دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز

میانگین‌پذیری تقریبی جبرهای نیم‌گروهی

استاد راهنما:

دکتر علی رجالی

پژوهشگر:

رضوان شریفیانا

مهر ماه ۱۳۹۰

تشکر و قدردانی

شکر و سپاس پروردگاری را که توانایی و فرصت علم اندوزی برایم فراهم ساخت و او که لطفش دائم و نعماتش افزون که شکرش نتوان کرد و خداوندی که توفیق اتمام این مقطع تحصیلی را به من عنایت نمود.

سپاس و ستایش خدایی را سزاست که کسوت هستی را بر اندام آفرینش پوشانید، او که تمامی ستایشگران از ستایش او عاجزند و تمامی حسابگران از شکر نعمت های او ناتوان.

این مجموعه را نتیجه ی راهنمایی های استاد گرامی و بزرگوارم **جناب آقای دکتر علی رجالی** می دانم که با سعه ی صدر و در نهایت صبر و شکیبایی مرا راهنمایی فرمودند.

بر خود وظیفه می دانم که از زحمات بی دریغ و مساعدت های ایشان صادقانه سپاسگزاری کنم، گر چه سپاس من قطره ای در برابر دریای بیکران محبت ها و راهنمایی های ایشان است.

زحمات اساتید داور **سرکار خانم دکتر ابطحی** و **سرکار خانم دکتر یوسف زاده** را ارج نهاده، از ایشان تشکر می کنم.

هم چنین بر خود وظیفه می دانم که از خانواده ام به ویژه **مادر صبورم** که در پیمودن این راه همواره مشوق و همراه من بوده اند، سپاسگزاری ویژه به جای آورم.

رضوان شریفیانا

مهر ماه ۱۳۹۰

تقدیم به روح پدرم که محبتش بی اندازه بود
و دلتنگیم برایش بی نهایت

تقدیم به مادرم که گیسوانش سپید شد تا من روسپید شوم
و عاشقانه سوخت تا مشعل راهم و گرمابخش هستی ام باشد

تقدیم به برادران و خواهران عزیزم.

چکیده

میانگین‌پذیری تقریبی جبرهای باناخ در سال‌های اخیر مورد توجه بوده است. دراین پایان‌نامه نشان می‌دهیم که یک نیم‌گروه حذفی چپ S (نه لزوماً با همانی) میانگین‌پذیر چپ است، هرگاه جبر باناخ $\ell^1(S)$ میانگین‌پذیر تقریبی باشد. هم‌چنین ثابت می‌کنیم که اگر S یک نیم‌گروه برانت روی گروه G با مجموعه اندیس I باشد، آن‌گاه $\ell^1(S)$ میانگین‌پذیر است اگروتنهااگر G میانگین‌پذیر و I متناهی باشد. به‌علاوه $\ell^1(S)$ میانگین‌پذیر تقریبی است اگروتنهااگر G میانگین‌پذیر و I متناهی باشد. برای یک نیم‌گروه اساسی حذفی چپ S با همانی به‌طوری‌که برای هر زیرمجموعه‌ی $M_a(S)$–اندازه‌پذیر B از S و هر $s \in S$، مجموعه‌ی sB $M_a(S)$–اندازه‌پذیر باشد، نشان می‌دهیم که اگر جبر اندازه‌ی $M_a(S)$ میانگین‌پذیر تقریبی باشد، آن‌گاه S میانگین‌پذیر چپ است. هم‌چنین ثابت می‌کنیم که اگر S_1 یک نیم‌گروه دودوری باشد، آن‌گاه $\ell^1(S_1)$ میانگین‌پذیر تقریبی نیست.

