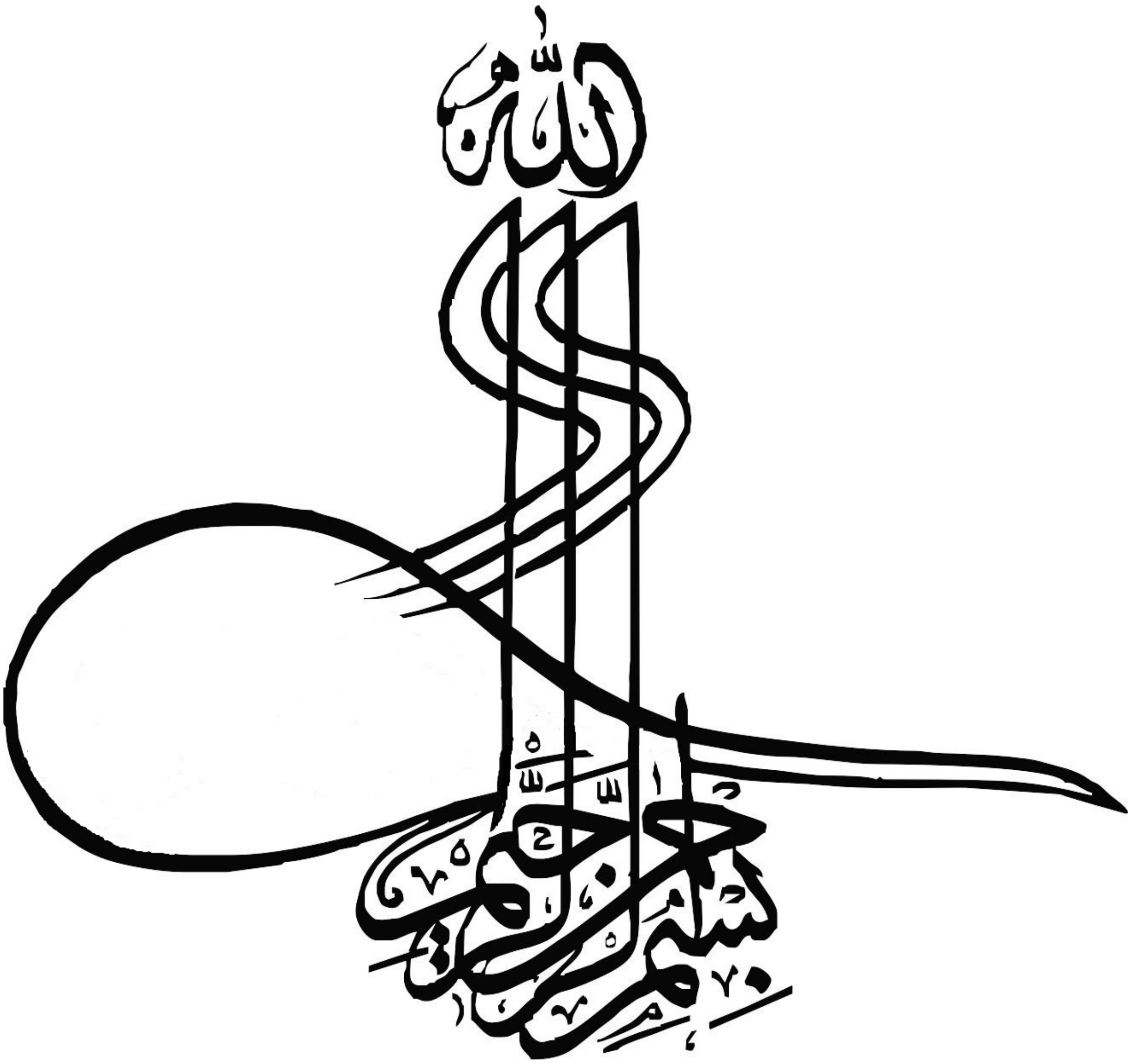
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض گرایش آنالیز

