغیر مستقل x و t به صورت

$$L(u) = F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) = 0,$$

نوشته می‌شود، که شامل متغیرهای مستقل x و t ، تابع مجهول u وابسته به این متغیرها و مشتقات جزئی u_x و u_t و u_{xx} و u_{xt} و u_{tt} از تابع u می باشد. هدف ما، تعیین تابعی مانند $u = u(x, t)$ است که در معادله و دامنه D صدق کند. چنین توابعی در صورت وجود، جوابهای معادله نامیده می‌شوند.
تعریف ۴. یک عملگر دیفرانسیل جزئی، خطی نامیده می‌شود، اگر داشته باشیم

$$\forall u_1, u_2 \ \ L[c_1u_1 + c_2u_2] = c_1L(u_1) + c_2L(u_2),$$

که c_1 و c_2 ثابت هستند. این حالت را می‌توانیم برای تعداد متناهی عملگر نیز تعمیم دهیم اگر$u_1, u_2, \cdots, u_k$ توابع و $c_1, c_2, \cdots, c_k$ ثابتها باشند، آنگاه

$$L(\sum_{j=1}^{k} c_ju_j) = \sum_{j=1}^{k} c_jL[u_j].$$

تعریف ۵. منظور از $C^m[a, b]$ مجموعه توابع تعریف شده روی $[a, b]$ هستند که تا مرتبه mام مشتق پذیر پیوسته داشته باشند.
تعریف ٦. تابع f را در نقطه t_0 تحلیلی گویند هرگاه تمامی مراتب مشتق آن حول نقطه t_0 موجود باشد، به عبارت دیگر دارای بسط تیلور در نقطه t_0 باشد.
نکته: تابع f را در بازه $[a, b]$ تحلیلی گویند هرگاه در هر نقطه واقع در درون این بازه تحلیلی باشد.
تعریف ۷. اگر علاوه بر معادله دیفرانسیل داده شده، مقدار y و مشتقات متوالی آن در نقطه

$x = x_0$ معین باشند، آن را مسئله مقدار اولیه می‌گویند.

قضیه ۱.۱ (قضیه تیلور) اگر تابع f در همسایگی نقطه x_0 مشتق مرتبه $(n+1)$ام متناهی داشته باشد، در اینصورت مقدار f در هر نقطه x متعلق به این همسایگی به صورت

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 f''(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n f^{(n)}(x_0) + R_n(x),$$

به دست می آید، که در آن

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi),$$

و

$$f^{(k)}(x_0) = \frac{d^k f}{dx^k} \mid_{x=x_0},$$

و ξ نقطه‌ای بین x_0 و x است.

اثبات. رجوع کنید به [۱].

□

تعریف ۸. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و d تابعی به صورت $d : X \times X \to R^+ \cup \{0\}$ باشد. زوج (X, d) را یک فضای متریک گویند هرگاه به ازاء $\forall x, y, z \in X$ داشته باشیم

۱) $d(x, y) \geq 0$ و $d(x, y) = 0 \iff x = y$،

۲) $d(x, y) = d(y, x)$،

۳) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

تعریف ۹. فرض کنید X یک فضای برداری باشد، تابع $\| . \| : X \to R$ را یک نرم روی X گویند، هرگاه به ازاء $\forall x, y, z \in X$ و $\forall \lambda \in R$ داشته باشیم

۱) $\| x \| \geq 0$ و $\| x \| = 0 \iff x = 0$، ۲) $\| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|$،

۳) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

نرمهای اقلیدسی، بی‌نهایت و یک به ترتیب با نمادهای l_2، l_∞ و l_1 نشان داده می‌شوند و برای بردار $x = (x_1, \ldots, x_n)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

۱) $\| x \|_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i)^{1/2}$،

۲) $\| x \|_\infty = Max \mid x_i \mid$ و $1 \leq i \leq n$،

۳) $\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid$.

تعریف ۱۰. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک غیر تهی و $A \in X$ باشد، $x \in A$ را نقطه درونی A گویند هرگاه

$$\exists\ r > 0\ ;\ N_r(x) \subset A.$$

تعریف ۱۱. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک غیر تهی و $A \in X$ باشد، A را یک مجموعه باز گویند هرگاه هر عضو A یک عضو درونی آن باشد.