اگر C یک رسته‌ی کوچک باشد، آن‌گاه جبرباناخ $\ell^1(C)$ را به‌عنوان ℓ^1–جبر روی مجموعه ریخت‌های C با ضرب پیچش و $\ell^1(\widehat{C})$ را به‌عنوان ℓ^1–جبر روی مجموعه عناصر C با ضرب نقطه‌ای درنظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم که میانگین‌پذیری تقریبی $\ell^1(C)$، میانگین‌پذیری تقریبی $\ell^1(\widehat{C})$ را نتیجه می‌دهد و دراین حالت نتیجه می‌دهد که تعداد عناصر C متناهی است.

کلید واژه‌ها: جبر نیم‌گروهی، میانگین‌پذیری تقریبی، نیم‌گروه دودوری، نیم‌گروه برانت، رسته‌ی کوچک.

فهرست مطالب

پیشگفتار

مفهوم میانگین‌پذیری تقریبی جبرهای باناخ توسط قهرمانی[1] و لوی[2] در [۱۶] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفت. در حالت خاص آن‌ها ثابت کردند که اگر G یک گروه موضعاً فشرده باشد، آن‌گاه جبر باناخ $L^1(G)$ میانگین‌پذیر تقریبی است، اگروتنهااگر G میانگین‌پذیر باشد. به علاوه میانگین‌پذیری تقریبی جبرهای نیم‌گروهی توسط قهرمانی، لوی و زانگ[3] در [۱۷] مطالعه شد. در این مطالعات نشان داده شد که اگر جبر نیم‌گروهی $\ell^1(S)$ میانگین‌پذیر تقریبی باشد، آن‌گاه S میانگین‌پذیر است.

این پایان نامه در چهار فصل تنظیم شده است.

در فصل اول به بیان تعاریف و مفاهیم مقدماتی در دو بخش می‌پردازیم.

در فصل دوم ابتدا در بخش اول تعاریف و قضایای اولیه مربوط به میانگین‌پذیری تقریبی را بیان می‌کنیم. در بخش دوم میانگین‌پذیری تقریبی $\ell^1(S)$ وقتی S یک نیم‌گروه گسسته است را بررسی می‌کنیم. در این بخش ثابت می‌کنیم که برای یک نیم‌گروه حذفی چپ S، میانگین‌پذیری تقریبی $\ell^1(S)$، میانگین‌پذیری چپ S را نتیجه می‌دهد. در بخش سوم ثابت می‌کنیم که برای یک نیم‌گروه برانت S روی گروه G با مجموعه اندیس I، جبر نیم‌گروهی $\ell^1(S)$ میانگین‌پذیر است اگروتنهااگر G میانگین‌پذیر و I متناهی باشد. به‌علاوه $\ell^1(S)$ میانگین‌پذیر تقریبی است اگروتنهااگر G میانگین‌پذیر و I متناهی باشد. در بخش چهارم برای یک نیم‌گروه اساسی حذفی چپ S با همانی ثابت می‌کنیم که میانگین‌پذیری چپ S، از میانگین‌پذیری تقریبی جبر باناخ $M_a(S)$ نتیجه می‌شود.

در فصل سوم ابتدا در بخش اول به بیان تعاریف مورد نیاز می‌پردازیم. در بخش دوم ثابت می‌کنیم

[1] Ghahramani

[2] Loy

[3] Zhang

که نیم‌گروه دودوری S_1 میانگین‌پذیر است، اما جبر نیم‌گروهی $\ell^1(S_1)$ میانگین‌پذیر نیست. حتی $\ell^1(S_1)$ میانگین‌پذیر تقریبی نیست. در انتهای این بخش با ذکر یک مثال نشان می‌دهیم که جبرهای نیم‌گروهی میانگین‌پذیر تقریبی لزوماً میانگین‌پذیر نیستند.

در فصل چهارم در بخش اول ابتدا تعاریف مورد نیاز را بیان می‌کنیم، سپس ثابت می‌کنیم که برای یک رسته‌ی کوچک C با مجموعه عناصر نامتناهی جبر باناخ $\ell^1(C)$ میانگین‌پذیر تقریبی نیست. در بخش دوم به‌عنوان یک نتیجه ثابت می‌کنیم اگر S یک نیم‌گروه برانت با مجموعه اندیس نامتناهی باشد، آن‌گاه $\ell^1(S)$ میانگین‌پذیر تقریبی نیست.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل، تعاریف و قضایای مقدماتی که در طی فصول بعدی این پایان نامه مورد نیاز است، به‌طور گذرا بیان می‌کنیم و از اثبات قضایا صرف‌نظر می‌کنیم.