خواص میانگین پذیری مرکز جبرهای گروهی

استاد راهنما:

دکتر علی رجالی

پژوهشگر:

بهجت نظری دهکردی

بهمن ۱۳۸۹

قدردانی

حمد و سپاس خدای را که کلمات قاصر است از ستایش او زبان ناتوان است از بیان آن چه که در خور اوست. الهی، زمین و آسمان پیوسته نام تو را به زبان آورند و ساکنان فرمانروایت که همگان را شامل است، پیوسته به تسبیح تو مشغول؛ و اگر هزار هزار برابر این، حمد تو گوییم هنوز شایسته ی عظمت تو نیست.

بارخدایا؛ هم اکنون که مرحله ای دیگر از راهی که پیش روست را پشت سر می گذارم، هم چون همیشه می دانم که هر چه هست همه از لطف و عنایت بی کران توست. به هر جا که قدم نهم به خواست تو و به هر چه دست یابم از رحمانیّت و رحمیّت توست. پس پیوسته حمد تو گویم و بزرگیت را قدر دانم.

در این مقال که فرصتیست برای سپاس گذاری، شایسته می دانم مقدم بر همه از پدر و مادرم قدردانی کنم که هر چه دارم مدیون تلاش، صبر، بزرگواری و همّت آن دو ام؛ که نه فقط در این مرحله ی کوتاه چه تمام زندگی مرا از محبّت بی دریغ خود بهره مند کردند و همواره دلگرم از مهربانی و پشتیبانیشان بوده ام و همچنین از همسر عزیزم که در این مدت یار و همراه من در تمام این سختی ها بود که با هیچ زبانی قادر به سپاسگذاری از ایشان نیستم.

اگرچه تمامی آن چه در هستی است برای قدردانی از مقام بزرگ معلّمی کم است، اما آن چه تکلیف خود می دانم سپاس گذاری از تمام معلّمانم از روز آغازین تا امروز است؛ خصوصاً بزرگ ترین و صبورترین معلّمم دکتر علی رجالی که از ابتدای تحصیل، برای من اسوه ی آموزگاری بوده اند و هر چه آموخته ام ذرّه ای از دانش بی کران ایشان بوده؛ نه تنها در حیطه ی علمی بلکه در عرصه ی زندگی بزرگ ترین و عزیزترین الگوی طیّ طریق بوده اند و همواره با صبر و مهربانی راهیابی به تمامی مسیرها را برای من آسان نموده اند. گرچه کمتر از آنم که بتوانم ذرّه ای از همّت و بزرگواری ایشان را جبران کنم، اما با هر چه در توانم است قدردان مهربانی معلّم بزرگوارم هستم.

هم چنین از استاد گران قدرم، دکتر محمود لشکری زاده که در این سال های تحصیل از دانش، صبر و شکیبایی ایشان در مسیر آموزش بهره مند بوده ام، با اینکه شایسته ی مقام بزرگ ایشان نیست، تقدیر و تشکّر می کنم.

و از تمامی معلّمانم که سالها در محضرشان کسب معرفت نموده ام و همه ی کسانی که تا به امروز در محضرشان درس راهیابی به هدف نهایی ام را فرا گرفته ام، سپاس گذاری می کنم؛ باشد که قطره ای از دریای بی کران لطف و بزرگواریشان را پاسخ گفته باشم.

تقدیم به:

مهربان ترین آموزگارم؛ مادرم

و صبورترین حامی، پدرم

و همدم تنهایی هایم حمید عزیزم.