تعریف ۱۲. یک دنباله، تابعی است که دامنه‌اش مجموعه اعداد طبیعی باشد. آن را با $\{x_n\}$ نشان می‌دهند، که x_n ضابطه تابع یا جمله عمومی دنباله نامیده می‌شود.

تعریف ۱۳. یک سری نامتناهی (یا یک سری) مجموعی به صورت

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \cdots,$$

است که از جمع کردن جملات دنباله $\{x_n\}$ ساخته شده است.

تعریف ۱۴. سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$، که در آن $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد و z متغیری مستقل می‌باشد، یک سری توانی نامیده می‌شود.

تعریف ۱۵. دنباله $\{x_n\}$ از عناصر فضای نرم‌دار X را همگرا در X گویند، هرگاه، $\alpha \in X$ وجود داشته باشد، به طوری که

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - \alpha \| = 0,$$

و این مستلزم آن است که

$$\forall \epsilon > 0 \,, \exists N \; (n \geq N \Longrightarrow \parallel x_n - \alpha \parallel < \epsilon).$$

تعریف ۱۶. دنباله $\{x_n\}$ از عناصر فضای نرم‌دار X را دنباله کشی گویند هرگاه

$$\forall \; \epsilon > 0, \; \exists N \;, \forall k \; (n \geq N \Longrightarrow \parallel x_{n+k} - x_n \parallel < \epsilon).$$

تعریف ۱۷. فضای کامل یا تام، فضایی است که هر دنباله کشی در آن، همگرا باشد.
تعریف ۱۸. گردایه τ از زیر مجموعه‌های مجموعه X را یک توپولوژی در X گوییم اگر τ از سه خاصیت زیر بهره‌مند باشد

۱) $\emptyset \in \tau$ و $X \in \tau$،

۲) هرگاه به ازای $V_i \in \tau$ $(i = 1, \ldots, n)$، آنگاه $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n \in \tau$،

۳) هرگاه $\{V_\alpha\}$ گردایه دلخواهی از اعضای τ (متناهی، شمارش‌پذیر، یا شمارش ناپذیر) باشد، آنگاه

$$\cup_\alpha V_\alpha \in \tau.$$

تعریف ۱۹. فرض کنیم X و Y فضاهای توپولوژیک باشند، دو نگاشت f و g از X به Y هموتوپیک نامیده می‌شوند، اگر یک نگاشت F از $X \times [0,1]$ به Y وجود داشته باشد، به طوری که به ازاء هر x داشته باشیم

$$F(x,0) = f(x) \;, \; F(x,1) = g(x).$$

در اینجا F یک هموتوپی از f به g نامیده می‌شود، به عبارت دیگر هموتوپی یک تغییر پیوسته از f به g است.
تعریف ۲۰. فضای خطی متریک H را فضای هیلبرت گویند، هرگاه H با متر تعریف شده تام باشد.
تعریف ۲۱. فضای خطی نرم‌دار X را فضای باناخ گویند، هرگاه X با متر تعریف شده بوسیله نرمش، یک فضای تام باشد. به عنوان مثال هر فضای هیلبرت یک فضای باناخ است.

تعریف ۲۲. اگر T یک عملگر از فضای خطی X به روی خودش باشد، آنگاه $x \in X$ را نقطه ثابت T گویند، هرگاه $Tx = x$.