۱.۱ آنالیز تابعی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط باشد. یک نیم‌نرم روی X، یک تابع $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ است، به‌طوری‌که

(۱) برای هر $x \in X$، $\|x\| \geq 0$،

(۲) برای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$،

(۳) برای هر $x, y \in X$، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

یک نرم روی X یک نیم‌نرم است که به‌علاوه داشته باشیم

$$\|x\| > 0 \quad (0 \neq x \in X).$$

خاصیت (۲) ایجاب می‌کند $\|0\| = 0$. هر فضای برداری مجهز به یک نرم، یک فضای برداری نرم‌دار نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید X و Y دو فضای نرم‌دار روی میدان اعداد مختلط باشد. دراین‌صورت نگاشت $L : X \longrightarrow Y$، یک عملگر خطی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$،

$$L(\alpha x + y) = \alpha L(x) + L(y).$$

عملگر $L : X \longrightarrow Y$ کران‌دار گفته می‌شود، هرگاه ثابت $C \geq ۰$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in X$،

$$\|Lx\| \leq C\|x\|.$$

مجموعه‌ی تمام عملگرهای خطی و کران‌دار از X به Y با $B(X, Y)$ نشان داده می‌شود.

$B(X, Y)$ با عمل جمع معمولی و ضرب اسکالر و نرم

$$\begin{aligned} \|L\| &= \sup\{\frac{\|L(x)\|}{\|x\|} : ۰ \neq x \in X\} \\ &= \sup\{\|L(x)\| : \|x\| \leqslant ۱\} \\ &= \inf\{C > ۰ : \|Lx\| \leq C\|x\| \quad (x \in X)\}, \end{aligned}$$

یک فضای نرم‌دار است و اگر Y باناخ باشد $B(X, Y)$ یک فضای باناخ است.

$L \in B(X, Y)$ یکریختی نامیده می‌شود، هرگاه L دوسویی و $L^{-۱}$ کران‌دار باشد.

L طولپا نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x \in X$، $\|Lx\| = \|x\|$.

مجموعه‌ی تمام عملگرهای خطی و کران‌دار از X به X با $B(X)$ نشان داده می‌شود.

قضیه ۳.۱.۱. نگاشت خطی $L : X \longrightarrow Y$ کران‌دار است اگروتنهااگر پیوسته باشد.

اثبات. به [۸] رجوع کنید. □

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید M یک زیرفضای بسته از فضای برداری X باشد. اگر یک زیرفضای N از X وجود داشته باشد به‌طوری‌که $M \cap N = \{۰\}$ و $X = M + N$ دراین‌صورت M، متمم‌دار در X نامیده می‌شود. دراین‌حالت X حاصل‌جمع مستقیم از M و N گفته می‌شود و به‌صورت $X = M \oplus N$، نوشته می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ و M زیرفضای X باشد. دراین‌صورت فضای $M^{\perp}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$M^{\perp} = \{f \in X^* : f(x) = ۰ \quad (x \in M)\}.$$

قضیه ۶.۱.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ و M یک زیرفضای بسته از X باشد. دراین‌صورت

(۱) $M^* \cong X^*/M^\perp$.

(۲) $(X/M)^* \cong M^\perp$.

اثبات. به قضیه‌ی (۴.۹) از [۳۳] رجوع کنید. □

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید E یک مجموعه غیرتهی و R یک رابطه روی E (یعنی یک زیر-مجموعه از $E \times E$) باشد. دراین‌صورت R، یک رابطه‌ی ترتیب جزئی نامیده می‌شود، اگر بازتابی، پادمتقارن و انتقالی باشد. یعنی

(۱) برای هر $x \in E$، داشته باشیم $(x,x) \in R$.