چکیده

فرض کنید G یک گروه به طور موضعی فشرده و $ZL^1(G)$ مرکز جبری جبرهای گروهی باشد. نشان می دهیم که اگر G فشرده باشد، ولی آبلی و همبند نباشد یا اگر G توسط تعداد نامتناهی ازگروههای غیر آبلی متناهی تشکیل شده باشد، آنگاه $ZL^1(G)$ میانگین پذیر نیست. همچنین اگر G یک گروه غیرفشرده ومتناهی باشد، آنگاه شرایط لازم برای میانگین پذیری $ZL^1(G)$ ارایه شده است. همچنین قضیه ابرتوبرین را برای $ZL^1(G)$ بررسی می کنیم. در پایان میانگین پذیری نیم شبکه ها و ثابت میانگین پذیری نیم شبکه ها را بررسی می کنیم.

کلیـد واژه ها: میانگین پذیری، ابر–توبرین، همبند، جبرهای مدرج.

فهرست مطالب

۰—۱ مقدمه

در این پایان‌نامه به بررسی میانگین‌پذیری مرکز جبرهای گروهی می‌پردازیم.

در فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی بیان شده است.

در فصل دوم خواص میانگین‌پذیری مرکز جبرهای گروهی را بررسی می‌کنیم و قضایای ابرتوبرین را بیان می‌کنیم.

در فصل سوم قطر تقریبی برای مرکز جبرهای گروهی ارائه می‌شود، در بخش اول گروههای فشرده را تعریف می‌کنیم، در بخش بعدی بعضی از خواص مهم مرکز جبرهای گروهی بیان می‌شود. در آخر میانگین‌پذیری گروههای فشرده را بررسی می‌کنیم.

در فصل چهارم گروههای همبند و حاصلضرب گروههای متناهی را تعریف می‌کنیم. در آخر فصل میانگین‌پذیری گروههای همبند و گروههای متناهی را بررسی می‌کنیم. مثالهایی از میانگین‌پذیری ارائه می‌شود.

در فصل پنجم رویکرد ابرگروهها و میانگین‌پذیری آنها را ملاحظه می‌کنیم.

در فصل ششم جبرهای گروهی غیرفشرده و میانگین‌پذیری آنها را بررسی می‌کنیم.

در فصل هفتم گروههای ابرتوبرین را تعریف کرده و مرکز آنها را بدست می‌آوریم. سپس میانگین‌پذیری آنها را بررسی می‌کنیم.

در فصل هشتم ثابت میانگین‌پذیری برای جبرهای نیم‌شبکه‌ای را بدست می‌آوریم.

در فصل نهم جبرهای باناخ مدرج روی نیم شبکه‌ها را بررسی کرده و نشان می‌دهیم که ثابت میانگین‌پذیری آنها در چه حدودی تغییر می‌کند. جبر نیم‌گروههای کلیفورد را تعریف کرده و ثابت میانگین‌پذیری آنها را بدست می‌آوریم.

در آخر ثابت مجاز میانگین‌پذیری را معرفی می‌کنیم.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این پایان نامه با برخی از تعاریف و قضایای مقدماتی روبه رو می‌شویم که اغلب با آن‌ها آشنایی داریم. لذا در این فصل این تعاریف و قضایا را تنها یادآوری می‌کنیم.

۱ـ۱ مفاهیم توپولوژیکی

تعریف ۱.۱ فرض کنید E یک فضای برداری باشد. یک نیم‌نرم روی E، یک تابع $\|.\|: E \longrightarrow \mathbb{R}$ است که

۱) برای هر $x \in E$، $\| x \| \geqslant 0$،

۲) برای هر $x \in E$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، $\| \alpha x \| = |\alpha| \| x \|$،

۳) برای هر $x, y \in E$، $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$.

یک نرم روی E، یک نیم‌نرم است که $\| x \| > 0$، برای $(x \neq 0)$ در E.

