بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

گروه فیزیک

(گرایش نظری)

مطالعه جبری مدلهای کوانتومی حل پذیر شبه کامل

از:

مرضیه برادران

استاد راهنما:

دکتر حسین پناهی

بهمن ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

معلمانی بی ادعا و مهربان

سپاسگزاری

پس از سپاس پروردگار، برخود واجب می دانم از همه عزیزانی که در انجام این پژوهش مرا با همدلی و همکاری خویش نواخته اند قدردانی نمایم.

از استاد ارجمند جناب آقای دکتر حسین پناهی به عنوان استاد راهنما که صمیمانه و متعهدانه در هدایت و راهنمایی اینجانب از هیچ کوششی دریغ ننموده اند و همواره مشوق و الگویی نیکو در ایفای وظایف بوده اند، از صمیم قلب تشکر نموده و سپاس و احترام بیکران خویش را تقدیمشان می کنم. بدون شک کار کردن در کنار ایشان یکی از خجستگی های زندگی من در این سال ها بوده است. همچنین از جناب آقای دکتر رضا صفاری و دکتر اسماعیل عزیرپور که داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند، نهایت امتنان را دارم.

سپاس فراوان و سرشار از عشق خود را نثار دو گوهر گرانقدر پدر و مادر عزیزم می کنم که در تمام مراحل زندگی همواره همدل و سنگ صبور روزهای تلخ و شیرین زندگیم بوده اند و هستند. امید که وجود پر مهرشان همواره سایبان آرامشم باشد.

همچنین برای دوستان فیزیک پیشه ام که با بودن در کنار آنها لحظات زیبایی را تجربه کرده ام، آرزوی موفقیت و سربلندی دارم. توان و سرزندگی ایشان در راه انجام خدمات علمی پایدار و مستدام باد.

مطالب

عنوان	شماره صفحه
فهرست جدول ها	چ
فهرست شکل ها	ح
چکیده فارسی	خ
چکیده انگلیسی	د
فصل اول: مقدمه	۱
۱-۱) مقدمه	۲
فصل دوم: مفاهیم پایه	۸
۲-۱) مروری بر نظریه گروه ها	۹
۲-۱-۱) گروه چیست؟	۹
۲-۱-۲) زیرفضای ناوردا	۱۰
۲-۱-۳) گروه لی	۱۰
۲-۱-٤) مولدهای گروه لی	۱۱
۲-۱-۵) جبر لی	۱۳
۲-۲) ابرتقارن	۱۵
۲-۲-۱) ابرجبر لی	۱٦
۲-۲-۲) مکانیک کوانتومی ابرتقارنی	۱۷
۲-۳) دیدگاه جبری در حل مسائل ویژه مقداری	۱۹
۲-۳-۱) مسئله ویژه مقداری	۲۰
۲-۳-۲) مفهوم حل پذیر شبه دقیق	۲۱
۲-۳-۳) عملگر شرودینگر حل پذیر شبه دقیق	۲۵

فصل سوم: حل پذیری شبه کامل تحت تقارن دینامیکی جبر لی $sl(2)$ ۲۷

۳ –۱) مقدمه ۲۸

۳–۲) معادلات دیفرانسیل حل پذیر شبه دقیق ۲۹

۳–۲–۱) بیان تعریف ها و قضیه ها ۲۹

۳–۲–۲) معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم حل پذیر شبه دقیق ۳۱

۳–۲–۳) معادله شرودینگر حل پذیر شبه دقیق و طبقه بندی توربینر ۳۲

۳–۳) فرمالیسم پیش پتانسیل در نظریه حل پذیری دقیق و شبه دقیق ٤٥

۳–۳–۱) فرمالیسم پیش پتانسیل برای هامیلتونین هرمیتی در بازه $(-\infty < x < +\infty)$ ٤٥