(۲) برای هر $x,y \in E$، به‌طوری‌که $(x,y) \in R$ و $(y,x) \in R$، داشته باشیم $x = y$.

(۳) برای هر $x,y,z \in E$، به‌طوری‌که $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in R$، داشته باشیم $(x,z) \in R$.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید $\leq$ یک رابطه‌ی ترتیب جزئی روی مجموعه‌ی غیرتهی E باشد. دراین‌صورت $(E,\leq)$ یک مجموعه‌ی جهت‌دار نامیده می‌شود، اگر هر زوج α,β از عناصر E دارای یک کران بالا باشد. یعنی برای هر زوج α,β از E، عنصر γ از E وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\alpha \leqslant \gamma \quad \text{و} \quad \beta \leqslant \gamma.$$

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید $(E,\leq)$ یک مجموعه‌ی جهت‌دار و D یک مجموعه باشد. یک نگاشت ν از E به D با فرض $x_\alpha = \nu(\alpha)$، برای هر $\alpha \in E$، یک تور در D با دامنه‌ی E نامیده می‌شود. معمولاً $\nu(\alpha)$ با x_α نشان داده می‌شود.
اگر D یک فضای توپولوژیکی باشد، تور $(x_\alpha)_{\alpha\in E}$ همگرا به x نامیده می‌شود، هرگاه برای هر همسایگی U حول x، یک $\alpha \in E$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $\beta \in E$،

$$\alpha \leqslant \beta \Longrightarrow x_\beta \in U.$$

دراین‌صورت نوشته می‌شود

$$x_\alpha \longrightarrow x \quad \text{یا} \quad \lim_\alpha x_\alpha = x.$$

تعریف ۱۰.۱.۱. فضای برداری X روی میدان $\mathbb{C}$ همراه با یک توپولوژی به‌طوری‌که:

(a) نگاشت $\begin{cases} X \times X \longrightarrow X \\ (x,y) \longmapsto x+y \end{cases}$ پیوسته باشد،

(b) نگاشت $\begin{cases} \mathbb{C} \times X \longrightarrow X \\ (\alpha,x) \longmapsto \alpha x \end{cases}$ پیوسته باشد،

یک فضای برداری توپولوژیکی نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیکی باشد. دراین‌صورت فضای تابعک‌های خطی و پیوسته روی X فضای دوگان X نامیده می‌شود و با X^* نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری باشد. دراین‌صورت برای هر $\nu \in X^*$، نیم‌نرم p_ν به‌صورت

$$p_\nu(x) = \ |\langle \nu, x\rangle \ |$$

تعریف می‌شود که در آن برای $x \in X$ و $\nu \in X^*$، $\langle \nu, x\rangle = \nu(x)$. توپولوژی تعریف شده روی X توسط خانواده‌ی نیم‌نرم‌های $\{p_\nu : \nu \in X^*\}$، توپولوژی ضعیف روی X نامیده می‌شود و اغلب با $\sigma(X, X^*)$ نشان داده می‌شود. تور (x_α) در X همگرای ضعیف به $x_\circ \in X$ است، اگروتنهااگر

$$\langle \nu, x_\alpha\rangle \longrightarrow \langle \nu, x_\circ\rangle \quad (\nu \in X^*).$$

به‌طور مشابه، برای هر $x \in X$، نیم‌نرم p_x روی X^* به‌صورت

$$p_x(\nu) = \ |\langle \nu, x\rangle \ |$$

تعریف می‌شود. توپولوژی تعریف شده روی X^* توسط خانواده‌ی نیم‌نرم‌های $\{p_x : x \in X\}$، توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* نامیده می‌شود و اغلب با $\sigma(X^*, X)$ نشان داده می‌شود. تور $(\nu)_\alpha$ در X^* همگرای ضعیف ستاره (w^*- همگرا) به $\nu_\circ$ در X^* است، اگروتنهااگر

$$\langle \nu_\alpha, x\rangle \longrightarrow \langle \nu_\circ, x\rangle \quad (x \in X).$$

قضیه ۱۳.۱.۱. (قضیه مازور [۱])

فرض کنید E یک فضای باناخ باشد. دراین‌صورت برای هر مجموعه محدب S در E بستار S در

[۱] Mazur's theorem

$(E, \|.\|)$ و $(E, \sigma(E, E^*))$ یکسان است.