گوی یکه بسته برای E را با $E_{[1]}$ نشان می‌دهیم و به طور کلی تعریف می‌کنیم:

$$E_{[t]} = \{x \in E : \| x \| \leqslant t\}.$$

تعریف ۲.۱ فرض کنید E یک فضای برداری توپولوژیکی باشد. فضای تابعک‌های خطی و پیوسته‌ی روی E را فضای دوگان گوییم و با E' نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱ فرض کنید E یک فضای باناخ باشد و $A \subseteq E'_{[1]}$. فرض کنید

$$\| x \| = \sup\{| < \mu, x > | : \ \mu \in A\} \quad (x \in E).$$

در این صورت گوییم A یک مجموعه نرم‌پذیر است.

مثال ۴.۱ گوی یکه‌ی بسته از E، یک مجموعه‌ی نرم‌پذیر در E''، فضای دوگان دوم E است. در حقیقت $S := (\hat{E})$ یک مجموعه نرم‌پذیر در E^* است و برای هر $f \in E^*$

$$\| f \|_S = sup\{|f(x)|; \| x \| \leqslant 1\} = sup\{|\hat{x}(f)| : \| \hat{x} \| \leqslant 1\}$$

تعریف ۵.۱ فرض کنید E یک فضای برداری باشد. برای هر $\mu \in E'$، نیم‌نرم p_μ را با $p_\mu(x) = | < \mu, x > |$ تعریف می‌کنیم. توپولوژی تعریف شده روی E توسط خانواده‌ی نیم‌نرم‌های $\{p_\mu : \ \mu \in E'\}$ را توپولوژی ضعیف روی E گوییم و اغلب با $\sigma(E, E')$ نشان می‌دهیم. تور (x_α) را در E همگرای ضعیف به $x_\circ \in E$ گوییم اگر و تنها اگر برای هر $\mu \in E'$، $< \mu, x_\alpha > \to < \mu, x_\circ >$.

به طور مشابه، برای هر $x \in E$، نیم‌نرم p_x را روی E' با $p_x(\mu) = | < \mu, x > |$ تعریف می‌کنیم. توپولوژی تعریف شده روی E' توسط خانواده‌ی نیم‌نرم‌های $\{p_x : \ x \in E\}$ را توپولوژی ضعیف روی E گوییم و اغلب با $\sigma(E', E)$ نشان می‌دهیم. تور (μ_α) را در E' همگرای ضعیف (w^*–همگرا) به $\mu_\circ \in E'$ گوییم اگر و تنها اگر برای هر $x \in E$، $< \mu_\alpha, x > \to < \mu_\circ, x >$.

تعریف ۶.۱ مجموعه‌ی D را جهت‌دار گوییم، اگر برای هر $\gamma \in D$، وجود داشته باشد $\alpha, \beta \in D$ به‌طوری‌که $\alpha \geq \gamma$ و $\beta \geq \gamma$ باشد. یک تور در X تابعی است مانند $P : D \longrightarrow X$، به‌طوری‌که $P(\alpha) := x_\alpha$ باشد.

تعریف ۷.۱ نقطه x را نقطه‌ی انباشتگی تور (x_α) گوییم، اگر برای هر همسایگی U از x و برای هر $\beta \in D$، یک $\alpha \geq \beta$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x_\alpha \in U$ باشد.

تعریف ۸.۱ عملگر $T : E \longrightarrow F$ را فشرده گوییم هرگاه T، گوی یکه‌ی بسته‌ی E را به زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی نسبی F بنگارد؛ یعنی $\overline{T(E_{[1]})}$ در F فشرده باشد. در این حالت می‌نویسیم $T \in \mathcal{K}(E, F)$ و $\mathcal{K}(E) := \mathcal{K}(E, E)$.

به طور مشابه، عملگر فشرده ضعیف تعریف می‌شود. مجموعه‌ی عملگرهای فشرده ضعیف را با $\mathcal{W}(E,F)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۹.۱ قضیه‌ی باناخ — آلاگلو[۱]

فرض کنید E یک فضای نرم‌دار باشد. در این صورت $E'_{[1]}$، w^*- فشرده است و هر تور در $E'_{[1]}$، دارای یک زیرتور w^*-همگرا است.