۳–۳–۲) فرمالیسم پیش پتانسیل برای هامیلتونین غیر هرمیتی ۵۳

۳–۳–۲–۱) نوسانگر درجه چهار ۵۳

۳–٤) حل پذیری شبه دقیق معادله دیراک برای پتانسیل اسکالر ۵۵

۳–٤–۱) معادله دیراک (۱+۱) بعدی در مختصات دکارتی ۵۵

۳–٤–۲) معادله دیراک حل پذیر شبه دقیق ۵٦

۳–٤–۳) پتانسیل حل پذیر شبه دقیق کلاس I ۵۸

۳–۵) معادله دیفرانسیل حل پذیر شبه دقیق مسئله کلاین–گوردون–کولمب ٦۱

۳–۵–۱) مقدمه ٦۱

۳–۵–۲) مدل هامیلتونین ٦۱

۳–۵–۳) معادله دیفرانسیل حل پذیر شبه دقیق مسئله کلاین–گوردون–کولمب ٦۲

فصل چهارم: مسائل حل پذیر شبه کامل مرتبط با ابرجبرهای لی ٦۵

٤–۱) مقدمه ٦٦

٤–۲) شکل کلی هامیلتونین سیستم های دو ترازه ٦۷

٤–۳) حل پذیری شبه دقیق هامیلتونین نقاط کوانتومی در حضور جفت شدگی اسپین– مدار راشبا ٦۸

٤–۳–۱) مدل هامیلتونین ٦۸

٤-٣-٢) ساختار جبری نهفته در هامیلتونین نقاط کوانتومی ٦٩

٤-٣-٣) حل شبه دقیق هامیلتونین ٧١

٤-٤) حل پذیری شبه دقیق هامیلتونین جینز- کامینگز در محیط غیر خطی کر ٧٤

٤-٤-١) مدل هامیلتونین جینز-کامینگز ٧٤

٤-٤-٢) معرفی نمایش عملگری ابرجبر $osp(2,1)$ ٧٤

٤-٤-٣) روش تبدیل عملگری و حل شبه دقیق هامیلتونین ٧٥

٤-٥) حل پذیری شبه دقیق هامیلتونین جان-تلر ٧٩

٤-٥-١) مدل هامیلتونین جان-تلر ٧٩

٤-٥-٢) حل شبه دقیق هامیلتونین جان-تلر ٨١

٤-٦) حل پذیری شبه دقیق معادله شعاعی دیراک در حضور پتانسیل کولنی ٨٥

٤-٦-١) معادله دیراک برای پتانسیل هایی با تقارن کروی ٨٥

٤-٦-٢) نمایش دیفرانسیلی ابرجبر لی $osp(2,2)$ ٨٦

٤-٦-٣) جبر نهفته در معادله شعاعی دیراک در حضور پتانسیل کولنی ٨٧

٤-٦-٤) نمایش ماتریسی و طیف سیستم مزبور ٨٨

٤-٦-٥) ویژه توابع اسپینوری معادله دیراک ٨٩

فصل پنجم: نتیجه گیری و پیشنهادها ٩١

٥-١) نتیجه گیری ٩٢

٥-٢) پیشنهادها ٩٤

مراجع ٩٦

فهرست جدول ها

عنوان جدول ها **شماره صفحه**

جدول (۲-۱): گروه های ماتریسی و پارامترهای حقیقی آنها ۱۵

جدول (۳-۱): پتانسیل های حل پذیر شبه دقیق و معادلات دیفرانسیل متناظر آنها ٤٤

فهرست شکل ها

عنوان شکل **شماره صفحه**

شکل (٤–١): نمودار تغییرات E (پر) و $\in$ (نقطه چین) بر حسب κ ٨٣

چکیده

مطالعه جبری مدلهای کوانتومی حل پذیر شبه کامل

مرضیه برادران

در این پایان نامه، مدل های کوانتومی حل پذیر شبه کامل به روش های جبری و بر اساس تقارن دینامیکی نهفته در آنها مورد مطالعه قرار می گیرد. پتانسیل و عملگر هامیلتونین در این مدل ها، وابسته به پارامتر معینی می باشند که امکان محاسبه بخشی از طیف سیستم را فراهم می کند. بر این اساس بلوک متناهی از ماتریس هامیلتونین سیستم به صورت عملگر دیفرانسیلی جبری مرتبه دوم بر حسب مولدهای یک جبر لی یا ابرجبر لی که دارای فضای نمایش متناهی هستند بیان می شود. حل پذیری شبه کامل تحت تقارن دینامیکی جبر لی $sl(2)$ مورد بررسی قرار گرفته و با اعمال تبدیلات پیمانه ای و تغییر متغیر مناسب، از طریق هم ارز قرار دادن معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم با معادله شرودینگر، شکل کلی پتانسیل های حل پذیر شبه کامل و تابع پیمانه ای تعیین می شوند. رویکردی جدید در توسعه نظریه حل پذیری شبه کامل با عنوان فرمالیسم پیش پتانسیل بر اساس مفاهیم ابرتقارنی ارائه شده و همچنین حل پذیری شبه کامل معادلات دیراک و کلاین–گوردون بر اساس جبر لی $sl(2)$ بیان شده است. در نهایت حل پذیری شبه کامل سیستم های کوانتومی دو مؤلفه ای که عملگر هامیلتونین در آنها به صورت نمایش ماتریسی ۲×۲ می باشد، بر پایه ابرجبرهای لی $osp(2,1)$ و $osp(2,2)$ مورد بررسی قرار گرفته است. عملگر هامیلتونین در این مدل ها بر اساس مولدهای ابرجبر لی بازنویسی شده و سپس با برقراری معادله ویژه مقداری، روابط بازگشتی به دست آمده اند که با بیان آنها در نمایش ماتریسی و از محاسبه ریشه های دترمینان ماتریس مذکور، جواب های بخشی از طیف سیستم برای مقادیر مشخص از پارامتر تعیین شده اند.