اثبات. به [۹] رجوع کنید. □

۲.۱ جبرهای باناخ

تعریف ۱.۲.۱. یک جبر A بر میدان $\mathbb{F}$، یک فضای برداری بر میدان $\mathbb{F}$، همراه با یک تابع ضرب $. : A \times A \longrightarrow A$ است که در شرایط زیر صدق کند:

(۱) برای هر $x, y, z \in A$،

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

(۲) برای هر $x, y, z \in A$،

$$(y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x \quad \text{و} \quad x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z,$$

(۳) برای هر $x, y \in A$ و $\alpha \in \mathbb{F}$،

$$(\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y) = x \cdot (\alpha y).$$

جبر A یک‌دار نامیده می‌شود، هرگاه عضو ۱ در A وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in A$،

$$۱ \cdot a = a = a \cdot ۱.$$

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید A یک جبر باشد، که روی آن یک نرم $\|.\|$ تعریف شده است. هرگاه برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم

$$\|a \cdot b\| \leq \|a\|\|b\|$$

در این‌صورت نرم $\|.\|$، نرم جبری نامیده می‌شود. و به $(A, \|.\|)$ یک جبر نرم‌دار گفته می‌شود. یک جبر نرم‌دار که نسبت به نرم جبری کامل باشد، یک جبر باناخ نام دارد.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید A و B جبرهای باناخ باشند. دراین‌صورت توپولوژی عملگر قوی (SOT-توپولوژی) توسط خانواده‌ای از نیم‌نرم‌های $\{p_x : x \in A\}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$p_x(T) := \|Tx\|, \quad (x \in A, T \in B(A, B)).$$

تعریف ۴.۲.۱. جبر باناخ A جابه‌جایی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $a,b \in A$:
$$ab = ba.$$

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید A و B دو جبر بر یک میدان $\mathbb{F}$ باشند. تابع خطی $\varphi : A \longrightarrow B$، یک همریختی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x,y \in A$،
$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$
اگر φ، یک به یک و پوشا نیز باشد، یکریختی نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید $(A, \|.\|_۱)$ و $(B, \|.\|_۲)$ دو جبر باناخ باشند، و $\varphi : A \longrightarrow B$ یک همریختی حافظ نرم باشد. یعنی برای هر $x \in A$،
$$\|x\|_۱ = \|\varphi(x)\|_۲$$
دراین‌صورت φ، طولپا نامیده می‌شود.

قضیه ۷.۲.۱. (قضیه گلدشتاین [۲])
فرض کنید E یک جبر باناخ باشد. دراین‌صورت برای هر $\Phi \in E^{**}$، یک تور (x_ν) در E وجود دارد به‌طوری‌که برای هر v، $\|x_v\| \leqslant \|\Phi\|$ و $\iota(x_\nu)$ در $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$ به Φ همگراست. که در آن $\iota : E \longrightarrow E^{**}$ به‌صورت $\iota(x) = \widehat{x}$ و $\widehat{x}(f) = f(x)$ برای هر $f \in E^*$ و هر $x \in E$، تعریف می‌شود.