تعریف ۲۳. نگاشت $T : X \to X$ را در گوی $B(z,r)$، نگاشت انقباض گویند، اگر ثابتی چون $0 \leq \theta < 1$ موجود باشد، به طوری که

$$\forall x_1, x_2 \in B(z,r) \quad \| Tx_1 - Tx_2 \| \leq \theta \| x_1 - x_2 \| \,.$$

θ را ضریب انقباض گویند و گوی $B(z,r)$، گوی بسته ای به مرکز z و شعاع r است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$B(z,r) = \{ z \mid \| z - z_0 \| \leq r \} \,.$$

قضیه ۲.۱ (قضیه نگاشت انقباض یا نقطه ثابت باناخ) فرض کنید

۱) X یک فضای باناخ،

۲) $T : X \to X$،

۳) T در گوی $\overline{B}(u_0, r)$ یک نگاشت انقباض (با ضریب انقباض $0 \leq \theta < 1$)،

۴) $\frac{1}{1-\theta} \| u_1 - u_0 \| = r_0 \leq r$،

آنگاه

الف) T دارای نقطه ثابت منحصر به فرد u^* درون $\overline{B}(u_0, r)$ است.

ب) دنباله تکرار $u_k = Tu_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$، به نقطه ثابت u^* همگراست.

ج) $\| u_k - u^* \| \leq \theta^k r_0$.

اثبات.

$$\begin{aligned}
\forall k \qquad \| u_{k+1} - u_k \| = \| Tu_k - Tu_{k-1} \| &\leq \theta \| u_k - u_{k-1} \| \\
&= \theta \| Tu_{k-1} - Tu_{k-2} \| \\
&\leq \theta^2 \| u_{k-1} - u_{k-2} \| \\
&\vdots \\
&= \theta^k \| u_1 - u_0 \| \\
&= \theta^k (1-\theta) r_0 .
\end{aligned}$$

به استقراء می‌توان نشان داد $\| u_k - u_0 \| \leq r_0(1-\theta^k)$.
حکم بازاء $k=1$ طبق فرض برقرار است. فرض کنیم بازاء k برقرار باشد، ثابت می‌کنیم برای $k+1$ نیز برقرار است.

$$\begin{aligned} \forall k \qquad \| u_{k+1} - u_0 \| = \| u_{k+1} - u_k + u_k - u_0 \| &\leq \| u_{k+1} - u_k \| + \| u_k - u_0 \| \\ &\leq \theta^k(1-\theta)r_0 + (1-\theta^k)r_0 \\ &= (\theta^k - \theta^{k+1})r_0 + (1-\theta^k)r_0 \\ &= r_0(1-\theta^{k+1}). \end{aligned}$$

نشان می‌دهیم $\{u_k\}$ یک دنباله کوشی است. یعنی

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \quad (k \geq N \Longrightarrow \| u_{n+k} - u_k \| < \epsilon).$$

$$\begin{aligned} \| u_{n+k} - u_k \| &= \| u_{n+k} - u_{n+k-1} + u_{n+k-1} - \cdots + u_{k+1} - u_k \| \\ &\leq \| u_{n+k} - u_{n+k-1} \| + \cdots + \| u_{k+1} - u_k \| \\ &\leq \theta^{n+k-1} \| u_1 - u_0 \| + \cdots + \theta^k \| u_1 - u_0 \| \\ &\leq \theta^k[\theta^{n-1} + \theta^{n-2} + \cdots + \theta + 1](1-\theta)r_0 \\ &\leq \theta^k(1-\theta)r_0 \left[\frac{1}{1-\theta}\right] \\ &= \theta^k r_0 \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

می‌دانیم هر دنباله کوشی در فضای باناخ، همگراست. پس $\exists u^* \in X$ به طوری که u_k به u^* همگرا باشد. بنابراین داریم

$$u^* = Tu^*$$

یعنی u^* نقطه ثابت T است.
ثابت می‌کنیم u^* یکتاست. فرض کنیم u_m نقطه ثابت دیگری برای نگاشت انقباضی T باشد.