واژه های کلیدی:

حل پذیر شبه کامل، تقارن دینامیکی نهفته، جبر لی $sl(2)$، رویکرد پیش پتانسیل، ابرجبر لی $osp(2,2)$، ابرجبر لی $osp(2,1)$

Abstract

Algebraic study of the quasi exactly solvable quantum models

Marzieh Baradaran

In this thesis, quasi exactly solvable (*QES*) quantum models are studied by using algebraic methods and based on the hidden dynamical symmetry of them. In these models, the potential and the Hamiltonian operator depend on a certain parameter which is cause to determine the part of the spectrum. For this, the finite block of the matrix of Hamiltonian is expressed as an algebraic quadratic differential operator in terms of the generators of a Lie algebra or a Lie superalgebra with the finite representation space. The quasi exact solvability beyond the $sl(2)$ dynamical symmetry is studied and via imposing an appropriate gauge transformation and change of variable, the general form of *QES* potentials and the gauge function are determined by considering the quadratic differential equation and Schrodinger equation to be equivalent. A new approach in extending the *QES* theory named prepotential approach is presented based on the concept of supersymmetry and also quasi exact solvability of the Dirac and Klein-Gordon equations are presented based on $sl(2)$ Lie algebra. Finally, the quasi exact solvability of two component quantum systems which their Hamiltonian operator can be represented as 2×2 matrix are studied based on $osp(2,2)$ and $osp(2,1)$ Lie superalgebras. The Hamiltonian operator in these models are rewrited in terms of the generators of Lie superalgebra and then by writing eigenvalue problem, recursion relations are obtained which can be expressed in the matrix representation whose the roots of determinant provide the part of the spectrum for certain values of parameter.

Key words:

Quasi exactly solvable, Hidden dynamical symmetry, $sl(2)$ Lie algebra,
Prepotential approach, $osp(2,2)$ Lie superalgebra, $osp(2,1)$ Lie superalgebra

فصل اول

مقدمه

۱-۱) مقدمه

از گذشته های دور، محاسبه جواب های دقیق مسائل و معادلات موجود در علوم مختلف بسیار مشکل بوده است. جستجو برای یافتن جواب های دقیق معادلات موج، همواره از موضوعات مهم و بحث برانگیز فیزیکدانان از ابتدای پیدایش مکانیک کوانتومی نسبیتی و غیر نسبیتی بوده است. با این وجود، در عمل همواره امکان محاسبه تمام طیف ویژه مقادیر سیستم وجود ندارد و بسیاری از مسائل حل پذیر کامل/ دقیق[۱] (ES) که در کتاب های فیزیک و مقالات ذکر شده اند، حالات بسیار نادری هستند (مانند مسئله نوسانگر هماهنگ[۲]، مسئله اتم هیدروژن[۳] و ...). اما از همین تعداد اندک می توان برای توصیف مسائل واقعی با به کارگیری از روش های تقریبی بهره جست.

در دهه های اخیر، استفاده از روش های ریاضی در فیزیک بیشتر از گذشته ذهن فیزیکدانان را به خود معطوف کرده است. یکی از ابزارهای سودمند در تعیین پاسخ های طیف ویژه مقادیر مدل های کوانتومی، بهره گیری از روش جبر عملگری می باشد. بر این اساس، در سال های ابتدایی دهه ۸۰ میلادی، رده جدیدی از مسائل ویژه مقداری که حالت بینابین مسائل حل پذیر کامل و مسائل بدون پاسخ می باشند، توسط رضوی[٤] [۱] و سینگ-رمپال-بایاس-داتا[٥] [۲] مطرح شد.