اثبات. به [۳] رجوع کنید. □

تعریف ۸.۲.۱. یک زیرفضای برداری I از جبر A یک ایده‌آل چپ (به‌ترتیب، راست) از A گفته می‌شود، هرگاه $x \in A$ و $y \in I$، نتیجه دهد $xy \in I$ (به‌ترتیب، $yx \in I$).
I یک ایده‌آل A نامیده می‌شود، هرگاه هم ایده‌آل چپ و هم ایده‌آل راست A باشد.
$I \subset A$ ماکسیمال است، هرگاه بین A و I هیچ ایده‌آل دیگری نباشد. به‌عبارت دیگر $I \subset A$ ماکسیمال است، هرگاه I یک ایده‌آل سره از A بوده و اگر J ایده‌آل دیگری در A باشد که $I \subseteq J \subset A$، آن‌گاه $I = J$.

[۲] Goldestain's Theorem

یک ایده‌آل مینیمال A، یک ایده‌آل دوطرفه $J \neq \{0\}$ است که شامل هیچ ایده‌آل دوطرفه دیگری به جزء $\{0\}$ و J نباشد.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید A یک جبر باناخ جابه‌جایی باشد. در این‌صورت رادیکال A که با $rad(A)$ نمایش داده می‌شود، اشتراک تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال A تعریف می‌شود.
اگر $rad(A) = \{0\}$، آن‌گاه جبر باناخ A نیم‌ساده نامیده می‌شود.

تعریف ۱۰.۲.۱. یک برگشت روی جبر A یک نگاشت $\left\{\begin{array}{l} *: A \longrightarrow A \\ a \longmapsto a^* \end{array}\right.$ است به‌طوری‌که در شرایط زیر صدق کند:

(۱) برای هر $a \in A$، $(a^*)^* = a$،

(۲) برای هر $a, b \in A$، $(a+b)^* = a^* + b^*$،

(۳) برای هر $a \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، $(\alpha a)^* = \bar{\alpha} a^*$ ($\bar{\alpha}$ مزدوج α است)

(۴) برای هر $a, b \in A$، $(ab)^* = b^* a^*$

جبر A را همراه با برگشت $*$، یک $*$-جبر می‌نامند. یک $*$-جبر باناخ، یک $*$-جبر نرم‌دار کامل است که طولپایی باشد. یعنی،

$$\|a^*\| = \|a\|$$

یک C^* جبر A، یک $*$ -جبر است که برای هر $a \in A$،

$$\|a^* a\| = \|a\|^2.$$

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. یک ایده‌آل دوطرفه M از S، 0-مینیمال نامیده می‌شود، اگر

(i) $M \neq 0$،

(ii) 0 تنها ایده‌آل دوطرفه S باشد، که به‌طور سره در M قرار دارد.

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. دراین‌صورت $\ell^1(S)$، مجموعه‌ی همه‌ی توابع مختلط مقدار f از S است به‌طوری که

$$\|f\|_1 = \sum_{s \in S} | f(s) | < \infty,$$

یعنی

$$\sup\{\sum_{s \in F} |f(s)| : \text{متناهی} F \subset S\} < \infty.$$

اگر $f, g \in \ell^1(S)$، آن‌گاه ضرب پیچش روی $\ell^1(S)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f * g)(x) = \sum_{st=x} f(s)g(t).$$

وقتی معادله $st = x$ دارای جواب باشد، درغیراین‌صورت $(f*g)(x) = 0$ تعریف می‌شود. و داریم

$$\|f * g\|_1 \leqslant \sum_{st=x} | f(s) || g(t) | \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.$$

لذا $f * g \in \ell^1(S)$، پس $(\ell^1(S), \|.\|_1, *)$ یک جبر باناخ است.

به ازای هر $s \in S$ نگاشت $\delta_s : S \longrightarrow \mathbb{C}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{اگر} \quad s = t \\ 0 & \text{اگر} \quad s \neq t \end{cases}$$

حال اگر $f \in \ell^1(S)$ ، آن‌گاه f دارای یک نمایش به‌صورت

$$f = \sum_{s \in S} f(s)\delta s$$

است. منظور از جبر نیم‌گروهی S، همان $\ell^1(S)$ با ضرب پیچش است.