تعریف ۱۰.۱ فرض کنید E و F فضاهای برداری نرم‌دار باشند. عملگر $Q : F \longrightarrow E$ را خارج قسمتی گوییم هرگاه پوشا باشد و برای هر $x \in E$،

$$\| x \| = \inf\{\| y \| : y \in F,\ Q(y) = x\}.$$

تعریف ۱۱.۱ فرض کنید E یک فضای برداری باشد. یک تابعک زیر خطی روی E، یک نگاشت $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ است به طوری که

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \quad p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad (x, y \in E,\ \alpha \in \mathbb{R}^+).$$

قضیه ۱۲.۱ قضیه‌ی نمایش ریز[۲]

فرض کنید Ω یک فضای به طور موضعی فشرده‌ی ناتهی باشد. در این صورت:

۱) برای هر تابعک خطی مثبت λ روی $C_{\circ\circ}(\Omega, \mathbb{R})$، یک اندازه‌ی بورل منظم مثبت یکتای μ روی Ω وجود دارد به طوری که

$$< \lambda, f > = \int_\Omega f d\mu \quad (f \in C_{\circ\circ}(\Omega, \mathbb{R})).$$

[۱] Banach-Alaoglu's Theorem

[۲] Riesz Representation Theorem

۲) نگاشت $\mu \mapsto \Lambda_\mu$ یک طول‌پایی یک به یک و پوشا از $M(\Omega)$ به فضای دوگان $C_\circ(\Omega)'$ است، به‌طوری‌که $\Delta_\mu(f) = \int_\Omega f d\mu$، برای $f \in C_\circ(\Omega)$.

قضیه ۱۳.۱ قضیه همگرایی کران‌دار برای اندازه‌های برداری [۳]

فرض کنید $\mu : \sigma \longrightarrow X$ یک اندازه‌ی برداری و (f_n) یک دنباله‌ی کران‌دار یکنواخت از تابع‌های $\sigma-$ اندازه‌پذیر روی Ω باشد که به f همگرا هستند. در این صورت

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

تعریف ۱۴.۱ پیچش دو اندازه μ, ν عبارت است از:

$$\mu * \nu(E) = \int_G \int_G \chi_E(xy) d\mu(x) d\nu(y), \qquad (E \in B(G)).$$

تعریف ۱۵.۱ پیچش دو تابع f, g عبارت است از:

$$f * g(x) = \int_G f(y) g(y^{-1} x) dy$$

برای هر $x \in G$.

[۳] Bounded Convergence Theorem for Vector Measures

۱—۲ مفاهیم جبری

تعریف ۱۶.۱ یک مجموعه غیرتهی با یک عمل شرکت‌پذیر را نیم‌گروه گوییم.

تعریف ۱۷.۱ اگر مجموعه S یک نیم گروه خودتوان جابه‌جایی باشد، آنگاه S را نیم‌شبکه گوییم.

تعریف ۱۸.۱ نیم‌گروه S را کلیفورد نامیم، اگروتنهااگر S یک اجتماع از گروهها روی یک نیم‌شبکه باشد، یعنی $S = \cup_{\alpha \in I} G_\alpha$ جایی‌که I یک نیم‌شبکه است و $G_\alpha . G_\beta \subseteq G_{\alpha\beta}$ باشد.

تعریف ۱۹.۱ یک جبر $\mathcal{A}$ بر میدان $\mathbb{F}$، یک فضای برداری بر میدان $\mathbb{F}$ به همراه یک تابع ضرب $. : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ است که در شرایط زیر صدق کند:

۱) برای هر x و y ،$z \in \mathcal{A}$، $x.(y.z) = (x.y).z$.

۲) برای هر x ، y ،$z \in \mathcal{A}$، $x.(y+z) = x.y + x.z$ و $(y+z).x = y.x + z.x$.