در این رده از مسائل، تنها می توان بخشی از طیف ویژه مقادیر سیستم را به کمک روش های تحلیلی و جبری محاسبه کرد. از اینرو چنین سیستم هایی را حل پذیر شبه کامل/ دقیق[٦] (QES) می نامند [۳]. عقیده وجود هامیلتونین های بینابین به تدریج شکل گرفت و اصطلاح حل پذیر شبه کامل برای چنین سیستم هایی برای اولین بار توسط توربینر[۷] و اشوریدز[۸] در سال ۱۹۸۷ پیشنهاد شد [٤].

---

[1] Exactly Solvable
[2] Harmonic oscillator
[3] Hydrogen atom
[4] Razavy
[5] Singh-Rampal-Biawas-Datta
[6] Quasi Exactly Solvable
[7] Turbiner
[8] Ushveridze

معمولاً مبنای حل پذیری شبه کامل یک سیستم کوانتومی، وجود یک ساختار جبر لی نهفته[1] در سیستم می باشد [۵-۷]. در مورد مسائل حل پذیر کامل، سیستم دارای تقارن کامل است و ماتریس هامیلتونین سیستم به طور کامل قابل قطری کردن است. مثال های مشهور از این دسته در یک بعد، نوسانگر هماهنگ ساده، نوسانگر هماهنگ با سد گریز از مرکز[2]، پتانسیل مورس[3]، پتانسیل پاشل-تلر[4] و... می باشند.

اما در مورد مسائل حل پذیر شبه کامل، وضع بدین گونه نیست. در این دسته از مسائل، در شکل عملگری هامیلتونین سیستم جبر نهفته ای وجود دارد که ما را مطمئن می سازد که حداقل بخش متناهی از طیف سیستم قابل محاسبه است. به این ترتیب با قطری کردن بلوک متناهی از ماتریس هامیلتونین سیستم، بخشی از ویژه مقادیر و ویژه توابع تعیین می شوند. لازم به ذکر است که بلوکه در نظر گرفتن ماتریس هامیلتونین سیستم، مستلزم کاهش پذیری نمایش ماتریسی آن است و از اینرو معادله دیفرانسیل عملگر هامیلتونین در سیستم های حل پذیر شبه کامل، زیرفضای با ابعاد متناهی از فضای نمایش[5] جبر لی g با پایه های به شکل چند جمله ای را ناوردا باقی می گذارد.

همان گونه که ذکر شد، تعداد هامیلتونین های حل پذیر کامل در مکانیک کوانتومی محدود می باشند و این تعداد کم، قادر به پاسخگویی نیازهای مختلف در مکانیک کوانتومی مدرن نمی باشد. در مقابل، مدل های حل پذیر شبه کامل گستره وسیعی از مسائل فیزیک نظری را در بر می گیرد که از آن جمله می توان به نظریه میدان های کوانتومی همدیس[6] [۸] و فیزیک حالت جامد [۹] اشاره کرد. بنابراین دور از انتظار نیست که روش های مختلفی جهت ساخت این مدل ها به وجود آید.

در تاریخچه مدل های حل پذیر شبه کامل، بررسی این مدل ها از دو دیدگاه جبری (تقریب بر اساس تقارن دینامیکی[7] نهفته در هامیلتونین سیستم) و تحلیلی (که مد نظر این پایان نامه نیست) مورد بررسی قرار گرفته است [۱۰]. روش کار در دیدگاه جبری که بر اساس نمایش های با ابعاد متناهی از جبر لی می باشد، به این صورت است که اگر بتوانیم هامیلتونین سیستم را به صورت ترکیب مولدهای جبر لی خاصی در فضای نمایش متناهی به صورت $H=\sum c_{ab}T^aT^b+\sum c_aT^a+const$ بنویسیم، که در آن c_{ab} و c_a ها ضرایب ثابت و T^a ها مولدهای جبر مورد نظر هستند، در این صورت هامیلتونین سیستم

---

[1] Hidden Lie algebra
[2] Harmonic oscillator plus centrifugal barrier
[3] Morse potential
[4] Pöschl-Teller potential
[5] Representation space
[6] Conformal field theories
[7] Dynamical symmetry

قابل حل خواهد بود، زیرا با اثر عملگری مولدهای جبر و ترکیب های آنها بر فضای نمایش با ابعاد متناهی از جبرهای لی، فضای مذکور ناوردا می ماند.