تعریف ۱۳.۲.۱. اگر S یک نیم‌گروه باشد. آن‌گاه $\ell^\infty(S)$ را، مجموعه‌ی همه‌ی توابع مختلط مقدار f از S درنظر می‌گیریم به طوری‌که

$$\|f\|_\infty = sup\{ |f(s)| : s \in S\} < \infty.$$

اگر$f, g \in \ell^\infty(S)$، آن‌گاه ضرب روی $\ell^\infty(S)$ همان ضرب نقطه‌ای است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f \cdot g)(s) = f(s)g(s).$$

داریم

$$\begin{aligned}\|f\cdot g\|_\infty = sup\{\ |f\cdot g(s)\ | : s\in S\} &= sup\{\ |f(s)g(s)\ | : s\in S\}\\ &\le sup\{\ |f(s)\ | : s\in S\}sup\{\ |g(s)\ | : s\in S\}\\ &= \|f\|_\infty\|g\|_\infty < \infty.\end{aligned}$$

لذا $(\ell^\infty(S), \|.\|_\infty, .)$ یک جبر باناخ است.

تعریف ۱.۲.۱۴. یک نیم‌گروه S با یک عنصر صفر ۰، یک نیم‌گروه صفر یا پوچ نامیده می‌شود، اگر برای هر $a, b\in S$، $ab=۰$.

تعریف ۱.۲.۱۵. فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. دراین‌صورت S یک نیم‌گروه توپولوژیکی نامیده می‌شود، هرگاه S یک نیم‌گروه موضعاً فشرده‌ی هاسدورف بوده و عمل ضرب پیوسته باشد.

تعریف ۱.۲.۱۶. اگر S یک نیم‌گروه توپولوژیکی باشد، آن‌گاه $C(S)$ فضای تمام توابع مختلط-مقدار پیوسته‌ی کران‌دار روی S تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱۷. فرض کنید S یک نیم‌گروه توپولوژیکی باشد، دراین‌صورت $LUC(S)$ فضای توابع مختلط-مقدار پیوسته‌ی یکنواخت چپ روی S تعریف می‌شود. یعنی فضای تمام توابع $f\in C(S)$، به‌طوری‌که نگاشت

$$S \longrightarrow C(S)$$

$$x \longmapsto L_x f$$

پیوسته باشد. وقتی‌که $C(S)$ نرم سوپریمم را دارد و

$$L_x f(y) = f(xy) \quad (y\in S).$$

تعریف ۱.۲.۱۸. یک نیم‌گروه S حذفی چپ (به‌ترتیب، راست) نامیده می‌شود، اگر برای هر $x, y, z\in S$، $xy=xz$ نتیجه بدهد که $y=z$ (به‌ترتیب، $xy=zy$ نتیجه بدهد که $x=z$).

تعریف ۱.۲.۱۹. تابعک خطی $m\in LUC(S)^*$ یک میانگین نامیده می‌شود، هرگاه

$$\|m\| = m(۱) = ۱.$$

m میانگین پایای چپ نامیده می‌شود، هرگاه برای تمام $x \in S$ و $f \in LUC(S)$،

$$m(L_x f) = m(f).$$

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنید S یک نیم‌گروه توپولوژیکی باشد. دراین‌صورت S میانگین‌پذیر چپ نامیده می‌شود، اگر $LUC(S)$ یک میانگین پایای چپ داشته باشد.
میانگین‌پذیری راست یک نیم‌گروه توپولوژیکی به‌طور مشابه تعریف می‌شود.
یک نیم‌گروه توپولوژیکی که هم میانگین‌پذیر چپ و هم میانگین‌پذیر راست باشد، میانگین‌پذیر نامیده می‌شود.

تعریف ۲۱.۲.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. یک میانگین روی $\ell^\infty(G)$ یک تابعک خطی پیوسته‌ی Λ روی $(\ell^\infty(G), \ |.\ |_G)$ است به‌طوری‌که

$$\Lambda(\mathbf{1}) = \|\Lambda\| = 1.$$

میانگین Λ پایای چپ است، هرگاه

$$\langle f, \Lambda \rangle = \langle f \cdot \delta_s, \Lambda \rangle \quad (s \in G, f \in \ell^\infty(G)).$$

گروه G میانگین‌پذیر است، اگر یک میانگین پایای چپ روی $\ell^\infty(G)$ وجود داشته باشد.