۳) برای هر x و $y \in \mathcal{A}$ و برای هر $\alpha \in \mathbb{F}$، $(\alpha x).y = \alpha(x.y) = x.(\alpha y)$.

جبر $\mathcal{A}$ را یک‌دار گوییم هرگاه عضو ۱ در $\mathcal{A}$ وجود داشته باشد که برای هر $a \in \mathcal{A}$، $1.a = a = a.1$.

تعریف ۲۰.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باشد. قرار دهید $\mathcal{A}^\# = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$. در این صورت $\mathcal{A}^\#$ با ضرب

$$(a, \lambda).(b, \mu) = (a.b + a\mu + \lambda b, \lambda\mu) \quad (a, b \in \mathcal{A},\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}),$$

یک جبر یک‌دار می‌شود که یک آن $(0, 1)$ است. این جبر را جبر یک‌دار شده‌ی $\mathcal{A}$ گوییم.

تعریف ۲۱.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر یک‌دار باشد. عضو $a \in \mathcal{A}$ را معکوس‌پذیر گوییم هرگاه $b \in \mathcal{A}$ موجود باشد که $a.b = 1 = b.a$. در صورت وجود، این عضو یکتاست از همین رو آن را با a^{-1} نمایش می‌دهیم.

مجموعه‌ی تمام اعضای معکوس پذیر در $\mathcal{A}$ را با $Inv(\mathcal{A})$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۲.۱ فرض کنید $S \subseteq \mathcal{A}$. کوچکترین زیر جبر $\mathcal{A}$ را که شامل S باشد، زیر جبر تولید شده توسط S گوییم و با $< S >$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۳.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باشد که روی آن نرمِ $\| \cdot \|$ تعریف شده است. هرگاه برای هر $b \in \mathcal{A}$ و a داشته باشیم $\| a.b \| \leqslant \| a \| \| b \|$، آن‌گاه نرم $\| \cdot \|$ را نرم جبری گوییم. در این صورت $(\mathcal{A}, \| \cdot \|)$ را یک جبر نرم‌دار می‌نامیم.

یک جبر نرم‌دار را که نسبت به نرم جبری کامل باشد، یک جبر باناخ گوییم.

مثال ۲۴.۱ فرض کنید E یک فضای باناخ باشد. در این صورت فضای عملگرهای خطی و کران‌دار (پیوسته) بر E با ضرب اسکالر و عمل ترکیب یک جبر باناخ یک‌دار تشکیل می‌دهد که آن را با $\mathcal{B}(E)$ نشان می‌دهیم. برای هر $u \in \mathcal{B}(E)$ داریم

$$\| u \| = \sup\{\| u(x) \| : \| x \| < 1\}.$$

تعریف ۲۵.۱ فرض کنید E یک فضای باناخ باشد و $T \in \mathcal{B}(E)$. برای هر $x \in E$ و $\lambda \in E'$، $T' \in \mathcal{B}(E')$ را با $< T'(\lambda), x > = < \lambda, T(x) >$، تعریف می‌کنیم.

برای یک زیرمجموعه X از $\mathcal{B}(E)$ قرار دهید $X^a = \{T' : T \in X\}$. واضح است که X^a زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{B}(E')$ است. در حالت خاص، $\mathcal{B}(E)^a$ یک زیر جبر از $\mathcal{B}(E')$ است.

هم‌چنین، $B(E)^a = \mathcal{B}(E')$ اگر و تنها اگر E بازتابی باشد.

اکنون برای یک جبر باناخ $\mathcal{A}$ و $\psi \in \mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(E))$، $\psi^a \in \mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(E'))$ را با $\psi^a(b) = \psi(b)'$ ($b \in \mathcal{A}$)، تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۶.۱ فرض می‌کنیم B زیر گروهی از $Aut(G)$ باشد، اگر G شامل یک همسایگی B—پایای فشرده از همانی باشد. دراینصورت G را یک $[IN]_B$ گروه نامند.