بنابراین می توان چنین نتیجه گرفت که در بررسی مسائل حل پذیر شبه کامل از دیدگاه جبری، وجود یک ترکیب نهفته جبر لی و به تبع آن، وجود یک زیرفضای ناوردای[1] w با ابعاد متناهی که متعلق به فضای نمایش نامتناهی از جبر لی مربوطه است، مبنای حل پذیری شبه کامل سیستم می باشد، یعنی اگر $\psi \in w$ باشد، آنگاه $H\psi \in w$.

لازم به ذکر است که پتانسیل و عملگر هامیلتونین در سیستم های کوانتومی حل پذیر شبه کامل، وابسته به پارامتر معینی می باشند که امکان محاسبه بخشی از طیف سیستم را فراهم می کند و در شرایطی که پارامتر ظاهر نشود و یا در مقادیر بی نهایت بزرگ پارامتر، طیف سیستم به طور کامل قابل محاسبه و حل پذیر خواهد بود. به عبارت دیگر با برقراری معادله ویژه مقداری[2]، روابط بازگشتی[3] حاصل می شود که به ازای مرتبه معینی قطع می شوند و جواب های شبه دقیق سیستم را به دست می دهند.

توربینر به بررسی جدی و عمیق ارتباط بین معادله دیفرانسیل عملگرهای حل پذیر شبه کامل و فضای نمایش جبر لی $sl(2)$ در یک بعد پرداخت و نتایج تحقیقات خود را در مقاله ای تحت عنوان " معادلات دیفرانسیل حل پذیر شبه کامل" در سال ۱۹۹٤ منتشر کرد [۱۱]. لازم به ذکر است که پیش از توربینر در سال ۱۹۸٤، ارتباط بین معادلات دیفرانسیل حل پذیر شبه کامل و نمایش های متناهی از جبر لی $sl(2)$ برای اولین بار توسط زاسلاوسکی[4] و اولیانوف[5] مطرح شده بود [۱۲].

دیدگاه جبری در بررسی نظریه حل پذیری شبه کامل، به دلیل تسهیل در انجام فرآیند محاسبات و یافتن پاسخ های طیف سیستم، از ابتدای پیدایش خود به شدت مورد توجه واقع شد. در هر شاخه ای از علوم مختلف، بعد از بیان مفاهیم کلی و کاربردهای آن، مهم ترین هدفی که دنبال می شود طبقه بندی و بررسی تمام پدیده ها و مدل هایی است که مصداقی از آن مفاهیم هستند. طبقه بندی دقیق و جامع پتانسیل های حل پذیر شبه کامل در یک بعد بر اساس فضای نمایش متناهی از جبر لی $sl(2)$ توسط توربینر در مرجع [۱۳] و نیز ارتباط بین مدل های حل پذیر شبه کامل ابرمتقارن[6] با ابرجبرهای لی[7] و نیز

---

1 Invariant subspace
2 Eigenvalue problem
3 Recursion relations
4 Zaslavskii
5 Ulyanov
6 Supersymmetric
7 Lie superalgebra

تعمیم آن به دو بعد بر پایه فضای نمایش جبرهای لی $sl(2)\oplus sl(2)$، $sl(3)$ و $so(3)$ در مراجع مختلف توسط شیفمن[1]–توربینر [۱٤] و اولور–کامران– گونزالز لوپز[2] [۱٥و١٦] ارائه شده است.

از سوی دیگر، دیدگاه تحلیلی در بررسی و ساختن مدل های حل پذیر شبه کامل در سال ۱۹۸۸ توسط اشوریدز [۱۰] مطرح شد. وی در تحقیقات خود نشان داد که حل تحلیلی مسائل اساسی در مکانیک کوانتومی قابل دسترسی است، اما تنها برای مقادیر ویژه ای از پارامترهای اصلی مسئله می توانیم پاسخ های دقیق را به دست آوریم. به این ترتیب که مطابق با معادله مربوطه، مجموعه ای از توابع تحلیلی وابسته به چندین پارامتر عددی در نظر گرفته می شود که در نتیجه یک هامیلتونین حل پذیر شبه کامل و ویژه توابع متناظر به صورت همزمان به دست می آیند. تنها کاری که لازم است انجام گیرد تطبیق این پارامترهای عددی است که هم ارز با قطری کردن بلوک متناهی از عملگر هامیلتونین می باشد.