قضیه ۲۲.۲.۱. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. دراین‌صورت شرایط زیر معادلند:

(i) G میانگین‌پذیر است.

(ii) یک میانگین پایای چپ روی $\ell^\infty(G)$ وجود دارد.

(iii) یک میانگین پایای چپ روی $LUC(G)$ وجود دارد.

(iv) یک میانگین پایای چپ روی $RUC(G)$ وجود دارد.

(v) یک میانگین پایای چپ روی $UC(G)$ وجود دارد.

اثبات. به قضیه (۱.۱.۹) از [۳۴] رجوع کنید. □

تعریف ۲۳.۲.۱. فرض کنید S یک نیم‌گروه توپولوژیکی باشد. دراین‌صورت جبر باناخ $M(S)$، مجموعه‌ی تمام اندازه‌های مختلط-مقدار کران‌دار روی S با نرم $\|\mu\| = |\mu|(S)$ است.

تعریف ۲۴.۲.۱. اگر S یک نیم‌گروه توپولوژیکی باشد، آن‌گاه جبر $M_a(S)$، مجموعه‌ی تمام اندازه‌های $\mu \in M(S)$ به‌طوری‌که هر دو نگاشت $x \longmapsto \mu * \delta_x$ و $x \longmapsto \delta_x * \mu$ (δ_x اندازه‌ی دیراک در x است) از S به $M(S)$ به‌طور ضعیف پیوسته باشند.

تعریف ۲۵.۲.۱. فرض کنید S یک نیم‌گروه توپولوژیکی باشد. دراین‌صورت S یک نیم‌گروه اساسی نامیده می‌شود، اگر S برابر با بستار $\cup\{supp(\mu) : \mu \in M_a(S)\}$ باشد.

تعریف ۲۶.۲.۱. فرض کنید S یک نیم‌گروه اساسی باشد. دراین‌صورت فضای تمام توابع مختلط-مقدار کران‌دار $M(S)$- اندازه‌پذیر (به‌ترتیب، $M_a(S)$-اندازه‌پذیر) روی S با $BM(S)$ (به‌ترتیب، $L^\infty(S, M_a(S))$) نمایش داده می‌شود.

قضیه ۲۷.۲.۱. $M_a(S)$ یک ایده‌آل دوطرفه‌ی $M(S)$ است.

اثبات. به قضیه (۲.۶) از [۱] رجوع کنید. □

تعریف ۲۸.۲.۱. فرض کنید X و Y فضاهای باناخ روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. برای $x \in X$ و $y \in Y$، حاصل‌ضرب تانسوری x و y به‌صورت

$$x \otimes y(\mu, \lambda) = \langle \mu, x\rangle\langle \lambda, y\rangle \quad (\mu \in X^*, \lambda \in Y^*),$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۲۹.۲.۱. فرض کنید X, Y فضاهای باناخ باشند. دراین‌صورت $X \otimes Y$ به‌صورت

$$X \otimes Y = \{\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i : \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\|y_i\| < \infty, x_i \in X, y_i \in Y\},$$

و نرم روی آن به‌صورت

$$\|z\|_\pi = inf\{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\|y_i\| : z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, x_i \in X, y_i \in Y\},$$

تعریف می‌شود. کامل شده $(X \otimes Y, \|.\|_\pi)$ با $X\widehat{\otimes}Y$ نمایش داده می‌شود، و به‌صورت

$$X\widehat{\otimes}Y = \{\sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i : \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|\|y_i\| < \infty, x_i \in X, y_i \in Y\},$$

و نرم روی آن به‌صورت

$$\|z\|_\pi = inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|\|y_i\| : z = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i, x_i \in X, y_i \in Y\},$$