یعنی

$$\forall u^*, u_m \in X \quad u^* = T\ u^*, \quad u_m = T\ u_m$$

در این صورت داریم

$$\begin{aligned} \| u^* - u_m \| &= \| T\ u^* - T\ u_m \| \\ &\leq \theta \| u^* - u_m \| \\ &< \| u^* - u_m \| . \end{aligned}$$

که یک تناقض است. پس u^* یکتاست.
داریم

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \| u_k - u_0 \| \leq \lim_{k\longrightarrow\infty} (1-\theta^k) r_0,$$

و این یعنی

$$\| u^* - u_0 \| \leq r_0.$$

پس u^* درون $\bar{B}(u_0, r)$ است. □

فصل ۲

روش تجزیه آدومیان

۱.۲ مقدمه

حل مسائل غیرخطی در معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی و همچنین پاره‌ای از مسائل کاربردی در ریاضی فیزیک از دیرباز مورد توجه ریاضیدانان بوده است. جورج آدومیان[1] (۱۹۹۶—۱۹۲۰) در سال ۱۹۸۱ روش تجزیه‌ای را، که بنام خودش منسوب است، برای حل معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی ارائه نمود.
اکنون پس از گذشت بیش از دو دهه از ابداع روش مذکور، بسیاری از ابهامات و جزئیات روش روشن شده است، به طوری که روش به راحتی برای محققین قابل فهم بوده و در بسیاری از شاخه‌های علوم و مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

[1] George Adomian

۲.۲ ساختار کلی روش تجزیه آدومیان

برای نشان دادن ایده اصلی روش تجزیه آدومیان (ADM)، معادله دیفرانسیل

$$A(u) = g, \tag{۱.۲}$$

را در حالت کلی در نظر می‌گیریم، که A عملگر عمومی و g یک تابع جبری معلوم است. می‌توان A را به دو عملگر L و N، که L خطی و N غیر خطی است، تقسیم کرد. پس معادله (۱.۲) به شکل

$$L(u) + N(u) = g, \tag{۲.۲}$$

در می‌آید. به طور مناسب‌تر می‌توان (۲.۲) را به صورت زیر نوشت

$$L(u) + R(u) + N(u) = g, \tag{۳.۲}$$

که در آن L عملگر خطی معکوس‌پذیر است که دارای بالاترین مرتبه مشتق است و R قسمت باقیمانده عملگر خطی با مرتبه مشتق پایین‌تر می‌باشد. شکل عملگری (۳.۲) به صورت

$$L(u) = g - R(u) - N(u), \tag{۴.۲}$$

بیان می‌شود. با فرض آنکه L عملگر مشتق دوم بوده و L^{-1} معکوس عملگر L است، داریم

$$u = f - L^{-1}(R(u)) - L^{-1}(N(u)), \tag{۵.۲}$$

که در آن $f(t) = \alpha + \beta t + L^{-1}g(t)$ می‌باشد. بعبارت دیگر تابع $f(t)$ نمایانگر جملات به دست آمده از انتگرال‌گیری g و استفاده از شرایط اولیه مسأله می‌باشد. در روش تجزیه آدومیان، جواب به صورت سری

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \tag{۶.۲}$$

به دست می‌آید، که در آن مؤلفه‌های u_n بطور بازگشتی تعیین می‌شوند.
عملگر غیرخطی $Nu = F(u)$ به سری نامتناهی از چندجمله‌ایهای A_n به صورت

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \tag{۷.۲}$$

تجزیه می‌شود، به طوری که

$$A_n = A_n(u_0, u_1, u_2, \cdots, u_n). \tag{۸.۲}$$

به عبارت دیگر A_n ها چندجمله‌ایهایی از u_0، u_1، $\cdots$ و u_n بوده و چندجمله‌ایهای آدومیان نامیده می‌شوند.

با توجه به آنچه تاکنون گفته شد، (۵.۲) را می‌توان به شکل

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = f(t) - L^{-1}R\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) - L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right), \tag{۹.۲}$$

نمایش داد. حال جملات u_i را به شکل

$$\begin{aligned}
u_0 &= f(t),\\
u_1 &= -L^{-1}(Ru_0) - L^{-1}(A_0),\\
u_2 &= -L^{-1}(Ru_1) - L^{-1}(A_1),\\
&\vdots\\
u_n &= -L^{-1}(Ru_{n-1}) - L^{-1}(A_{n-1}),
\end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم.