در ابتدا مشخص شد که مسئله دو الکترون متحرک در پتانسیل نوسانگر خارجی[3] از نوع مسائل کوانتومی حل پذیر شبه کامل هستند [١٦و١٧]، بعدها دیده شد که معادله شرودینگر دو بعدی [۱۸و۱۹]، کلاین–گوردون[4] [۲۰] و معادله دیراک[5] [۲۱] توصیف کننده الکترون متحرک در میدان کولنی جاذب/ دافع[6] و میدان مغناطیسی همگن[7] نیز در این دسته جای دارند. اخیراً رویکرد جدیدی در طبقه بندی مدل های حل پذیر کامل و حل پذیر شبه کامل، تحت عنوان فرمالیسم پیش پتانسیل[8] بر اساس ایجاد ساختار ابرتقارنی[9] سیستم توسط هو[10] و همکارانش مطرح شده است [۲۲] که مدل های حل پذیر کامل معرفی شده توسط کوپر[11] و همکارانش [۲۳] و نیز طبقه بندی توربینر [۱۳] از مدل های حل پذیر شبه کامل را در بر می گیرد.

پیشرفت های اخیر در نظریه مدل های حل پذیر شبه کامل، منجر به کشف مشابهت هایی بین مسائل حل پذیر شبه کامل مکانیک کوانتومی و نظریه میدان های همدیس در دو بعد شده است که برای اولین بار توسط موزوروف[12] در مقاله ای در

[1] Shifman
[2] Olver-Kamran- Gonzalez Lopez
[3] External oscillator
[4] Klein-Gordon
[5] Dirac equation
[6] An attractive/repulsive Coulomb field
[7] Homogeneous magnetic field
[8] Prepotential approach
[9] Supersymmetry
[10] Ho
[11] Cooper
[12] Morozov

سال ۱۹۹۰ مطرح شد [۸]. وجود این مشابهت ها، این اجازه را به ما می دهند که از روش های کوانتومی در نظریه میدان ها و بالعکس استفاده کنیم.

به طور خلاصه می توان چنین نتیجه گرفت که نظریه مدل های حل پذیر شبه کامل، نقش چند جانبه ای در مکانیک کوانتومی ایفا می کند. در حقیقت این نظریه، ترکیب شاخه هایی از ریاضی و فیزیک مانند نظریه گروه[۱]، هندسه دیفرانسیلی[۲]، مکانیک کوانتومی، الکتروستاتیک کلاسیک در دو بعد و نیز نظریه میدان های همدیس با تمام تکنیک های ریاضی به کار رفته در آنها است.

مباحثی که در این پایان نامه به آن پرداخته می شود معرفی مفهوم حل پذیری شبه کامل و ارائه حل شبه کامل مسائل کوانتومی تک مؤلفه ای و دو مؤلفه ای به طریق جبری و نیز طبقه بندی پتانسیل های حل پذیر شبه کامل می باشد. روش کلی کار به صورت جبری و بر اساس تقارن دینامیکی نهفته در مسئله می باشد.

ترتیب مطالب به این صورت است که در فصل دوم تعاریف و مفاهیم پایه ای که جهت درک مفاهیم اصلی نیاز است، ارائه شده است. گروه لی و جبر لی به عنوان ابزارهای ریاضی مهم در شناخت مفهوم حل پذیری شبه کامل مطرح شده اند. در بخش دیگری از این فصل مختصری از نظریه ابرتقارنی در مکانیک کوانتومی که مبنای اصلی روش کار در فرمالیسم پیش پتانسیل و نیز یافتن جواب های شبه کامل معادله دیراک در فصل سوم می باشد، بیان گردیده است.