تعریف ۲۷.۱ هرگاهG شامل یک مجموعه از همسایگی‌های B—پایا از همانی باشد، دراینصورت G یک $[SIN]_B$ گروه است.

تعریف ۲۸.۱ اگرB— جابه‌جاگر$\{\beta(x)x^{-1} : \quad \beta \in B \quad , x \in \ G\}$، از زیرگروههای فشرده از$G$ تولید شده باشد، در اینصورتG یک$[FD]_B^-$ گروه است.

تعریف ۲۹.۱ اگرB بطور نسبی فشرده در$Aut(G)$ باشد، دراینصورتG یک$[FIA]_B^-$ گروه است.

تعریف ۳۰.۱ $Z^B L^1(G) = \{f \in L^1(G) \quad : f^\beta(x) = f(\beta^{-1}x) \quad , \beta \in B, x \in G\}$.

تعریف ۳۱.۱ فرض کنیدG یک گروه به‌طور موضعی فشرده و$L^1(G)$ جبرگروهی آن باشد، یعنی زیرجبر از جبراندازه$M(G)$ که بطور مطلق نسبت به اندازه هار پیوسته باشد. لذا

$$L^1(G) = \{\mu \in \ M(G) : \quad \mu \ll \lambda\},$$

است، قرار می‌دهیم:

$$ZL^1(G) = \{f \in L^1(G) : \quad f * g = g * f, \quad g \in L^1(G)\},$$

که مرکز$L^1(G)$ است.

در این‌جا ضمن معرفی تابع اثر، چند ویژگی مهم آن را یادآوری می‌کنیم

تعریف ۳۲.۱ فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌هایی در میدان $\mathbb{F}$ باشد. تابع اثر ماتریس A را مجموع درایه‌های روی قطر ماتریس A تعریف می‌کنیم.

با توجه به آن که هر عملگر خطی روی یک فضای برداری با بعد متناهی را می‌توان با یک ماتریس متناظر کرد، اثر یک عملگر خطی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

فرض کنید X یک فضای برداری با بعد متناهی و $V : X \longrightarrow X$، یک عملگر خطی باشد. اگر V توسط ماتریس A نمایش داده شود، آن‌گاه اثر عملگر خطی V که با $tr_X(V)$ نشان می‌دهیم برابر است با مجموع درآیه‌های روی قطر ماتریس A.

فرض کنید $V : X \longrightarrow X$ یک عملگر خطی با رتبه‌ی متناهی باشد. ترانهاده‌ی V، $V^t : X' \longrightarrow X'$ نیز، با رتبه‌ی متناهی است و داریم $tr_X(V) = tr_{X'}(V^t)$.

فرض کنید $S : X \longrightarrow Y$ و $T : Y \longrightarrow X$، عملگرهای خطی باشند که حداقل یکی از آن‌ها رتبه‌ی متناهی دارد. در این صورت $S \circ T$ و $T \circ S$ نیز رتبه‌ی متناهی دارند و $tr_Y(S \circ T) = tr_X(T \circ S)$.

با استفاده از تابع اثر، می‌توان یک ضرب داخلی روی فضای ماتریس‌های $n \times n$ تعریف کرد:

اگر A و B ماتریس‌های $n \times n$ باشند، ضرب داخلی A و B را

$$< A, B >= tr(AB^t)$$

تعریف می‌کنیم. بنابراین برای عملگرهای خطی با رتبه‌ی متناهی نیز می‌توان یک ضرب داخلی تعریف کرد.

تعریف ۳۳.۱ یک ایده‌آل چپ از $\mathcal{A}$، یک زیرفضای برداری از $\mathcal{A}$ مانند I است که برای هر $a \in \mathcal{A}$ و هر $b \in I$، $a.b \in I$. به طور مشابه ایده‌آل راست تعریف می‌شود.