به عبارت دیگر، تمامی مؤلفه‌های u_n توسط رابطه بازگشتی زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{cases} u_0 = f(t) \\ u_n = -L^{-1}(Ru_{n-1}) - L^{-1}(A_{n-1}), \quad n \geq 1. \end{cases} \tag{۱۰.۲}$$

نکته: کارآیی این روش به انتخاب مناسب L بستگی دارد، به طوری که معادله انتگرال به دست آمده از تأثیر L^{-1} بر دو طرف معادله (۴.۲)، به آسانی قابل حل باشد.

۳.۲ روش محاسباتی چندجمله‌ایهای آدومیان

روشی را که آدومیان برای به دست آوردن چند جمله‌ایهای آدومیان ارائه نمود، به صورت زیر است.

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[F\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0. \tag{۱۱.۲}$$

به عنوان مثال، A_1 و A_2 برای تابع غیرخطی $F(u)$ به صورت زیر محاسبه می‌گردند.

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{1!}\frac{d}{d\lambda}\left[F\left(u_0+\lambda u_1\right)\right]_{\lambda=0}\\
&= \frac{d(u_0+\lambda u_1)}{d\lambda}\; F^{(1)}(u_0+\lambda u_1)|_{\lambda=0}\\
&= u_1F^{(1)}(u_0),
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[F\left(u_0+\lambda u_1+\lambda^2u_2\right)\right]_{\lambda=0}\\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda}\left[(u_1+2\lambda u_2)F^{(1)}(u_0+\lambda u_1+\lambda^2u_2)\right]_{\lambda=0}\\
&= \frac{1}{2}\left[2u_2F^{(1)}(u_0+\lambda u_1+\lambda^2u_2)+(u_1+2\lambda u_2)^2F^{(2)}(u_0+\lambda u_1+\lambda^2u_2)\right]_{\lambda=0}\\
&= u_2F^{(1)}(u_0)+\frac{1}{2}u_1^2F^{(2)}(u_0).
\end{aligned}$$

نکته: در حالت کلی چندجمله‌ایهای آدومیان برای تابع غیرخطی $F(u)$، به ازاء $n=0,1,2,\cdots$، به صورت زیر محاسبه می‌گردند.

$$\begin{aligned}
A_0 &= F(u_0),\\
A_1 &= u_1F^{(1)}(u_0),\\
A_2 &= u_2F^{(1)}(u_0)+(\frac{1}{2!})u_1^2F^{(2)}(u_0),\\
A_3 &= u_3F^{(1)}(u_0)+u_1u_2F^{(2)}(u_0)+(\frac{1}{3!})u_1^3F^{(3)}(u_0),\\
A_4 &= u_4F^{(1)}(u_0)+\left[(\frac{1}{2!})u_2^2+u_1u_3\right]F^{(2)}(u_0)+(\frac{1}{2!})u_1^2u_2F^{(3)}(u_0)+(\frac{1}{4!})u_1^4F^{(4)}(u_0),\\
A_5 &= u_5F^{(1)}(u_0)+\left[u_2u_3+u_1u_4\right]F^{(2)}(u_0)+\left[(\frac{1}{2!})u_1u_2^2+(\frac{1}{2!})u_1^2u_3\right]F^{(3)}(u_0)\\
&\quad +(\frac{1}{3!})u_1^3u_2F^{(4)}(u_0)+(\frac{1}{5!})u_1^5F^{(5)}(u_0),\\
A_6 &= u_6F^{(1)}(u_0)+\left[(\frac{1}{2!})u_3^2+u_2u_4+u_1u_5\right]F^{(2)}(u_0)\\
&\quad +\left[(\frac{1}{3!})u_2^3+u_1u_2u_3+(\frac{1}{2!})u_1^2u_4\right]F^{(3)}(u_0)+\left[(\frac{1}{2!})u_1^2(\frac{1}{2!})u_2^2+(\frac{1}{3!})u_1^3u_3\right]F^{(4)}(u_0)\\
&\quad +(\frac{1}{4!})u_1^4u_2F^{(5)}(u_0)+(\frac{1}{6!})u_1^6F^{(6)}(u_0),\\
A_7 &= u_7F^{(1)}(u_0)+\left[u_3u_4+u_2u_5+u_1u_6\right]F^{(2)}(u_0)
\end{aligned}$$