در فصل سوم حل پذیری شبه کامل مسائل کوانتومی تحت تقارن دینامیکی جبر لی $sl(2)$ مورد بررسی قرار گرفته و طبقه بندی توربینر از پتانسیل های حل پذیر شبه کامل در یک بعد بر پایه جبر لی $sl(2)$ ارائه شده است. ضمن اینکه در بخش دیگری از این فصل، راهکاری جدید در توسعه نظریه حل پذیری شبه کامل با عنوان فرمالیسم پیش پتانسیل بر اساس روش های تجزیه سازی[۳] و ایجاد ساختار ابرتقارنی سیستم ارائه شده است. در بخش سوم این فصل نیز حل پذیری شبه کامل دو معادله شناخته شده مکانیک کوانتومی نسبیتی، معادله دیراک (۱+۱) بعدی در حضور پتانسیل اسکالر[۴] و معادله کلاین-گوردون گوردون در حضور پتانسیل کولنی تعمیم یافته[۵] به دو روش متفاوت نشان داده شده است.

[1] Group theory
[2] Differential geometry
[3] Factorization
[4] Scalar potential
[5] Generalizad Coulomb potential

در فصل چهارم، حل پذیری شبه کامل سیستم های کوانتومی دو مؤلفه ای که عملگر هامیلتونین در آنها به صورت نمایش ماتریسی ۲×۲ می باشد، بر پایه ابرجبرهای لی مورد بررسی قرار گرفته است. روش کار بدین صورت است که با اعمال تبدیلات مناسب، ساختار جبر نهفته در سیستم مشخص و هامیلتونین بر حسب مولدهای ابرجبرهای لی $osp(2,1)$ و $osp(2,2)$ بازنویسی شده است. سپس با برقراری معادله ویژه مقداری، یک سری روابط بازگشتی به دست آورده می شوند که به ازای پارامتر معینی قطع می شوند. علاوه بر این، با بیان روابط بازگشتی به زبان ماتریسی، از محاسبه ریشه های دترمینان ماتریس مذکور، جواب های طیف انرژی سیستم برای مقادیر مشخص از پارامتر تعیین شده اند.

در نهایت در فصل پنجم نتیجه گیری ارائه شده و پیشنهادهایی جهت دنبال کردن کار توسط دانشجویان علاقمند مطرح شده است.

فصل دوم

مفاهیم پایه

۲-۱) مروری بر نظریه گروه ها

پیدایش نظریه گروه ها به بیش از ۱۵۰ سال قبل، در اوایل قرن نوزدهم بر می گردد. پیشرفت های اولیه نظریه گروه ها توسط ریاضیدانان بزرگی از جمله کوشی[۱]، گاوس[۲]، آبل[۳]، هامیلتون[۴] و بسیاری دیگر انجام شده است. با این وجود نظریه گروه ها تا قبل از ظهور مکانیک کوانتومی نوین در سال ۱۹۲۵، کاربرد زیادی در فیزیک نداشت. اما پس از آن به کاربرد نظریه گروه در فیزیک پی برده شد و به عنوان ابزاری جدید در محاسبات مربوط به ساختار و طیف های اتمی مورد استفاده قرار گرفت. امروزه استفاده از نظریه گروه ها در اغلب شاخه های فیزیک اجتناب ناپذیر است. اگرچه یک ریاضیدان عموماً به نظریه انتزاعی گروه ها بیشتر توجه دارد، برای یک فیزیکدان نظریه نمایشی گروه هاست که مورد استفاده مستقیم در فیزیک کوانتومی و سایر شاخه های فیزیک می باشد.

از آنجایی که یکی از ابزارهای ضروری در بررسی حل پذیری شبه کامل مسائل کوانتومی از دیدگاه جبری آشکار نمودن ساختار گروه تقارنی نهفته در آن است، لذا در این فصل جنبه هایی از نظریه انتزاعی گروه ها و گروه های پیوسته لی را بیان خواهیم کرد که برای فهم نظریه نمایشی در فصل های سوم و چهارم این پایان نامه مورد نیاز است.

۲-۱-۱) گروه چیست؟

به طور مجرد مجموعه ای از عناصر متمایز $G=\{E,A,B,C,D,\cdots\}$ یک گروه است که دارای یک قانون ترکیب (نظیر جمع، ضرب، ضرب ماتریس و ...) است به گونه ای که چهار خاصیت زیر برقرار باشد:

الف) از ترکیب هر دو عنصر A و B از G، عنصری متعلق به G به دست آید، یعنی:

$$A\circ B\in G\,,\quad B\circ A\in G.$$

ب) عنصر همانی E در مجموعه G وجود داشته باشد به گونه ای که برای تمام عناصر A از مجموعه داشته باشیم:

---

[1] Cauchy
[2] Gauss
[3] Abel
[4] Hamilton